ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. КЕЛДЫША
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

КОЧКАРОВ Азрет Ахматович

НОВЫЕ ТЕОРЕТИКО-ГРАФОВЫЕ ПОДХОДЫ В МОДЕЛИРОВАНИИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

На правах рукописи

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Специальность 05.13.18 –
Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., проф.
Малинецкий Г.Г.

Москва
2005

Содержание

Введение 4
Математическое моделирование и иерархия упрощенных моделей 4
Мягкое моделирование и нелинейные явления 6
Три парадигмы синергетики 7
Структура и краткое содержание диссертационной работы 13
Глава I. Математическая модель распространения внешних воздействий по системе 16
1.1. Надежность, живучесть, стойкость 17
1.2. Распространение импульсных воздействий 24
1.3. Структурные параметры стойкости системы 33
1.4. Контуры обратной связи 46
1.5. Алгоритм повышения стойкости системы 56
1.6. Исследование стойкости технической системы 57
1.7. Моделирование региональной социально-экономической системы в условиях внешних воздействий 59
1.8. Экспериментальное программное обеспечение для исследования сложных систем в условиях внешних воздействий 64
1.9. Выводы 65
Глава II. Синтез и анализ сложных структур большой размерности .. 68
2.1. Моделирование “тесных миров” 68
2.2. Фрактальные и предфрактальные графы 70
2.3. О некоторых топологических и метрических характеристиках сложных структур 75
2.4. Связность 76
2.5. Структурный хаос и число всех предфрактальных графов одного ранга 94
Глава III. Параллельные алгоритмы на предфрактальных графах 97
3.1. Параллельные алгоритмы на графах 97
3.2. Параллельный алгоритм поиск кратчайшего пути 98

3.3. Параллельный алгоритм поиска остовного дерева минимального веса 104
3.4. Параллельный алгоритм поиска совершенного паросочетания 109
Основные результатаы диссертации 113
Литература 114

Введение

Математическое моделирование и иерархия упрощенных моделей

Моделирование – это один из важнейших методов научного познания, с помощью которого создается модель объекта исследования. Под термином “модель” [1–5] понимают реальный или идеальный объект, изучение которого позволяет получить новые знания о моделируемой системе, возможно, облегчить прогноз поведения или управления последней. Среди всего множества моделей особое место занимают *математические модели*. Ключом к успешному решению содержательной задачи является, прежде всего, адекватность математического описания изучаемых явлений и процессов, отражение в модели наиболее важных причинно-следственных связей, характерных для моделируемого объекта. Математическое моделирование связанно с введением абстрактных математических характеристик изучаемого процесса и записью строгих соотношений между этими характеристиками, которые являются “оформлением” интуитивных, почерпнутых из опыта, наблюдения, здравого смысла данных [6–12]. Математическая модель поэтому – всегда схема, упрощение, огрубление реальности. Сущность математических методов изучения реальных процессов – выявление однозначно трактуемых соотношений между характеристиками процесса, которые позволяют выводить из них формальные следствия, свойства, предсказывать развитие процесса. Цена, которую за это приходится платить, – огрубление процесса, его схематизация.

На следующем этапе, предсказания, сделанные на основе моделирования сопоставляются с результатами экспериментов или наблюдений. Затем модель вновь и вновь уточняется до тех пор пока точность ее предсказаний не станет удовлетворительной. Но практика показывает, что модели, получаемые на различных этапах уточнения и детализации, имеют свои собственные “диапазоны применимости”.

Работа над крупными проектами в таких областях как вычислительная физика плазмы, гидродинамика, расчет атомных электростанций, широкомасштабный анализ экологических процессов позволила сформулировать концепцию *иерархии упрощенных моделей*.

В эпоху становления вычислительного эксперимента казалось, что изучение сложной системы аналогично складыванию мозаичной картины. Например, при изучении биосферы, одной группе исследователей можно поручить строить модели атмосферы, другой – океана, третьей – биоценоза тундры. Затем эти куски-блоки складываются и получается, по замыслу, “прекрасная” модель. Провал нескольких крупных проектов такого рода показал, что так поступать нельзя. Обычно получаются результаты, интерпретация которых не ясна, зачастую результаты не удовлетворительны, но в любом случае не удается продвинуться в понимании исследуемых процессов.

Поэтому приходится действовать иначе. Вначале выделяются основные ключевые процессы, играющие главную роль в изучаемом явлении на данных пространственных и временных масштабах. Затем строится еще более простая модель явления с меньшей областью применимости и учитывающая еще меньшее количество факторов. И так происходит до тех пор, пока не возникнет модель, поведение которой уже понятно. Только после того как модель нижнего уровня изучена и понята, удается перейти на следующий, более высокий уровень.

Можно сказать, что основным достижением и основной целью исследований при решении сложных задач является построение *иерархии упрощенных моделей*. При этом должно быть установлено, какой уровень модели разумно использовать в тех или иных случаях. Пока почти все построенные иерархии относятся к физическим системам. Идет строительство иерархий в ряде областей химии и математической экономики. Эта проблема ставится в биологии.

Замечательной чертой иерархии упрощенных моделей является наличие *базовых математических моделей*, т.е. таких математических объектов, исследование которых позволяет эффективно строить и изучать большие классы моделей различных явлений. Важно подчеркнуть два принципиальных факта, выяснившихся в последние двадцать лет.

Во-первых, базовых математических моделей немного. Можно строить предельно простые нелинейные математические модели, которые являются глубокими и содержательными.

Во-вторых, с их помощью, не проходя все ступени иерархии, связанные с детализацией и усложнением математического описания, оказалось возможным предсказывать неизвестные явления природы.

Мягкое моделирование и нелинейные явления

В последнее время все бóльшее внимание уделяется направлению исследований, часто называемому *мягким моделированием* [13]. В гидродинамике, квантовой механике, теории упругости известны законы, определяющие ход изучаемых процессов. И задача сводится к получению конкретных частных следствий из общих законов. В психологии [14–16], социологии [17, 18], истории [19–21] и многих других областях попытки поиска эффективного математического описания только начаты. Здесь часто важно проверить те или иные гипотезы. Поэтому обычно основное внимание обращается на качественные эффекты. Модели могут выступать как простейшие объекты, демонстрирующие желаемое к*ачественное поведение*. С этим, например, связано широкое использование моделей теории катастроф [22], динамических систем на плоскости, одномерных отображений [23] при описании различных явлений в экономике, медицине, при анализе природных и техногенных катастроф.

Кроме того, известные нелинейные модели, появившиеся в одной области, иногда могут использоваться в качестве своеобразных "строи-

тельных" блоков при построении математических моделей в других дисциплинах.

Приведем характерный пример. Одним из важнейших экспериментальных достижений в науке XX в. стало открытие Б.П. Белоусовым колебательных химических реакций [24]. Это привело к построению соответствующих математических моделей. Позже было показано, что эти модели при небольшой модификации позволяют описывать эпидемии ряда заболеваний.

Недавно А.Ю. Андреев и М.И. Левандовский предложили использовать близкую систему для описания забастовочного движения в России в начале XX века. Их модель имеет вид:

$$\dot{X} = m(N - X) - bXZ,$$
$$\dot{Y} = bXZ - (m + a)Y,$$
$$\dot{Z} = aY - (m + g)Z,$$
$$\dot{W} = gZ - mW,$$

где N – общее число рабочих, X – число рабочих еще не воспринявших информацию о забастовке, Y – рабочие, ставшие агитаторами, W – рабочие, отказавшиеся от стачечной борьбы после одной из забастовок.

Оказалось, что эта модель удовлетворительное описание стачечного движения во Владимирской губернии в период с 1895 по 1905 гг. Модель, родившаяся в одной области, оказалась достаточно универсальной. Такая ситуация – не редкость в мягком моделировании.

Три парадигмы синергетики

Необходимость исследовать открытые нелинейные, далекие от равновесия системы во многих областях физики, техники, химии, экономики, экологии привела к развитию *междисциплинарных подходов.* Один из наиболее успешных междисциплинарных подходов – *синергетика* [26–31]. В основе современной синергетики лежат три парадигмы – появившиеся

друг за другом, *парадигма диссипативных структур, парадигма динамического хаоса и парадигма сложности*.

Парадигма диссипативных структур

Во многих гидродинамических системах ключевое значение имеет наличие в них диссипативных процессов (вязкости, диффузии, теплопроводности). Они позволяют исследуемым системам “забыть” начальные данные и независимо от их “деталей” сформировать с течением времени одни и те же или похожие *пространственно-временные структуры*. Иными словами, немного (а иногда и сильно) изменив начальный профиль (начальные данные в соответствующей задаче математической физики), в конце концов мы получаем одно и то же стационарное распределение переменных в пространстве. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, такие структуры, с легкой руки И.Р. Пригожина, стали называть *диссипативными структурами* [32]. В основе большинства исследований научной школы И.Р. Пригожина лежали системы параболических уравнений типа реакция-диффузия

$$u_t = D_1 u_{xx} + f(u,v),$$
$$v_t = D_2 v_{xx} + g(u,v),$$
$$0 \le x \le l,\ u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x),\ u_x, v_x\big|_{x=0,l} = 0.$$

Если говорить о парадигме диссипативных структур как о подходе к анализу спонтанного возникновения упорядоченности в нелинейных средах, т.е. о *самоорганизации*, то следует сказать и о научной школе член-корреспондента РАН С.П. Курдюмова. Научная школа С.П. Курдюмова сформировалась в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, в МГУ им. М.В. Ломоносова, в Московском физико-техническом институте в 80-е годы прошлого столетия. Усилия участников этой научной школы были вложены в построение качественной теории нелинейного

уравнения теплопроводности с объемным источником, так называемой *модели тепловых структур* [4,5,33,34]

$$T_t = \mathrm{div}(k(T)\,\mathrm{grad}\,T) + Q(T).$$

Качественная теория, отражающая в основном эффекты, понятые с помощью компьютерного моделирования, потребовала новых математических идей, существенно опирающихся на то, что мы имеем дело с одной переменной T, а не с их набором. В отличии от стационарных диссипативных структур, которые изучались в брюссельской школе под руководством И.Р. Пригожина, в научной школе С.П. Курдюмова исследовались нестационарные диссипативные структуры, развивающиеся в *режиме с обострением*. Под режимом с обострением понимают такие законы изменения параметров исследуемой системы, когда одна или несколько описывающих ее величин неограниченно возрастает за ограниченное время. В научной школе С.П. Курдюмова было открыто явление *локализации тепла*, обнаружены и исследованы так называемые *собственные функции нелинейной среды*, описывающие, как правило, волны горения, сохраняющие в процессе эволюции свою форму. Они описываются автомодельным решениями исходного нелинейного уравнения теплопроводности, которое имеет вид $T = g(t)\,f(x/\varphi(t))$, где функция $g(t)$ задает закон роста амплитуды, возникающей диссипативной структуры, $\varphi(t)$ – закон изменения ее полуширины, а функция f – форму [33].

Парадигма динамического хаоса

В 1963 году – американский метеоролог Эдвард Лоренц предложил простейшую модель, описывающую конвекцию воздуха (она играет важную роль в динамике атмосферы). Целью этой работы был ответ на вопрос: почему стремительное совершенствование компьютеров, математических моделей и вычислительных алгоритмов не привело к созданию ме-

тодики получения достоверных среднесрочных (на 2-3 недели вперед) прогнозов погоды.

Эта модель описывается внешне очень простыми уравнениями [35]

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma(x + y) \\ \dot{y} = -xz + rx - y, \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

где переменная x характеризует поле скоростей, y и z – поле температур жидкости. Здесь $r = R/R_c$, где R – число Рэлея, а R_c – его критическое значение; σ – число Прандтля; b – постоянная, связанная с геометрией задачи.

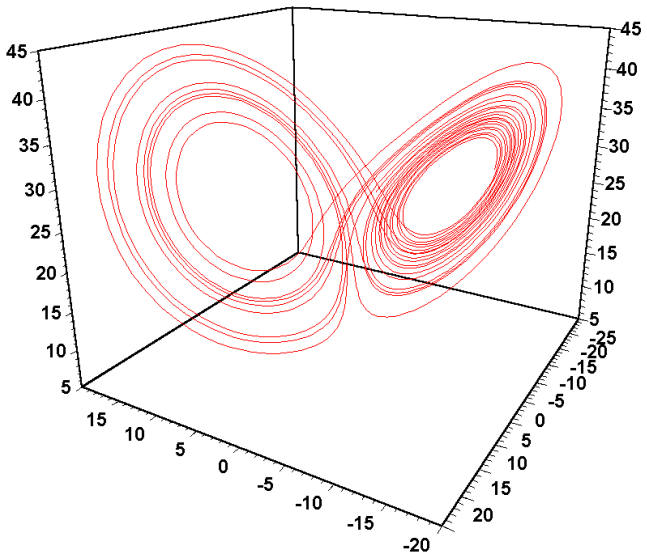


***Рис* 1.** Аттрактор Лоренца

Такая картина, полученная на компьютере (расчет проводился при r=28, σ=10, b=8/3), убедила Э. Лоренца, что он открыл новое явление – динамический хаос. Этот клубок траекторий, называемый сейчас аттрактором Лоренца, описывает непериодическое движение с конечным горизонтом прогноза.

Компьютерный анализ системы Лоренца привел к принципиальному результату. Им был открыт – *динамический хаос*, т.е. непериодическое движение в *детерминированных системах* (то есть в таких, где будущее однозначно определяется прошлым), имеющее конечный горизонт прогноза.

Увиденное Лоренцем показано на рис. 1. С точки зрения математики, можно считать, что любая динамическая система, что бы она ни моделировала, описывает движение точки в фазовом пространстве. Важнейшая характеристика этого пространства – его *размерность*, или, попросту говоря, количество чисел, которые необходимо задать для определения состояния

системы. С математической и компьютерной точек зрения не так уж и важно, что это за числа – количество рысей и зайцев на определенной территории, переменные, описывающие солнечную активность или кардиограмму, или процент избирателей, поддерживающих определенного кандидата. Если считать, что точка, двигаясь в фазовом пространстве, оставляет за собой след, то динамическому хаосу будет соответствовать клубок траекторий. Например такой, как показан на рис. 1. Здесь размерность фазового пространства всего 3 (это пространство x, y, z). Замечательно, что такие удивительные объекты существуют даже в трехмерном пространстве. Для установившихся колебаний, соответствующих динамическому хаосу, Д. Рюэль и Ф. Такенс в 1971 году предложили название – *странный аттрактор*.

Пророчество Анри Пуанкаре о том, что в будущем можно будет предсказывать новые физические явления, исходя из общей математической структуры описывающих эти явления уравнений, компьютерные эксперименты превратили в реальность.

Система Лоренца имеет *конечный горизонт прогноза*. Почему? Можно пояснить это следующим образом. Если мы вновь возьмем две близкие траектории, показанные на 1, то они расходятся. Одна уходит от второй. Скорость расходимости определяется так называемым *ляпуновским показателем*, и от этой величины зависит интервал времени, на который может быть дан прогноз. Можно сказать, что для каждой системы есть свой *горизонт прогноза*.

Парадигма сложности

В русском языке термин “сложность” имеет двоякий смысл. С одной стороны, его можно понимать как сложность устройства (complication, compound), т.е. как наличие в некоторой системе большого числа элементов и/или нетривиальных связей между ними. А с другой стороны, речь может идти о сложности внешних проявлений системы (complexity) безот-

носительно ее внутреннего устройства, т.е. о нетривиальном поведении. Эти две “сложности” во многом взаимосвязаны, но не эквивалентны.

Хотя строгого и общего определения сложности не существует, опыт развития синергетики и изучения конкретных систем, интуитивно определяемых нами как сложные, позволяет высказать некоторые общие соображения о свойствах любой сложной системы на разных уровнях описания.

Системы с простой структурой, к примеру – иерархической, могут демонстрировать очень сложное нетривиальное поведение [37].

Многие системы обладают простой иерархической структурой, фрагмент которой изображен на рис. 2. Например, литосферу Земли можно представить как систему блоков, разделенных разломами. Каждый из этих блоков делится на более мелкие, те, в свою очередь, на еще более мелкие и т.д. Геофизики выделяют более 30 иерархических уровней в земной коре от тектонических плит протяженностью в тысячи километров до зерен горных пород миллиметрового размера. Большие землетрясения обычно сопровождаются многочисленными повторными толчками – *афтершоками*, которые каскадом перераспределяют напряжение вниз по иерархии разломов. А подготовка землетрясения происходит посредством *обратного каскада* передачи напряжения, восходящего с нижних уровней иерархии к верхним.

Напрашивающимся примером иерархической системы, связанной с деятельностью человека, служит система административного или военного руководства. Успех в решении задач на некотором уровне управления определяется эффективностью функционирования нижележащих уровней.

Иерархической системой является и электорат. Он также делится на несколько групп со своими интересами. Каждая из них складывается из более мелких подгрупп и т.д. – вплоть до отдельного избирателя.

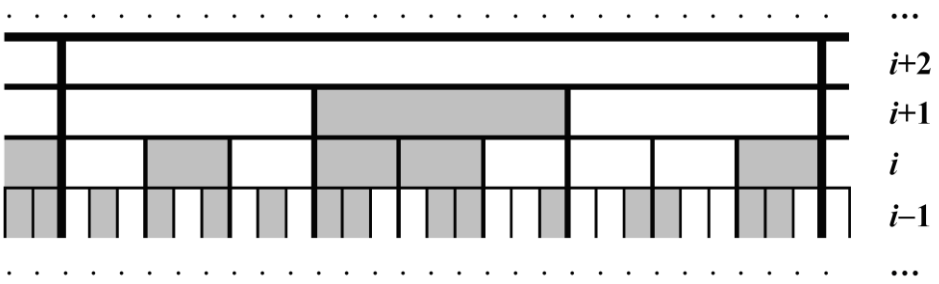


***Рис.* 2.** Фрагмент иерархической системы

Каждый элемент i-го уровня состоит из трех элементов (i–1)-ого уровня. Элементы системы могут быть исправны или дефектны (показаны заливкой). Состояние каждого элемента определяется состоянием образующих его элементов предыдущего уровня, а также его собственной восприимчивостью к дефектам.

Мы можем наблюдать поведение иерархических систем только на верхних уровнях иерархии (землетрясения, исполнение распоряжений, результаты голосования). Однако причины событий лежат на нижних уровнях, и важно представлять, как происходит взаимодействие уровней.

Но, как говорилось ранее, сложное поведение системы может наблюдаться и при простых процессах протекающих в ней. В такой ситуации сложность в системе обосновывается сложностью структуры системы. Именно такой сложности и посвящена настоящая диссертационная работа.

Структура и краткое содержание диссертационной работы

На протяжении последних пятнадцати лет в Институте прикладной им. М.В. Келдыша РАН по инициативе МЧС России совместно с другими академическими институтами проводились исследования, которые легли в основу концепции управления рисками. Особое внимание в новой концепции уделяется подходам и методам, распространенным в нелинейной динамике.

Одно из центральных мест в исследованиях по управлению рисками занимает анализ кризисов, то есть ситуаций, когда система оказывается не в состоянии в полном объеме выполнять возложенные на нее функции.

Системы (технические, социально-экономические и т.п.), рассматриваемые в теории управления риском, могут быть подвержены внешнему влиянию (воздействию) на протяжении небольшого промежутка времени. Нередко такие воздействия являются внезапными и интенсивными, а поэтому рассматриваемые системы не всегда могут “противостоять” этим поражающим факторам. Поражающие воздействия, приложенные к системе, могут приводить к ухудшению ее функционирования, а порой и к кризисам.

Классическая теория надежности не предоставляет необходимых инструментов для исследования (оценки состояния системы в целом, прогнозирования поведения системы под влиянием поражающих факторов, методов повышения или сохранения сопротивляемости систем, функционирующих в условиях поражающих воздействий, и т.д.) качества функционирования сложных систем в “зоне форс-мажорных обстоятельств”. Пребывание систем именно в этой зоне приводит к необходимости разработки соответствующих математических моделей.

Следует также отметить, что исследование систем со сложной структурой в классической теории надежности сводится во многом к изучению систем со структурами в виде последовательно-параллельных схем, что также сказывается отрицательным образом на качестве проводимого исследования.

Живучесть системы, ее способность функционировать в условиях внешних поражающих воздействий будем называть *стойкостью* системы. С введением этого понятия очерчивается новая задача в рамках теории управления рисками – *обеспечение стойкости сложных систем.*

Важнейшую роль в формальном представлении сложных систем играет ее структура – порядок межэлементных связей системы. Это наглядно подтверждает цикл работ научной школы профессора В.В. Кульбы , посвященный управлению риском. В работах этой научной школы для моделирования поведения систем со сложной структурой используются методы

теории взвешенных ориентированных графов. Такой подход уже позволил обнаружить ряд синергетических эффектов в поведении систем со сложной структурой. Несомненно, от структуры системы зависит ее стойкость. Важно знать также, какие изменения в структуре системы приведут к улучшению или ухудшению функционирования рассматриваемого объекта.

Все исследования, проведенные в настоящей работе, используют методы и подходы дискретной математики и теории графов, в частности. Аппарат теории графов наилучшим образом подходит для формального представления задач, связанных с изменением и преобразованием дискретных объектов, какими являются структуры систем.

Кроме того, в работе используются методы когнитивного моделирования, связанные с анализом динамики нелинейных процессов, развивающихся на ориентированных графах. Используются методы нелинейной динамики, теории вероятности, имитационного моделирования и теории фракталов.

Диссертация состоит из введения и трех глав, изложенных на 118 страницах, содержит 23 рисунка и библиографию из 102 наименований.

В первой главе представлен *теоретико-графовый подход к описанию сложных систем в условиях форс-мажорных обстоятельств* и *построена модель распространения поражающих воздействий по системе* в рамках этого подхода. Предложенная модель апробирована на ряде сложных систем.

Во второй главе даются оценки различных “мерам стойкости” и исследуется явление *структурного хаоса*.

Третья глава посвящена проблеме разработки параллельных алгоритмов решения теоретико-графовых задач.

Глава I. Математическая модель распространения внешних воздействий по системе

Современные технические объекты представляют собой сложные системы, состоящие из множества взаимодействующих друг с другом разнородных элементов, число которых может достигать десятков тысяч. Вместе с тем требования по эффективности функционирования и качеству производимых изделий ужесточаются. Во многом это связано с риском возникновения опасностей, аварий и катастроф при эксплуатации технических систем.

Моделирование сложных систем позволяет исследовать особенности их функционирования в различных условиях, наделять их требуемыми характеристиками и снижать риск возникновения *чрезвычайных ситуаций* (*ЧС*). Закономерен вопрос – возможно ли в построенный математической модели сложной системы учесть каждый из ее многочисленных элементов.

Рассмотрим проблему с точки зрения теории самоорганизации – синергетики [26], и теории управления рисками [38]. В математической модели исследуемой системы должны быть представлены основные элементы, по поведению, по качеству, по эффективности функционирования которых можно достоверно судить о всей системе. В терминах синергетики это параметры порядка моделируемого объекта. Такой подход в исследованиях, без детального представления сложных систем, процессов и явлений в них протекающих, принято называть *системным синтезом* [39]. О результативности использования этого подхода можно судить по многим работам [39–42].

В настоящей работе этот подход реализован в виде вероятностно-детерминистической модели, описывающей распространение внешних воздействий (различного характера) среди элементов исследуемой систе-

мы. В основе модели лежат формализации структуры системы в виде графа и внешнего негативного влияния на систему в виде импульсного воздействия. Такое представление системы, находящейся в условиях внешних воздействий, позволяет построить *иерархию упрощенных моделей* [42], т.е. рассмотреть различные виды внешних воздействий на систему при различных критериях ее неработоспособности (выход из строя ряда элементов системы, достижение элементами системы предельного состояния и т.д.).

Для каждой модели из иерархии упрощенных моделей конкретного сложного явления (в том числе и системы, находящейся под влиянием внешних воздействий) четко определяется область ее применимости, там где модель наиболее эффективна и полезна. Замечательной чертой иерархии упрощенных моделей является наличие *базовых математических моделей* [43], т.е. таких математических объектов, исследование которых позволяет эффективно строить и изучать большие классы моделей различных по своей природе явлений. Отметим, что такой подход особенно полезен, а, следовательно, и предпочтителен при построении моделей сложных систем.

1.1. Надежность, живучесть, стойкость

Под *системой* в кибернетике [44,45] принято понимать объединение любых элементов, рассматриваемых как связное целое. Каждый элемент системы производит определенные действия, что позволяет всей системе выполнять возложенные на нее функции. Особое значение для системы имеет *порядок связей* ее элементов, т.е. порядок взаимодействия элементов системы при ее функционировании. Факт непосредственного (без посредников) взаимодействия между двумя элементами системы и определяет наличие *связи* между ними. Общую картину связей между всеми элементами системы отражает *структура системы*. Опыт исследования многих сложных систем показывает, что на начальном этапе анализа элементы

системы целесообразно представлять в виде вершин графа [41,44], наделенных определенными свойствами, а взаимодействие описывать с помощью ребер.

С точки зрения концепции безопасности [46], всякую сложную техническую систему следует изучать с трех основных позиций: *надежности системы*, *живучести системы*, и ее *безопасности*. Каждая из этих позиций по-разному описывает связь и взаимодействие системы с окружающей ее средой. Исследование перечисленных свойств системы позволяет уменьшить риск возникновения чрезвычайных ситуаций (ЧС), возникающих в результате бедствий, аварий и катастроф.

С позиции классических моделей теории надежности система изучается изолированно от окружающей среды: ни система не подвергается воздействиям внешней среды, ни сама окружающая среда не испытывает на себе воздействий со стороны системы.

Надежность [47–53] – свойство системы сохранять в течение определенного промежутка времени значение параметров, характеризующих функционирование системы. Надежность – это комплексное свойство системы, зависящее от ее безотказности, ремонтопригодности, долговечности и т.д.

Теория надежности использует аппарат теории вероятностей и математической статистики. Как правило, для оценки возможности возникновения опасного для окружающей среды состояния системы используется дерево событий (отказов). *Дерево событий* (*отказов*) – это диаграммное представления всех событий (отказов), последовательное и/или совместное появление которых в системе приводит к некоторому главному событию (возможно, потенциально опасному происшествию). Зная вероятности появления тех или иных событий (отказов), можно подсчитать возможность возникновения главного события (опасного происшествия). В зависимости от задачи и традиций той или иной области, главным событием называют

либо отказ системы (выход из строя), либо адекватную реакцию на воздействие.

В сложных мно-гоэлементных системах к потенциально опасному происшествию могут привести последовательные и/или совместные отказы различных элементов системы. Поэтому для повышения надежности элементов (вероятности безотказной работы) системы, и как следствие, надежности самой системы, используются различные методы резервирования [47–53]. На рис. 1.1, изображенная в виде графа G, показана коммуникационная сеть некоторой системы управления. Сеть должна обеспечивать прохождение информационного сигнала от элемента v_1 системы до элемента v_3. Событие обратное этому является главным для построенного на рис. 1.1 дерева отказов D. Использование резервного соединения (см. рис. 1.1) в коммуникационной сети увеличивает надежность функционирования всей системы.

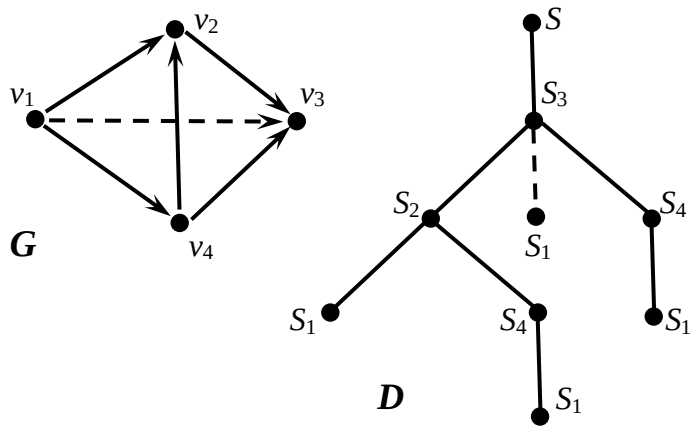


***Рис.* 1.1.** Двухполюсный граф G и дерево отказов D

Вершины v_1 и v_3 – полюсные вершины. На вершину v_1 подается сигнал, который должен достичь вершины v_3. Главное событие S – непрохождение сигнала от вершины v_1 до вершины v_3. Промежуточные события S_i, i={1,2,3,4}, – непрохождение сигнала до вершины v_i. Пунктиром изображены резервное соединение (на графе G) и соответствующее ему событие (на дереве D). Считая надежность (вероятность безотказной работы в течение некоторого промежутка времени) для всех вершин графа равными 0.9 получаем, что надежность функционирования коммуникационной сети в виде графа G без резервного соединения равна $P(\bar{S})=1-(1-P(S_3S_4S_1))(1-P(S_3S_2S_1))(1-P(S_3S_2S_4S_1))=$ $=1-(1-0.9^3)(1-0.9^3)(1-0.9^4)\approx 0.975$, с резервным – $P(\bar{S})=$ $=1-(1-P(S_3S_4S_1))(1-P(S_3S_2S_1))(1-P(S_3S_2S_4S_1))(1-P(S_3S_1))=$ $=1-(1-0.9^3)(1-0.9^3)(1-0.9^4)(1-0.9^2)\approx 0.995$. Событие $\bar{S}$ – событие противоположное событию S, т.е. $\bar{S}$ – функционирование коммуникационной сети G.

Для коммуникационной сети (как и для других сложных систем, представляемых в виде графов) численный расчет ее надежности может

оказаться задачей требующей значительных временных ресурсов. По сути, построение дерева отказов для коммуникационной сети сводится к простому перебору всех возможных вариантов недостижения информационного сигнала от одной полюсной вершины до другой. Если n-вершинный граф коммуникационной сети является полным (когда существует двусторонняя связь между любой парой вершин графа), то число только n-вершинных путей между полюсными вершинами будет равно $n!$. Поэтому временная трудоемкость перебора всевозможных отказов системы, а значит и построения дерева отказов, будет зависит экспоненциально $O(2^n)$ от числа n элементов системы. То есть при $n = 1000$, операций потребуется больше, чем атомов во вселенной. Это недостижимо в компьютерных расчетах. В то же время в современном автомобиле более 10 тыс. деталей, каждая из которых имеет свою вероятность отказа, а в самолете более 100 тыс. деталей. Все это является весомым доводом в пользу применения методов системного синтеза.

Увеличение надежности функционирования систем ведет к снижению риска возникновения ЧС (т.е. опасного для окружающей среды состояния системы).

Живучесть – свойство системы, характеризующее ее способность функционировать под влиянием внешних воздействий (нагрузок), возбуждаемых в окружающей систему среде.

Изучение живучести систем возможно с помощью вероятностных моделей, в рамках современной математической теории надежности [47–53], и детерминистическими, в рамках механики катастроф [46].

Вероятностную модель описывающую живучесть системы называют “нагрузка – прочность” (“нагрузка – несущая способность”, “нагрузка – сопротивляемость”, прочностная модель) [47]. Под действием внешней нагрузки прочность системы постепенно уменьшается до тех пор, пока система не выйдет из строя. Внешние нагрузки описываются случайной вели-

чиной (функцией), и как правило, не приводят к скачкообразному изменению прочности системы.

Детерминистическая модель живучести системы лежит в основе механики катастроф [46]. Объектом исследования механики катастроф являются системы, испытывающие постоянные внешние воздействия (нагрузки). Простым примером таких систем служат инженерные конструкции. В рамках механики катастроф исследуются процессы накопления повреждений, достижения предельного (критического) состояния, реакции элементов конструкций на внешние воздействия и т.д.

Особое место в механике катастроф занимает изучение процесса *закритического поведения* элементов конструкций (систем), которое и приводит к тем или иным нежелательным событиям (авариям, катастрофам и т.д.). Элементы конструкций (систем) в своей закритической области выходят из строя, оказывают влияние на другие элементы системы, порождая тем самым внутренние для самой конструкции (системы) негативные воздействия. Внешние и внутренние воздействия приводят к последовательности отказов элементов системы, инициирующей переход системы в аварийное состояние (ЧС).

Понятие живучести широко используется и при исследовании систем со сложной структурой, таких как коммуникационные сети систем управления и систем энергетики [54]. Нарушение функционирования этих систем возможно при нарушении *связности* их структур. Система не может выполнять свои функции, когда не существует взаимодействия между всеми или, по крайней мере, жизненно важными элементами. “*Мерой живучести*” в этом случае служит минимальное число элементов системы (*вершинная связность* [54,55]) или связей (*реберная связность* [54,55]), выход из строя которых под влиянием внешних воздействий приводит к нарушению связности структуры системы. Для коммуникационной сети (графа G) на рис. 1.1 без резервного соединения реберная связность равна 2, вер-

шинная – 1. При использовании резервного соединения реберная связность возрастает до 3, а вершинная остается равной 1.

Внешние воздействия делят на воздействия природного [46] и техногенного [46] характера. Ко вторым относятся и воздействия, вызываемые умышленными действиями человека. Во многих случаях, при создании сложных технических систем, сейчас приходится принимать во внимание и возможность террористических актов. В зависимости от интенсивности и мощности оказываемых на систему воздействий рассматриваются нормативные (проектные) и экстремальные (сверхнормативные) нагрузки. В первом случае изучается живучесть системы в штатных (нормальных) условиях функционирования, когда переход в аварийное состояние возможен при длительном накоплении системой повреждений и достижения предельного (критического) состояния. (Подобное поведение систем описывается и методами самоорганизованной критичности [38,40].) Во втором случае изучается живучесть системы, когда возможен относительно быстрый переход в аварийное состояние – форс-мажорные обстоятельства.

Механика катастроф занимается не столько изучением воздействий различного рода, сколько созданием аппарата перехода от воздействий к расчетным действующим нагрузкам.

Живучесть и надежность систем являются теми характеристиками, которые позволяют оценить риск возникновения чрезвычайных ситуаций

***Рис.* 1.2.** Схема развития чрезвычайных ситуаций

при эксплуатации сложных технических систем. Используя эти критерии, возможно обеспечение безопасности систем при чрезвычайных ситуациях, или наделение системы необходимы качественными характеристиками, не

допускающими возникновения чрезвычайных ситуаций. В схеме на рис. 2 надежность и живучесть описывают переход от первого этапа ко второму. Живучесть системы предполагает тщательное описание поведения систем (в отличие от надежности), при имеющихся внешних воздействиях на систему как в докритической области (до ЧС), так и в закритической (при развитии ЧС), когда система функционирует, достигнув предельного состояния. Третий этап предполагает изучение возможных последствий ЧС на окружающую систему среду и лежит в области обеспечения *безопасности* систем [46].

Согласно схеме, представленной на рис. 1.2, безопасность системы можно обеспечить различными способами: не допустить развитие ЧС в системе, не допустить выхода ЧС за пределы системы, и свести к возможному минимуму влияния аварий на окружающую систему среду.

Напомним, *структура системы* [56] отражает общую картину причинно-следственных взаимодействий элементов системы. Во многих случаях сложность системы определяется сложностью ее структуры. Для подобных технических систем исследование инициирования ЧС (I этап схемы, представленной на рис. 1.2) внешними воздействиями имеет особое значение. Важно представлять, как от структуры системы зависит достижение системой предельного состояния (критического уровня), за чертой которого риск возникновения ЧС резко возрастает.

В рамках модели, предлагаемой в настоящей работе, сложная техническая система считается подвергнутой влиянию внешних воздействий. Это соответствует попаданию системы в зону “форс-мажорных обстоятельств”, т.е. под влияние ненормативных, непредусмотренных при проектировании системы, экстремальных нагрузок, имеющих также внезапный характер. В основе модели лежит формально представленная структура системы, что позволяет детально воспроизвести все возможные варианты распространения внешних воздействий по элементам системы. Модель при

заданных нагрузках на некоторое множество элементов системы, вызываемых различными внешними воздействиями, определяет темп и сроки достижения системой предельного состояния.

Стойкостью [57,58] системы назовем ее способность противостоять внешним воздействиям и функционировать в штатном режиме на этапе инициирования ЧС, т.е. в докритической области функционирования системы. Другими словами, *стойкость – это живучесть системы в докритической области функционирования, под влиянием внешних ненормативных воздействий (нагрузок).* Поэтому основной характеристикой стойкости системы будет служить время достижения системой предельного состояния. Увеличение этого промежутка времени будет способствовать уменьшению риска развития ЧС в системе и обеспечению ее безопасности.

1.2. Распространение импульсных воздействий

1.2.1. Надежность – как показатель качественного состояния элемента системы

Существуют различные виды внешних воздействий, оказывающих влияние на систему. Воздействия могут быть – механические, термические, электромагнитные, биохимические, радиационные, гидродинамические и т.д. (Как правило, основными считают первые три из перечисленных.) Всякое воздействие вызывает повышение нагрузки на те или иные элементы системы. Повышение нагрузки на отдельно взятый элемент системы отражается на возможности этого элемента выполнять свои функции.

Установление связи между нагрузками $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_n}$, вызываемыми воздействиями различного рода, как уже отмечалось, является одной из важных задач механики катастроф. Установление такой связи позволяет ввести функционал

$$\zeta = \Phi(\sigma_{i_1}(t), \sigma_{i_2}(t), \ldots, \sigma_{i_n}(t)), \tag{1.1}$$

задающий зависимость *показателя качественного состояния* ζ некоторого элемента системы от нагрузок $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, ..., \sigma_{i_n}$, вызванных внешними воздействиями в момент времени t.

Для механических систем, все элементы которых являются механическими, функционал (1.1) имеет вид

$$\zeta_M = \Phi(\sigma_D(t), \sigma_N(t)),$$

где как показатель качественного состояния ζ_M элементов системы выступают повреждения, накопленные элементом к моменту времени t. Деформация σ_D и напряжение σ_N, возникающие у элемента системы, служат количественными представлениями полученных при внешних воздействиях нагрузок и поражений.

Как показывает практика, сложные системы состоят из взаимодействующих элементов различной природы (механической, радиоэлектронной и т.д.). Поэтому не для всех сложных систем удается точно воспроизвести функционал (1.1), в левой части которого как показатель качественного состояния элемента системы выступают накопленные за время внешнего поражающего воздействия повреждения. В такой ситуации как показатель качественного состояния элемента разумно использовать его *надежность*. Количественной мерой надежности может служить вероятность p выхода элемента из строя за единицу времени или, что тоже самое, время $\overline{T}$, за которое с заданной вероятностью $\overline{p}$ элемент также выйдет из строя. Надежность элемента уменьшается при получении им повреждений, вызванных внешними воздействиями.

Функционирование системы предполагает постоянное взаимодействие образующих его элементов. Поэтому внешние воздействия, причинив повреждения одним элементам системы, окажут влияние на показатели качественного состояния (надежности) и элементов, не подвергнувшихся влиянию этого воздействия непосредственно. Т.е. повышение нагрузки бу-

дет наблюдаться не только у тех элементов системы, которые оказались под влиянием внешних воздействий, но и у элементов, взаимодействующих (связанных) с ними. Это приведет к понижению надежности у последних. Надо отметить, что речь идет только о нагрузках, которые не являются нормативными, т.е. учитываемыми при проектировании и эксплуатации системы. Нормативные нагрузки не должны приводить к повреждениям, резко ухудшающим надежность элементов системы. Кратковременные и мощные внешние (далее – *импульсные*) воздействия мгновенно и в значительной степени могут уменьшать показатели надежности отдельных элементов и всей системы в целом, при этом система в состоянии сохранить свою работоспособность.

Надо отметить, что для одних систем, таких как системы вооружений и военная техника, форс-мажорные обстоятельства, формализуемые в настоящей работе в виде импульсных воздействий, являются “нормальными” условиями эксплуатации. Подобные системы должны быть подготовлены для пребывания в условиях форс-мажорных обстоятельств длительное (или достаточное для достижения поставленных целей) время. Для других систем, таких как социально-экономические, биологические и т.п., несмотря на то, что времена их пребывания в условиях форс-мажорных обстоятельств очень малы, важно знать их реакцию на импульсные воздействия, поскольку они могут оказаться губительными для систем.

1.2.2 Математическая модель распространения воздействий по системе

Как показывает практика, внешнее поражающее воздействие на один из элементов системы обязательно отразится некоторым образом на показателях надежности элементов и всей системы. Это происходит даже в том случае, когда ни элемент, непосредственно получивший поражающий импульс воздействия, ни сама система не потеряли работоспособности. Воз-

можны случаи, когда, с течением времени, помимо элемента получившего воздействия “напрямую”, из строя выходят и элементы системы, не получавшие непосредственного воздействия. Структура многих технических систем, в том числе и военных, представляет собой “жесткую” конструкцию, что позволяет внешнему воздействию, в виде импульса, распространяться по структуре системы. При этом импульс воздействия, уменьшает как показатели надежности отдельных элементов системы, так и всей системы в целом. Для формального отражения этой ситуации можно использовать аппарат дискретной математики и теорию графов, в частности.

Следуя известным подходам к повышению надежности систем и их элементов, не представляется возможным продублировать все элементы системы, предполагающей попадание под внешнее влияние. Поэтому требуется изучить реакцию системы на “стороннее” влияние, найти наиболее уязвимые “места” системы и рекомендовать их к резервированию. Для достижения этой цели важно подобрать точный метод формального представления системы, внешнего воздействия и определить динамику распространения внешнего влияния по системе.

Будем считать тождественными следующие понятия: *граф системы и структура системы, вершина графа и элемент системы, ребро графа и связь между элементами системы*.

Для всякого конечного графа будем использовать обозначение – $G=(V,E)$, где $V=\{v_i\}, i=\overline{1,n}$ – множество вершин, а $E=\{e=(v,u)\}$ – множество его ребер [59].

Распространение воздействия от одного элемента системы к другому, на графе системы будем задавать *ориентированным ребром* – ребром с определенными началом и концом. Ориентированное ребро часто называют *дугой*, а граф с дугами – *орграфом* [59]. Орграф структуры моделируемой системы не будет иметь петель (т.е. дуг, конец и начало которых сов-

падает).

Надежностью элемента системы будем считать вероятность $P(t < T)$ того, что элемент будет работоспособен в течение времени T с момента начала эксплуатации. Но надежности элементов, приписываемые соответствующим вершинам графа системы, не достаточно для полного формального представления системы. Воздействие при прохождении от одного элемента к другому теряет свою “силу”. Надежность элемента системы и долю уменьшения воздействия при переходе от одного элемента к другому можно получить экспериментально или при экспертном анализе.

Таким образом,

на орграфе $G = (V, E)$ системы для вершины $v_i \in V, i \in \{1,2,...,n\}$ весом $w_i(t) = P_{v_i}(t < T)$ является величина надежности элемента системы, соответствующего вершине v_i. А весом $w(v_i, v_j) = \varepsilon_{ij}$, $j \in \{1,2,..,n\}$, $i \neq j$, дуги $(v_i, v_j) \in E$, причем со знаком “+”, является число $0 < \varepsilon_{ij} \leq 1$, равное сохранившейся доле передаваемого воздействия, при переходе от вершины v_i к вершине v_j. (1.2)

Процесс изменения весов вершин графа системы можно отразить следующим правилом, называемым *импульсным воздействием*. Импульсное воздействие определяется *импульсом* $imp_j(t)$, $j \in \{1,2,..,n\}$ в дискретном времени $t = 0,1,2,3...$, который задается отношением

$$imp_j(t) = w_j(t) / w_j(t-1), \text{ при } t > 0. \quad (1.3)$$

Тогда для $t \geq 0$ для i-ой вершины графа G определим импульсный воздействие

$$w_i(t+1) = w_i(t) \prod_{j=1}^{\deg v_i} \varepsilon_{ji} imp_j(t), \quad (1.4)$$

или

$$w_i(t+1) = w_i(t) \prod_{j=1}^{\deg v_i} (1 - \varepsilon_{ji} imp_j(t)), \tag{1.5}$$

полагая при этом, что $\deg v_i$ – число входящих в вершину v_i дуг.

Формулы (1.3), (1.4) и (1.5) задают изменения весов вершин графа $G = (V, E)$, тем самым определяя динамику распространения внешних воздействий по системе. Формула (1.4) соответствует *возрастающим* импульсным воздействиям, которые увеличиваются при переходе от одной вершины к другой. А формула (1.5) – *затухающим*, которые уменьшаются при переходе от одной вершины к другой.

Автономное импульсное воздействие на взвешенном орграфе G определим по правилу (1.3) с вектором начальных значений $\mathbf{W}(0) = (w_1(0), w_2(0), \ldots, w_n(0))$ и вектором импульсов

$$\mathbf{Imp}(0) = (imp_1(0), imp_2(0), \ldots, imp_n(0)), \tag{1.6}$$

задающим импульс $imp_j(0)$ в каждой вершине v_j в момент времени $t = 0$. Автономное импульсное воздействие в паре с вектором начальных значений описывает состояние системы в начальный момент времени, когда под влияние внешних поражающих воздействий попадают все или часть элементов системы.

Автономное импульсное воздействие, в котором вектор $\mathbf{Imp}(0) = (1, 1, \ldots, imp_i(0), \ldots, 1)$, $p_i(0) > 0$, имеет только i-ую отличную от единицы компоненту, назовем *простым воздействием с начальной вершиной* $v_i \in V$. Простое импульсное воздействие описывает состояние системы в начальный момент времени, когда внешнее воздействие поражает один из элементов системы. А именно тот, который соответствует i-ой вершине графа системы.

В соответствии с описанным импульсным воздействием на орграфе, можно ввести различные критерии (признаки) достижения системой пре-

дельного состояния. К примеру, можно считать, что система находится в предельном состоянии, если надежность одного или нескольких наиболее значимых элементов системы ниже некоторого допустимого уровня. Этот уровень будем называть *критическим уровнем* надежности элемента. Введенный критерий четко разделяет докритическое и закритическое состояние элемента системы. Если надежность элемента ниже критического уровня, то элемент не в состоянии выполнять возложенных на него функций, или функционировать требуемое время.

Представление исследуемой системы в виде взвешенного по правилу (1.2) графа $G=(V,E)$ и формализация внешнего влияния на систему как автономного импульсного воздействия (1.3)–(1.6) определяет *модель распространения поражающих воздействий по системе.*

Исследование построенной модели необходимо для решения важной задачи – выяснить, как внешнее воздействие распространяется по структуре системы, и влияет на качественное состояние ее элементов.

1.2.3 О некоторых особенностях построенной модели

Распространение поражающих воздействий по системе в модели (1.3)–(1.6) во многом зависит от структуры системы. Поэтому, целесообразно, подвергнуть тщательному анализу граф системы $G=(V,E)$, который в полной мере отражает структуру системы.

Во-первых, необходимо выяснить какую часть элементов системы может поразить внешнее воздействие, т.е. как глубоко может распространиться импульсное воздействие по структуре системы. При этом важно найти какая часть весов вершин графа будет уменьшена при таком воздействии. Задача усложняется тем, что глубина распространения импульса зависит непосредственно от его “точки приложения”, от тех вершин к которым будет приложен начальный импульс. В связи с этим разумно ввести ряд показателей и параметров, которые будут описывать возможную “по-

ражаемость” элементов системы при различных внешних воздействиях.

Во-вторых, у графа системы возможно наличие контуров, т.е. конечной последовательности дуг графа, начало каждой из которых обязательно совпадает с концом другой из контура. Любой контур в нашей модели является *контуром положительной обратной связи* [60]. Т.е. уменьшение веса любой вершины контура графа системы из модели (1.2)–(1.6) приведет к уменьшению надежности всех элементов контура, а в конечном счете и к уменьшению надежности вершины первой получившей воздействие. Такое “зацикливание” импульсного воздействия может привести к потере работоспособности (переходу в предельное состояние) какого-либо элемента из контура. Более того, при подобном распространении импульса по графу системы возможен отказ элемента системы, не получавшего импульс воздействия непосредственно. То, как это происходит, и как производить в структуре системы поиск контуров, являющихся “наименее стойкими” или “наиболее поражаемыми” местами в системе, будет показано ниже.

Нельзя обойти стороной вопрос о сложности системы. *Сложность системы* можно понимать двояко: сложность в структуре (compound) системы, и сложность в поведении (complexity) системы. Последнее иногда называют динамической сложностью [43]. Оба понятия сложности не эквивалентны, и не исключено их совместное проявление у одной и той же системы.

Динамической сложности посвящено множество работ, что позволяет говорить о некоторых общепринятых представлениях [42,43,61,62]. Но нельзя этого же сказать касательно определения сложности структуры системы.

В рамках настоящего исследования вполне достаточно утверждать, что сложность структуры системы заключается в наличии большого числа элементов, составляющих систему, и отсутствия тривиальных связей меж-

ду ними. Очевидно, чем запутанней и трудней для восприятия связи между элементами системы, тем сложнее проследить распространение импульсного воздействия по системе.

Процесс изменения весов вершин графа системы во время импульсного воздействия можно в полной мере считать динамическим. Но длительность этих изменений зависит непосредственно от структуры системы. Только от положения элемента в структуре системы зависит то, как будет меняться его надежность в период распространения возмущений по системе. Надежность элемента может измениться один раз за время импульсного воздействия, а может меняться периодически довольно длительное время. Во многом в предложенной модели (1.2)–(1.6), “сложное” поведение надежностей элементов системы в период распространения возмущений – есть следствие (это будет показано ниже) *структурной сложности* системы.

Чтобы не быть голословными, приведем примеры простых структур. Простым структурам, в нашем понимании, соответствуют регулярные [59], периодические [63], симметричные [64] и автоморфные [64] графы. Распространение импульсных воздействий по таким графам происходит одинаково, по одним и тем же принципам, независимо от точки приложения импульсного воздействия.

Для модели (1.2)–(1.6), в рамках концепции иерархии упрощенных моделей, имеет смысл заострить внимание на одном возможном усложнении. Каждому ребру в графе системы можно придать тип (цвет) для того, чтобы оно могло переносить возмущение только заранее определенных типов (цветов). Такое усложнение модели приведет к необходимости более тщательного и детального анализа исследуемой модели, хотя по сути и не повлияет на адекватность модели. Поэтому в дальнейшем будем считать ребра графа из модели (1.2)–(1.6) и переносимые ими возмущения однотипными, “окрашенными в один цвет”.

1.3. Структурные параметры стойкости системы

Функционирование системы в модели (1.2)–(1.6) в условиях внешних воздействий зависит от того, к каким элементам (имея ввиду их количество и связи с другими элементами системы) в начальный момент времени было приложено импульсное воздействие. Полный анализ структуры системы как графа (точнее орграфа), проведенный в этом параграфе, выявляет особые свойства структуры системы. Найденные свойства позволяют, в свою очередь, ввести *структурные параметры стойкости системы*, которые определяют наиболее желательный вид структуры для обеспечения стойкости системы. Если структура не удовлетворяет выбранным параметрам, возможно ее изменение для повышения стойкости системы.

1.3.1. Переход к бесконтурному графу

Последовательность чередующихся вершин v_i и дуг $e_i = (v_i, v_{i+1})$

$$S = (v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_i, e_i, v_{i+1}, \ldots, v_N),\ v_i \in V,\ i = 1,2,\ldots,N, \qquad (1.7)$$

орграфа $G = (V, E)$, называется *маршрутом* [59] или (v_1, v_N)-*маршрутом*. Вершины v_1 и v_N назовем *крайними*, а все остальные *промежуточными*. *Длиной* маршрута назовем число входящих в него дуг. Маршрут называется *цепью*, если все входящие в него дуги различны, и *путем*, если входящие в него вершины различны. Будем говорить, что *вершина* v_N *достижима из вершины* v_1, если существует (v_1, v_N)-путь. Если в орграфе G, где нет параллельных дуг и петель, маршрут (1.7) можно записать в виде последовательности его вершин $S = (v_1, v_2, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_N)$.

Маршрут называется *циклическим*, если совпадают его крайние вершины. Циклический путь называется *контуром* [59].

Последовательность (1.7) чередующихся вершин и дуг орграфа G таких, что $e_i = (v_i, v_{i+1})$ или $e_i = (v_{i+1}, v_i)$, называется *полумаршрутом*. Аналогично определяются *полуцепь*, *полупуть* и *полуконтур*.

Орграф называется *сильносвязным*, если любые две его вершины достижимы друг из друга. Орграф называется *слабосвязным*, если две его вершины соединении полупутем.

Сильносвязной компонентой орграфа называется его максимальный относительно включения сильносвязный подграф. Очевидно, что отношение взаимной достижимости орграфа G рефлексивно, транзитивно и симметрично. Поэтому получим разбиение множества вершин V на классы, если в один класс включим вершины, достижимые друг из друга. Как подтверждает [59], подграфы, порожденные классами этого разбиения, и только они, служат сильносвязными компонентами орграфа G. В орграфе могут быть ребра не входящие ни в одну из его сильносвязных компонент.

Пусть $\{H_1, H_2, ..., H_m\}$ – множество всех сильносвязных компонент орграфа G. *Конденсацией* орграфа G называется граф G^*, вершины $h_1, h_2, ..., h_m$ которого соответствуют сильносвязным компонентам орграфа G, и пара (h_i, h_j) является дугой в G^* тогда и только тогда, когда в G есть дуга, начало которой принадлежит компоненте H_i а конец – H_j. На рис. 1.3 изображены граф G и его конденсация G^*.

Очевидно, что любой контур орграфа G входит в одну из его сильносвязных компонент, но тогда конденсация G^* не имеет контуров, а зна-

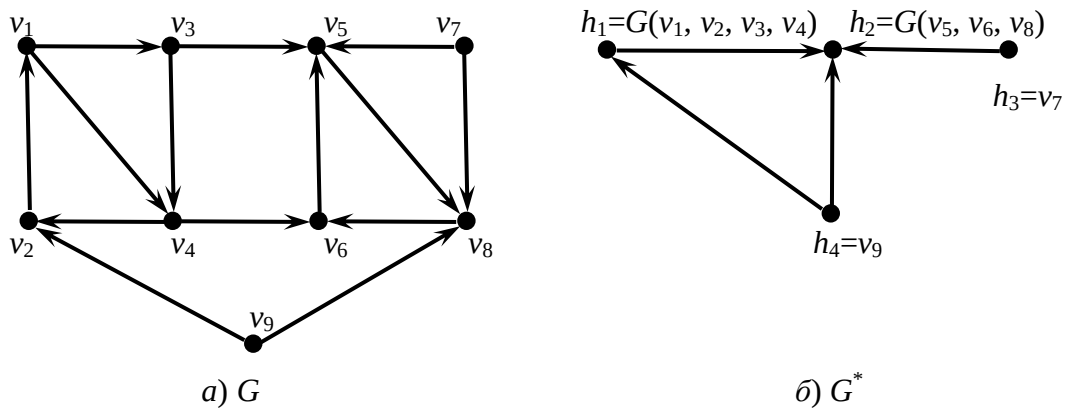


***Рис.* 1.3.** Граф G, и его конденсация G^*

чит является *бесконтурным графом* [65].

Распространяясь по структуре системы импульсное воздействие, уменьшив надежность хотя бы одного элемента какого-либо контура графа, уменьшит надежности и всех остальных элементов контура. Т.е. если импульсное воздействие достигло хотя бы одной из вершин *бикомпоненты* (так иногда называют сильносвязные компоненты [65]) орграфа, то оно, очевидно, достигнет и всех остальных вершин этой бикомпоненты. Поэтому, без нарушения целостности, изучение процесса распространения импульсного воздействия по графу системы имеет смысл свести к исследованию его конденсации. Гамильтоновы графы [59], т.е. те, которые имеют контур связывающий все вершины, будут исследованы отдельно. Конденсация гамильтонова графа, очевидно, – есть изолированная вершина [59].

Сильно связные компоненты графа системы, состоящие из всевозможных контуров требуют, как и гамильтоновы графы, отдельного изучения, поскольку являются “особо слабыми местами” в структуре системы. Как правило, возникает необходимость их нейтрализации, т.е. преобразование структуры системы в бесконтурный граф. Нейтрализацию контуров, включенных в сильносвязные компоненты, можно осуществить, к примеру, сменой направлений дуг входящих в конур, если такое преобразование позволяет произвести структура системы и ее инженерные особенности. Важно отметить, что отыскание всех сильносвязных компонент орграфа G, а как следствие и всех его контуров, осуществляется одновременно с построением конденсации G^*.

Наиболее полное описание алгоритмов построения конденсаций и выделения бикомпонент можно найти в книгах [65] и [66]. Среди прочих следует выделить матричный алгоритм, алгоритмы Тарьяна, Фараджева и Касьянова.

1.3.2. База орграфа и распространение импульсного воздействия

Рассмотрим орграф $G=(V,E)$, и подмножество его вершин $B \subseteq V$, такое, что любая вершина из $V \setminus B$ достижима из какой-либо вершины, принадлежащей B. Если, к тому же, множество B минимально относительно включения среди всех подмножеств вершин с описанным свойством, то оно называется *базой* [59] орграфа C. В любом орграфе существует база и никакие две вершины базы не соединены маршрутом.

Ранее было решено исследовать конденсацию $G^* = (V^*, E^*)$ орграфа системы, поэтому отметим следующую особенность бесконтурного графа G^*. Вершины с нулевыми полустепенями захода, т.е. те которые не имеют входящих дуг, не достижимы ни из каких вершин, а значит все они принадлежат базе. Тогда база любого бесконтурного графа, в том числе и база C^* орграфа G^*, состоит только из таких вершин. Поэтому выделение базы бесконтурного графа сводится к поиску всех вершин с нулевыми полустепенями захода.

Суть, каждая вершина $v_i \in C^*$, $i=\overline{1,|C^*|}$, имеет окружение $\xi(v_i)$ – множество вершин достижимых из вершины v_i, такое что $\bigcup_i \xi(v_i) = V^*$. Поэтому база графа системы – это множество элементов из которых импульсное воздействие в состоянии достичь любой элемент системы без исключения.

Из определения бесконтурного графа следует, что среди его вершин есть такие, полустепени исхода которых равны нулю (число исходящих дуг из вершины равно нулю). Множество всех таких вершин называется *контрабазой* [65,66]. Вообще говоря, контрабазой может обладать любой орграф.

На рис. 1.3 для графа G^* базу образуют вершины (h_3, h_4), а контрабазу – вершина h_2.

Все введенные понятия связаны следующими утверждениями.

Утверждение 1.1. У всякого бесконтурного графа есть хотя бы одна вершина с нулевой полустепенью захода и хотя бы одна с нулевой полустепенью исхода.

Утверждение 1.2. Всякая вершина бесконтурного графа принадлежит либо базе графа, либо контрабазе графа, или является *промежуточной*, с ненулевыми полустепенями захода и исхода.

Путь, началом которого является вершина из базы, назовем *базовым*, если его концом является вершина из контрабазы, и *полубазовым* – в противном случае.

Утверждение 1.3. Всякая вершина бесконтурного графа принадлежит не менее чем одному базовому пути.

Утверждение 1.4. Всякая вершина бесконтурного графа из контрабазы достижима не менее чем из одной вершины его базы.

Граф G^*, изображенный на рис. 1.3, имеет три базовых пути: (h_4, h_1, h_2), (h_4, h_2), (h_3, h_2).

1.3.3. Структурная уязвимость

Ситуация, когда система попадает в условия поражающих воздействий и в начальный момент времени меняются надежности ряда ее элементов, моделируется, как это отмечалось ранее, автономным импульсным воздействием на граф системы (1.2).

Рассмотрим конденсацию графа системы и автономное импульсное воздействие на него. Поскольку поражающее воздействие в описываемом случае достигает всех вершин системы, то мера того на сколько изменится надежность конкретного элемента зависит от числа базовых путей которым он принадлежит, или, точнее, от числа путей, концом которых он является.

Структурной уязвимостью $\mathrm{vl}(u)$ вершины $u \in V^*$ назовем число пу-

тей, концом которых является вершина u.

Для того, что бы осуществить подсчет структурной уязвимости вершины $u \in V^*$ графа G^* достаточно определить множество U вершин, из которых достижима вершина u, и пересчитать число всех несовпадающих друг с другом (v,u)-путей для каждой вершины $v \in U$. Множество U назовем *множеством уязвимости* вершины u. Очевидно, что в образовании всех полубазовых путей вершины $u \in V^*$ участвуют только вершины ее множества уязвимости U. Множество уязвимости U вершины $u \in V^*$ на графе G^* выделяет

АЛГОРИТМ α. Сначала выделим исходную вершину u, структурную уязвимость которого требуется подсчитать. На этапе $i=1$ выделим все входящие в вершину u дуги, и вершины $u_{1,1}, u_{1,2}, \ldots, u_{1,s_1}$, из которых они исходят, $s_1 \geq 1$ – полустепень захода вершины u. Вершины u и $u_{1,1}, u_{1,2}, \ldots, u_{1,s_1}$ объединим в множество U. На i-ом этапе, $i = 2,3,\ldots,I$, подобную операцию проведем с каждой из выделенных на предыдущем шаге вершин $u_{i-1,1}, u_{i-1,2}, \ldots, u_{i-1,s_{i-1}}$, а выделенные на текущем этапе вершины $u_{i,1}, u_{i,2}, \ldots, u_{i,s_i}$ добавим в множество U. На всех этапах выделять необходимо только непомеченные, т.е. невыделенные ранее, вершины. Процесс выделения продолжается, пока у выделяемых вершин полустепень захода отлична от нуля. Т.е. до тех пор, пока выделяемые вершины не окажутся вершинами базы графа G^*. Все вершины из множества U с нулевыми полустепенями захода образуют подмножество $C_u^* \subseteq U$, которое является подмножеством базы $C^* \supseteq C_u^*$. ◄[1]

Во-первых, в алгоритме α любая вершина выделенная на этапе $i-1$ достижима хотя бы из одной вершины выделенной на следующем i-ом

[1] Здесь и далее символом “◄” будем обозначать окончание алгоритмов, доказательств лемм и теорем.

этапе, а $i = 2,3,\ldots,I$. В противном случае, указанная вершина имела бы нулевую полустепень захода. Во-вторых, для вершины $u \in V^*$ графа $G^* = (V^*, E^*)$ ее множество уязвимости U может совпасть с множеством вершин V^* всего графа, тогда в результате работы алгоритма α будет выделено и все множество ребер E^*. поэтому время работы алгоритма будет наиболее длительным. Такое происходит, к примеру, когда вершина u – является единственной вершиной контрабазы.

Оба аргумента является основой доказательства следующей теоремы.

Теорема 1.1. *Алгоритм α определяет множество уязвимости U вершины $u \in V^*$ графа $G^* = (V^*, E^*)$ за время $O(n \cdot m)$, где $n = \left|V^*\right|$, а $m = \left|E^*\right|$.*

Теорема 1.2. *Для всякой вершины $v \in V^*$, входящей в множество уязвимости U вершины $u \in V^*$ графа $G^* = (V^*, E^*)$, верно неравенство $\mathrm{vl}(u) \geq \mathrm{vl}(v)$.*

Доказательство. Множество $U \subseteq V^*$ графа $G^* = (V^*, E^*)$ является максимальным относительно включения в него вершин, т.е. не существует такой вершины из V^*, добавление которой в множество уязвимости U вершины $u \in V^*$ увеличило бы ее структурную уязвимость. А значит, подграф $J = (U, W) \subseteq G^*$, порожденный множеством U (т.е. граф с множеством вершин U и множеством W всех ребер из E^* их соединяющих [59]), является единственно возможным. Подграф $J = (U, W) \subseteq G^*$ назовем *графом уязвимости* вершины u. Тогда для всякой вершины $v \in U$, отличной от $u \in U$, ее множество $\overline{U}$ уязвимости является подмножеством множества U уязвимости вершины u. В таком случае, граф уязвимости $\overline{J} = (\overline{U}, \overline{W})$

вершины v также является подграфом $\bar{J} \supseteq J$ графа уязвимости вершины u. Поэтому структурные уязвимости вершин u и v связаны неравенством $\mathrm{vl}(u) > \mathrm{vl}(v)$, а при совпадении вершин u и v – неравенством $\mathrm{vl}(u) \geq \mathrm{vl}(v)$. ◄

Следствие 1.2.1. *Для вершин* $u_1, u_2 \in V^*$ *графа* $G^* = (V^*, E^*)$ *и их графов уязвимости* $J_1 = (U_1, W_1)$ *и* $J_2 = (U_2, W_2)$ *соответственно, такими что* $J_1 \subseteq J_2$*, справедливо неравенство* $\mathrm{vl}(u_1) \leq \mathrm{vl}(u_2)$.

Доказательство. Из условия содержания $J_1 \subseteq J_2$ множества уязвимости вершины u_1 в множестве уязвимости вершины u_2 можно заключить, что $u_1 \in U_2$. Но тогда согласно теореме 1.2 $\mathrm{vl}(u_1) \leq \mathrm{vl}(u_2)$. ◄

Каждой вершине u графа G^* соответствует некоторое подмножество $C_u^* \subseteq C^*$ его базы. Но соответствие это не взаимно однозначное. Различные вершины графа G^* могут принадлежать одним и тем же базовым путям, но иметь различные длина полубазовых путей. Более того, даже если база графа уязвимости одной вершины включена в базу графа уязвимости другой вершины, это не дает возможность установить соотношение между значениями структурной уязвимости первой вершины и второй.

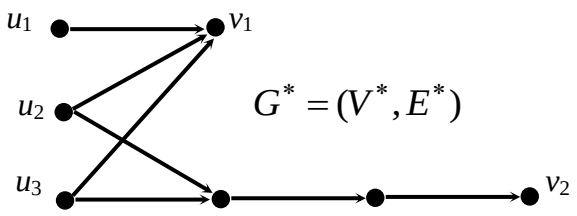


***Рис.* 1.4**

На рис. 1.4 изображен граф G^* с базой $C^* = \{u_1, u_2, u_3\}$. Для баз $C_{v_1}^* = \{u_1, u_2, u_3\}$, $C_{v_2}^* = \{u_2, u_3\}$ графов уязвимости вершин $v_1, v_2 \in V^*$ выполняется включение $C_{v_2}^* \subseteq C_{v_1}^*$. Несмотря на это, структурная уязвимость вершины v_2 больше структурной уязвимости вершины v_1. Структурные уязвимости вершин v_1 и v_2 равны $\mathrm{vl}(v_1) = 3$ и $\mathrm{vl}(v_2) = 4$ соответственно.

1.3.4. Предельная надежность

Структурная уязвимость элемента дает качественную оценку его расположению в структуре системы. Структурная уязвимость позволяет судить о том, насколько безопасно расположение элемента в структуре системы относительно других элементов в период поражающих воздействий. Но структурная уязвимость не дает количественной оценки ухудшения надежности элемента при попадании системы в условия поражающих воздействий. Такой оценкой будет служить новый параметр, отчасти являющийся дополнением структурной уязвимости.

Надежность произвольно выбранного элемента $u \in V^*$ системы из модели (1.2)–(1.3) с автономным импульсным воздействием на граф системы $G^* = (V^*, E^*)$ изменяется скачкообразно, по мере прохождения импульсного воздействия от вершин графа уязвимости $J = (U, W)$ до самого элемента. Промежуток времени, в течение которого меняется надежность элемента u назовем *временем воздействия* на элемент u (вершину) и будем обозначать через T_u.

Утверждение 1.5. При автономном импульсном воздействии на систему надежность любого ее элемента изменяется непрерывно, в каждый момент, в течение всего времени воздействия.

Утверждение 1.6. При автономном импульсном воздействии на систему время воздействия на любой ее элемент равно длине его максимального полубазового пути.

Максимальное время воздействия T_u среди всех элементов u графа системы G^* назовем *временем распространения импульсного воздействия* по графу системы и будем обозначать через T_{G^*}, $T_{G^*} = \max\limits_{u \in V^*} T_u$.

Утверждение 1.7. Время распространения импульсного воздействия по графу системы G^* равно длине его максимального базового пути.

Важно знать, как к окончанию времени распространения импульсного воздействия по графу системы изменились надежности элементов системы. *Предельной надежностью вершины* u назовем величину надежности соответствующего ей элемента системы на момент окончания времени воздействия, и обозначим через $\mathrm{br}(u)$.

Алгоритм α, описанный в предыдущем параграфе, для любой вершины $u \in V^*$ графа $G^* = (V^*, E^*)$ выделяет множество уязвимости U, из всех вершин которого вершина u достижима. Благодаря этому, можно подсчитать сумму длин всех путей, концом которых является вершина u. Обозначим эту сумму через $\mathrm{ps}(u)$ и назовем *мерой структурной уязвимости* вершины u.

Теорема 1.3. *Предельная надежность* $\mathrm{br}(u)$ *вершины* $u \in V^*$ *графа* $G^* = (V^*, E^*)$ *с равными весами* ε *для всех ребер из* E^* *при автономном импульсном воздействии с начальным импульсом* imp_0*, одинаковым для всех вершин из* V^**, определяется формулой*

$$\mathrm{br}(u) = w_u imp_0^{\mathrm{vl}(u)+1} \varepsilon^{\mathrm{ps}(u)}, \tag{1.8}$$

где w_u *– надежность вершины* u *в начальный момент автономного импульсного воздействия.*

Доказательство. Предельная надежность вершины $u \in V^*$ графа $G^* = (V^*, E^*)$ определяется импульсными воздействиями отходящими от вершин его множества уязвимости. Каждое импульсное воздействие, проходя путь от вершины $v \in V^*$ (важно, что таких путей может быть несколько) до вершины u, уменьшается в $\varepsilon^{l(v,u)}$ раз, $l(v,u)$ – длина пути (v,u), и становится равным $imp_0 \varepsilon^{l(v,u)}$. По этому же принципу высчитываются значения всех импульсных воздействий подходящих в вершине u. А их количество, как известно, равно $\mathrm{vl}(u)$ – числу путей, концом которых является

вершина u. Перемножив, в соответствии с (1.4), значения всех импульсных воздействий подходящих к вершине u, получаем искомую предельную надежность $\mathrm{br}(u) = w_u imp_0 imp_0^{\mathrm{vl}(u)} \varepsilon^{\mathrm{ps}(u)} = w_u imp_0^{\mathrm{vl}(u)+1} \varepsilon^{\mathrm{ps}(u)}$. Показатель $\mathrm{ps}(u)$ множителя $\varepsilon^{\mathrm{ps}(u)}$ появляется в произведении (1.8) как результат сложения длин всех путей, концом которых является вершина u. Множитель imp_0 появляется в произведении (1.8) без уменьшающего его сомножителя ε, поскольку одно импульсное воздействие подходит к вершине u непосредственно. ◄

Примечание 1.1. Условия теоремы 1.3 описывает идеализированный случай модели (1.2)–(1.6) с равными весам ε для ребер графа G^* и равными импульсами imp_0, прилагаемыми ко всем его вершинам. Несмотря на это, предельная надежность является очень важным показателем для оценки состояния как системы, так и отдельно взятых ее элементов. В общем случае, когда веса ребер и вершин графа G^* различны вместе с прилагаемыми к ним импульсами, для подсчета предельной надежности элементов в качестве ε и imp_0 можно использовать либо наименьшие, либо средние значения весов и импульсов соответственно. Для точного подсчета предельной надежности отдельного элемента системы достаточно, проследив весь путь каждого импульса, исходящего из вершин множества уязвимости элемента, отметить какая его доля достигла исследуемого элемента. А затем доли импульсов достигших исследуемый элемент перемножить с величиной его надежности в начальный момент импульсного воздействия. ◄

Предельная надежность элемента зависит непосредственно, как это показывает доказанная теорема, от величины приложенных импульсов к его вершинам графа уязвимости. В различных условиях, при различных импульсных воздействиях, предельная надежность выбранного элемента будет разной.

Примечание 1.2. Если критический уровень надежности элемента

системы выше, чем ее предельная надежность при предстоящем импульсном воздействии, то этот элемент под влиянием импульсного воздействия выйдет из строя (перейдет в предельное состояние). Таким образом, предельная надежность является тем самым значением, до которого необходимо понизить критический уровень надежности элемента для выполнения возложенных на него функций в период попадания системы в условия, моделируемые данным импульсным воздействием или повысить надежность. ◄

Вообще говоря, в доказательстве теоремы 1.3 было предположено, что элементы множество уязвимости вершины u не выходят из строя, т.е. могут передавать соседним вершинам распространяющееся по системе импульсное воздействие.

ПРИМЕЧАНИЕ 1.3. Так же стоит отметить, что повышение надежности или понижения критического уровня надежности элемента до предельной требует определенных затрат. Поэтому при проектировании сложных систем связи (ребра, дуги) между ее элементами следует наделять *амортизирующими свойствами*, которые максимально возможно уменьшали бы долю передаваемых через них импульсов. Количественным отражение таких свойств являются веса из (1.2). Из формулы (1.8) видно, что чем меньше вес ребер графа уязвимости вершины u, тем выше предельная надежность, а значит, тем меньше потребуется затрат для достижение критического уровня надежности элемента системы. ◄

1.3.5. Показатель проникновения импульсного воздействия

В модели (1.2)–(1.6) распространения импульсного воздействия по системе, простое импульсное воздействие с определенной начальной вершиной, независимо от своей величины, имеет возможность распространения на некоторое множество элементов системы. Чем меньше это множество, тем выше возможности сопротивления системы к импульсному воз-

действию.

Множество вершин любого V орграфа $G=(V,E)$ можно разделить на три попарно непересекающихся подмножества. Первое C – множество *выходных вершин или база*, это вершины, в каждую из которых не заходит ни одна дуга. Второе $\overline{C}$ – множество *входных вершин или контрабаза*, это вершины, из которых не исходит ни одна дуга. И наконец, третье – множество *промежуточных вершин*, вершины, у которых имеется хотя бы по одной входящей и исходящей дуге. В графе системы промежуточные вершины передают простой импульс от одной смежной вершине к другой, поэтому такие вершины в графе системы наименее желательны. Наличие входных и выходных вершин в графе системы, наоборот, желательно потому, что простой импульс не дойдет ни до одной входной вершины, и не будет распространять по системе, если его начальная вершина – выходная.

Опираясь на проделанные рассуждения, введем *показатель проникновения* импульсного воздействия по системе. Показателем проникновения орграфа G системы будем называть число $\mathrm{gp}(G)=\dfrac{|V|-|C|-|\overline{C}|}{|V|}$. К примеру, если граф G имеет гамильтонов контур [59], то $\mathrm{gp}(G)=1$. Надо отметить, что это наихудший случай среди всех возможных орграфов. Все вершины в контуре промежуточные, а значит импульс может распространится по всей системе, начав с любого ее элемента.

Напомним, что любой бесконтурный граф имеет хотя бы по одной входной и выходной вершине, а поэтому имеет место

Утверждение 1.8. Для всякого бесконтурного графа $G^*=(V^*,E^*)$, для его показателя проникновения $\mathrm{gp}(G^*)$, справедливо неравенство $\mathrm{gp}(G^*)\geq\dfrac{|V^*|-2}{|V^*|}$.

Подсчет показателя проникновения импульсного воздействия по орграфу сводится к поиску и подсчету всех входных и выходных вершин орграфа.

1.4. Контуры обратной связи

В предыдущей главе был определен ряд параметров оценивания стойкости системы. Их значения были подсчитаны не для самого графа системы, а для его конденсации. Исключение составил показатель проникновения импульсного воздействия, определенный в последнем параграфе этой главы. Цель исследования конденсации графа системы – дать поверхностную, приближенную оценку стойкости системы, необходимую на первичном этапе проектировании системы в целом, и ее структуры, в частности. Исследование конденсации графа и подсчет его структурных параметров имеет смысл только в том случае, когда конденсация – нетривиальный граф, т.е. не вырождается в одну вершину при ее построении.

Для внесения изменений в структуру системы, т.е. изменения порядка связей среди элементов системы, с целью повышения стойкости системы или улучшения значения некоторых из структурных параметров системы требуется более детальное изучение структуры системы. И в этом случае объектом исследования должен быть сам граф системы, а не его конденсация. Основное отличие между графом и его конденсацией заключается в наличии у первого контуров обратной связи. Контуры графа системы принадлежат исключительно его бикомпонентам и, напомним, стягиваются [59] в некоторые вершины его конденсации. Вершины конденсации, полученные стягиванием бикомпонент графа системы, будем называть *стянутыми*, а все остальные вершины конденсации, соответственно, – *нестягиваемыми*. Конденсация в зависимости от числа бикомпонент своего графа может приобретать различный вид. К примеру, конденсация графа вообще может не содержать нестягиваемых вершин.

Очевидно, значения структурных параметров вершин графа и его конденсации отличаются друг от друга. И то, как и насколько они отличаются друг от друга зависит, в первую очередь, от числа и размера контуров в структуре системы. О том, как контуры в структуре системы влияют на стойкость системы и посвящен этот раздел.

1.4.1. Контур – как внутренний источник возмущений

Неоднократно обращалось внимание на то, что контуры в структуре системы являются ее “наименее стойкими местами” при попадании системы в условия поражающих (импульсных) воздействий. Выход элемента системы из строя предполагается только в случае уменьшения его надежности ниже заранее определенного критического уровня. Вышедший из строя элемент накладывает ограничения (большие или меньшие, в зависимости от значимости этого элемента) на функционирование системы, если это еще возможно. Выход из строя любого элемента системы, очевидно, является нежелательным.

Утверждение 1.9. Импульсное воздействие на любую вершину контура положительной обратной связи приведет к понижению надежности какого-либо элемента этого контура до критического уровня, а как следствие, и к переходу в предельное состояние.

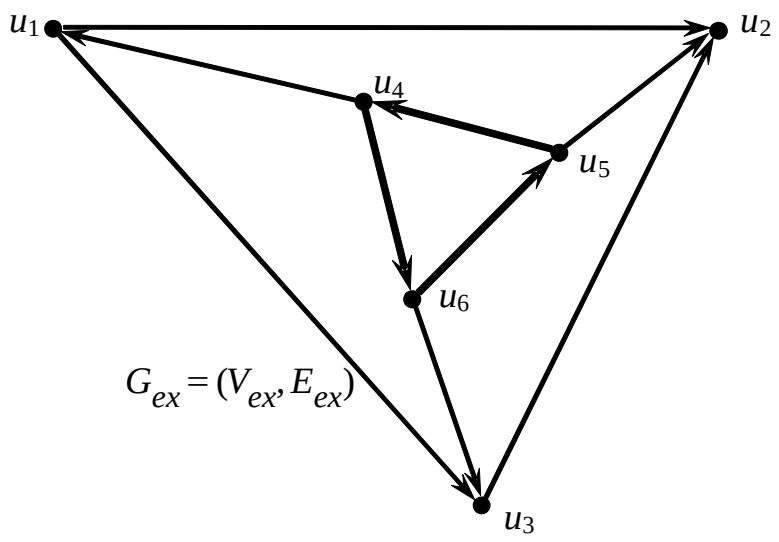


***Рис.* 1.5**

По этой причине контуры в структуре системы имеют отрицательное влияние на стойкость системы. Прежде чем перейти к теоретическому обоснованию нежелатель-

ности наличия в структуре системы контуров обратной связи, рассмотрим пример наглядно демонстрирующий еще одно негативное качество контуров в структуре системы.

На рис. 5 изображен 6-вершинный орграф $G_{ex} = (V_{ex}, E_{ex})$ с множеством вершин $V_{ex} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ таким, что вершины u_4, u_5 и u_6 образуют контур положительной обратной связи. Контур $H_1 = (u_4, u_5, u_6)$ выделен на рис. 1.5 “жирными” линиями. Начальные веса вершин графа будем считать равными $w_i(0) = 0.9$, $i = \overline{1,6}$. Веса ребер графа положим равными единицы, что позволить ускоренно получить желаемый эффект.

Проследим за тем как будут меняться вектор значений при простом импульсном воздействии

$$\mathbf{Imp}(0) = (1,1,1,1,1,0.9) \tag{1.9}$$

на граф G_{ex} с начальной вершиной u_6:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{W}(1) = (0.9,0.9,0.9,0.9,0.9,0.81),\\
&\mathbf{W}(2) = (0.9,0.9,0.81,0.9,0.81,0.81),\\
&\mathbf{W}(3) = (0.9,0.73,0.81,0.81,0.81,0.81),\\
&\mathbf{W}(4) = (0.81,0.73,0.81,0.81,0.81,0.73),\\
&\mathbf{W}(5) = (0.81,0.66,0.66,0.81,0.73,0.73),\\
&\mathbf{W}(6) = (0.81,0.54,0.66,0.73,0.73,0.73),\\
&\mathbf{W}(7) = (0.73,0.54,0.66,0.73,0.73,0.66),\\
&\mathbf{W}(8) = (0.73,0.49,0.54,0.73,0.66,0.66),\\
&\mathbf{W}(9) = (0.73,0.4,0.54,0.66,0.66,0.66),\\
&\mathbf{W}(10) = (0.66,0.4,0.54,0.66,0.66,0.59).
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Этого количества шагов достаточно, что бы выделить закономерность в изменении весов вершин. Последовательность выглядит следующим образом:

$t = 1 \ - u_6$;

$$
\begin{aligned}
&t = 2 - u_3,\ u_5;\\
&t = 3 - u_2,\ u_4;\\
&t = 4 - u_1,\ u_6;\\
&t = 5 - u_2,\ u_3,\ u_5;\\
&t = 6 - u_2,\ u_4;\\
&t = 7 - u_1,\ u_6;\\
&t = 8 - u_2,\ u_3,\ u_5;\\
&t = 9 - u_2,\ u_4;\\
&t = 10 - u_1,\ u_6.
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Последовательность изменений весов вершин на шагах с 3-го по 5-ый и с 6-го по 8-ой полностью совпадают. Наблюдается цикличность в изменении весов вершин, не входящих в контур H_1, но смежных с вершинами контура. Это происходит после второго (на шаге $t = 4$) и третьего (на шаге $t = 7$) изменения веса вершины u_6, к которой было приложено начальное импульсное воздействие (1.9). Вершины контура H_1, в отсутствие внешних импульсных воздействий, циклически изменяют значения своих весов, и влияют на веса остальных вершин графа. Это позволяет считать контур H_1 – *внутренним источником импульсных воздействий*, распространяющихся по вершинам графа, смежных с вершинами контура.

С другой стороны, исходя из определения времени распространения импульсного воздействия по бесконтурному графу, логично предположить, что время распространения импульсного воздействия по произвольному орграфу равно длине его максимального простого пути. Путь $S = (u_6, u_5, u_4, u_1, u_3, u_2)$ графа G_{ex}, представленный на рис. 1.5, является максимальным, а его длина равна $l(S) = 5$. Вершина u_6 является точкой приложения простого импульсного воздействия (1.9), и поэтому после

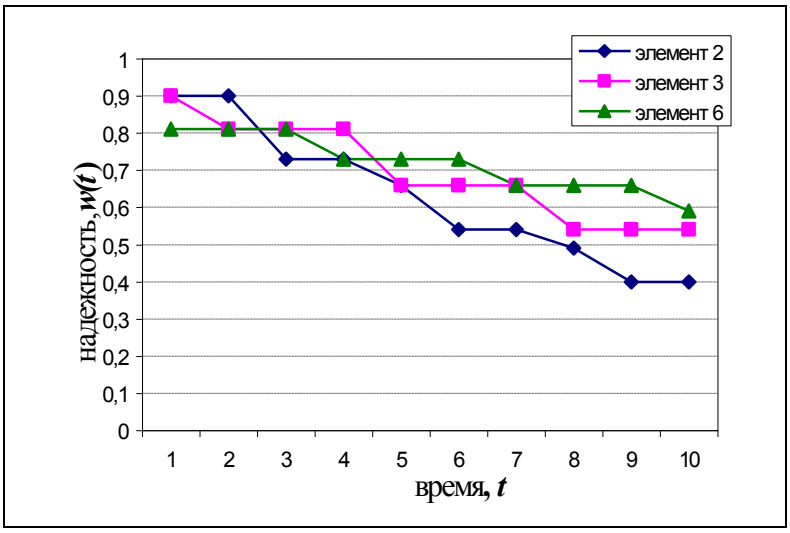


***Рис.* 1.6**

прохождения импульса от вершины u_6 до вершины u_2 по вершинам пути S распространение импульсных воздействий по графу G_{ex} должно было прекратиться. Но как показывает последовательность изменений (1.10)–(1.11) весов вершин графа G_{ex} этого не происходит. Сверх того, появляется цикличность в последовательности изменений весов. Прекращение распространения импульсного воздействия по графу, как будет показано ниже, возможно только при нейтрализации его контуров обратной связи.

Контур, как и любой источник импульсных воздействий, поражает и выводит из строя элементы системы. Обратим внимание на то, что из строя могут выйти элементы системы, не входящие в контуры. Чтобы продемонстрировать это, для всех элементов системы со структурой, представленной в виде графа G_{ex} на рис. 1.5, определим одинаковый для всех критический уровень надежности $\mathrm{cr}(u_i) = 0.6$, $i = \overline{1,6}$.

Первым из всех элементов системы из строя выйдет элемент, соответствующий вершине u_2 графа G_{ex}. На шаге $t = 6$ (см. последовательность (1.10) и рис. 1.6) его надежность упадет до значения ниже критического, $w_2(6) = 0.54$, $w_2(6) < \mathrm{cr}(u_2)$. Следующим из строя выйдет на шаге $t = 8$ (см. последовательность (1.10) и рис. 1.6) элемент u_3, $w_3(8) = 0.54$, $w_3(8) < \mathrm{cr}(u_3)$. И только лишь на шаге $t = 10$ (см. последовательность (1.10) и рис. 1.6) из строя выйдет элемент u_6, принадлежащий контуру,

$u_6 \in H_1$. Его надежность достигнет значения $w_6(10) = 0.59$, находящегося ниже критического уровня $w_6(10) < \mathrm{cr}(u_6)$.

Необходимо отметить, что в момент времени $t = 1$ значение надежности элемент u_6 была меньше, чем значение надежностей элементов u_2 и u_3 (см. последовательность (1.10) и рис. 1.6). Но несмотря на это, элемент u_6 вышел из строя, т.е. значение его надежности упала ниже критического уровня, “позже”, чем у элементов u_2 и u_3 (см. последовательность (1.10) и рис. 1.6).

Для произвольного графа $G = (V, E)$ *эффект* выхода из строя элементов системы по прошествию $t = l(S)$ шагов распространения импульсного воздействия по структуре системы в виде графа G назовем *остаточным*, где $S \subseteq G$ – путь максимальной длины. За время $t = l(S)$ импульсное воздействие проходит путь между самыми удаленными друг от друга вершинами графа G, и изменения значений надежностей всех элементов системы, происходящие в этом промежутке времени, следует считать вызванными автономным импульсным воздействием. Все изменения значений весов, происходящие по истечении этого времени, являются свидетельствами остаточного эффекта.

Причиной остаточного эффекта, очевидно, являются контуры в структуре системы. Вопрос, о том, в каких местах (на каких элементах) системы проявиться остаточный эффект, может прояснить исследование внутренних источников (а их может быть несколько) возмущений системы.

Элемент системы, вышедший из строя (надежность, которого опустилась ниже критического уровня), не в состоянии передавать импульсное воздействие смежным с ним элементам – таково требование модели (1.2)–(1.6), определяющее распространение поражающего воздействий по системе. Выход из строя контурообразующего элемента остановит циркуляцию импульсного воздействия по контуру, что приведет, в конечном

итоге, к “затуханию” внутреннего источника возмущений. При этом важно знать, как долго контур будет являться внутренним источником возмущений. Рассмотренный пример показывает, что если нейтрализация контура не производится искусственно – путем изменения структуры системы, то контур перестанет быть источником импульсных воздействий с момента выхода из строя одного из контурообразующих элементов системы.

Контур S_{con} графа $G \supseteq S_{con}$ [59] называется *простым контуром*, если в последовательности (1.7) среди вершин образующих контур S_{con}, повторяются только крайние. Возможны три типа простых контуров. Простой контур S_{con}, вершины которого не являются началами дуг не входящих в его образование, назовем *изолированным*. Если же любая дуга, не входящая в образование простого контура S_{con}, является исходящей из инцидентной ей вершины контура, то контур S_{con} назовем *очаговым*. На рис. 1.5 контур $H_1 = (u_4, u_5, u_6)$ является очаговым. Если же среди вершин контура S_{con} есть такие, что имеют инцидентные дуги входящие и исходящие из них, причем не участвующие в образование самого контура S_{con}, то контур S_{con} назовем *промежуточным*.

Очаговые, изолированные и промежуточные контуры на графе G стягиваются соответственно в выходные, входные и промежуточные вершины конденсации G^*.

Началом и окончанием действия контура S_{con} – как внутреннего источника возмущений на графе G будем считать момент первого и, соответственно, последнего изменения надежности вершин (или вершины) образующих контур S_{con}. *Время действия контура* S_{con} в качестве внутреннего источника возмущений будем обозначать как $T(S_{con})$.

Согласно определению, импульсное воздействие распространяющееся по вершинам изолированного контура, не передается элементам систе-

мы, не являющихся составной частью этого контура. Поэтому в отношении изолированного контура справедливо следующее

Утверждение 1.10. Изолированный контур S_{con} в структуре системы является внутренним источником возмущений лишь для элементов, образующих сам контур S_{con}.

Теорема 1.4. *Время действия изолированного контура S_{con} в качестве внутреннего источника возмущений на графе $G=(V,E)$ с равными весами ε для всех ребер из E и равными весами w_0 для всех вершин контура S_{con}, при простом импульсном воздействии imp_0, приложенному к одной из вершин контура S_{con}, определяется формулой* $T(S_{con})=\dfrac{\ln\dfrac{\mathrm{cr}(S_{con})}{w_0 p_0}}{K\ln\varepsilon}$, *где* $\mathrm{cr}(S_{con})$ *– критический уровень надежности вершин контура,* $(K-1)$ *– количество полных обходов, произведенных импульсным воздействием по всем вершинам контура.*

Доказательство. Любой простой контур, не являющийся подграфом никакого другого графа, – есть однородная структура. Все вершины и дуги такого графа обладают одними и теми же топологическими свойствами: его вершины имеют полустепени захода и исхода равные единице. Поэтому импульсное воздействие, достигнув какой-либо вершины контура, может перейти от нее только лишь к другой смежной с ней вершине контура. В процессе распространения простого импульсного воздействия по контуру в каждый момент времени будет меняться значение веса только лишь одной вершины контура. Зная к какой вершине было приложено простое импульсное воздействие, можно проследить динамику изменения импульсного воздействия в процессе распространения по контуру.

Структурная однородность контура позволяет пренебречь “точкой приложения” простого импульсного воздействия, и считать ее произвольно

определяемой из вершин контура.

Рассмотрим орграф $G=(V,E)$ с изолированным контуром $S_{con} \subseteq G$, удовлетворяющим условиям настоящей теоремы. Поскольку простой импульсное воздействие будет приложено к одной из вершин изолированного контура S_{con}, то оно будет распространяться только по вершинам контура. А это позволяет исследовать процесс распространения импульсного воздействии по контуру S_{con}, пренебрегая остальными вершинами и дугами графа G.

Благодаря структурным особенностям контура S_{con} простое импульсное воздействие, приложенное к одной из вершин этого контура, будет распространяться только в одном направлении: в направлении к вершине, смежной с вершиной уже достигнутой воздействием. Это, напомним, позволяет легко проследить изменение величины распространяющегося по контуру импульсному воздействию. В момент времени t величина импульсного воздействия при передачи от одной вершине к другой, согласно условию теоремы, будет уменьшена в ε раз, а по отношению к начальному моменту времени – в ε^t раз, и будет равна $\varepsilon^t imp_0$. При этом вес каждой вершины контура зависит от того, сколько раз эта вершина испытала на себе влияние импульсного воздействия. Таким образом, можно вывести зависимость

$$w(t) = w_0 \varepsilon^t imp_0^{k(t)}, \tag{1.12}$$

где $k(t) = [t / l(S_{con})] + 1$ – количество импульсных воздействий испытавших на себе вершина контура к моменту времени t (квадратными скобками обозначена операция получения целой части числа), а $l(S_{con})$ – длина контура S_{con}. Вообще говоря, слагаемое $[t / l(S_{con})]$ показателя степени в правой части (1.12) есть число полных обходов [23] произведенных импульсным воздействием по всем вершинам контура S_{con}, а $[t / l(S_{con})]+1$, –

соответственно, номер текущего обхода.

Подставив в (1.12) значение критического уровня вершин контура, получим формулу $\mathrm{cr}(S_{con}) = w_0 \varepsilon^{T(S_{con})} imp_0^K$ (1.13)

для определения времени окончания распространения простого импульсного воздействия по контуру S_{con}. Выразим из (1.13) время $T(S_{con})$ действия контура – как внутреннего источника возмущений:

$$\ln \mathrm{cr}(S_{con}) = \ln w_0 \varepsilon^{T(S_{con})} imp_0^K,$$

$$\ln \mathrm{cr}(S_{con}) = T(S_{con}) \ln \varepsilon + K \ln w_0 imp_0,$$

$$T(S_{con}) \ln \varepsilon = \ln \mathrm{cr}(S_{con}) - K \ln w_0 imp_0,$$

$$T(S_{con}) \ln \varepsilon = \frac{1}{K} \ln \frac{\mathrm{cr}(S_{con})}{w_0 imp_0},$$

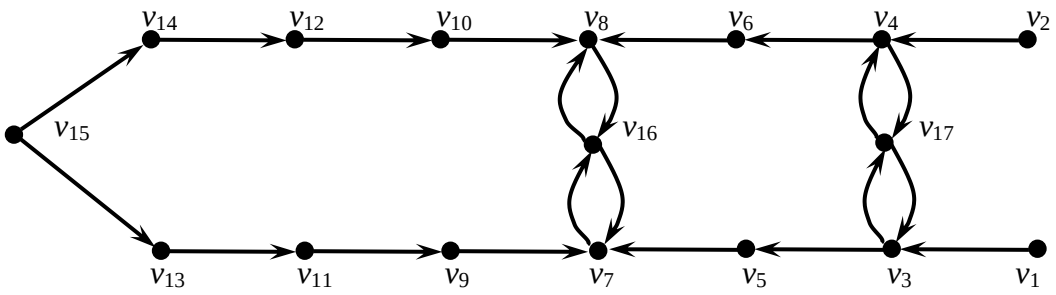


***Рис.* 1.7.** Структурная схема корабельной электроэнергетической системы

Граф *G*. Вершины графа G соответствуют следующим элементам системы: v_1, v_2 – основные генераторы переменного тока; v_3, v_4 – главные распределительные щиты отключаемой нагрузки; v_5, v_6, v_9, v_{10} – автоматические выключатели; v_7, v_8 – распределительные щиты неотключаемой нагрузки; v_{11}, v_{12} – обратимые преобразователи постоянно-переменного тока; v_{13}, v_{14} – запорные устройства; v_{15} – источник постоянного тока; v_{16}, v_{17} – междубортные перемычки с автоматическими выключателями. Элемент v_{16} имеет наибольшую структурную уязвимость среди всех элементов системы, и в первую очередь, необходимо проверить его предельную надежность. Структура системы имеет четыре простых контура: (v_8, v_{16}, v_8), (v_7, v_{16}, v_7), (v_4, v_{17}, v_4), (v_3, v_{17}, v_3).

$$T(S_{con}) = \frac{\ln \dfrac{\mathrm{cr}(S_{con})}{w_0 imp_0}}{K \ln \varepsilon}. \qquad (1.14)$$

Формула (14) определяет время действия изолированного контура в качестве внутреннего источника возмущений для исследуемой системы. ◄

На рис. 1.7 в виде ориентированного графа изображена структура корабельной электроэнергетической системы. Из доказанных утверждений и их следствий вытекает, что элемент v_{16} имеет наибольшую структурную уязвимость среди всех элементов системы, и, в первую очередь, необходимо проверить его предельную надежность.

1.5. Алгоритм повышения стойкости системы

Ранее доказанные теоремы являются обоснованием следующего алгоритма повышения стойкости (ПС) системы.

Алгоритм ПС:

1. Рассмотрим систему со структурой в виде ориентированного графа $G = (V, E)$. Предельное состояние системы определяется предельным состоянием некоторого множества ее элементов $\tilde{v}_i \in V, i \in \{1,2,\ldots,\tilde{n}\}$. Система попадает под влияния импульсного воздействия $\mathrm{Imp}(0)$. Для предотвращения перехода системы в предельное состояние необходимо с каждым из элементов $\tilde{v}_i$ проделать следующие операции.

2. Подсчитать предельную надежность $\mathrm{br}(\tilde{v}_i)$. В случае если, среди элементов $\tilde{v}_i, i \in \{1,2,\ldots,\tilde{n}\}$ есть элементы контуров обратной связи или элементы смежные с контурами, подсчет $\mathrm{br}(\tilde{v}_i)$ необходимо вести с учетом времени действия этих контуров.

3. Повысить надежность элемента $\tilde{v}_i$ на разницу $w_i(0) - \mathrm{br}(\tilde{v}_i)$. Повысить надежность элемента $\tilde{v}_i$ можно любым из известных методов резервирования [11,16]. ◄

$\mathbf{Imp}_1(0) = (1,0.75,1,0.75)$	$\mathbf{Imp}_2(0) = (0.75,1,1,1)$
$\mathbf{W}_1(1) = (0.9,0.68,0.9,0.68)$	$\mathbf{W}_2(1) = (0.68,0.9,0.9,0.9)$
$\mathbf{W}_1(2) = (0.9,0.51,0.51,0.68)$	$\mathbf{W}_2(2) = (0.68,0.68,0.68,0.68)$
$\mathbf{W}_1(3) = (0.9,0.51,0.38,0.68)$	$\mathbf{W}_2(3) = (0.68,0.51,0.38,0.68)$

***Таблица* 1.1**

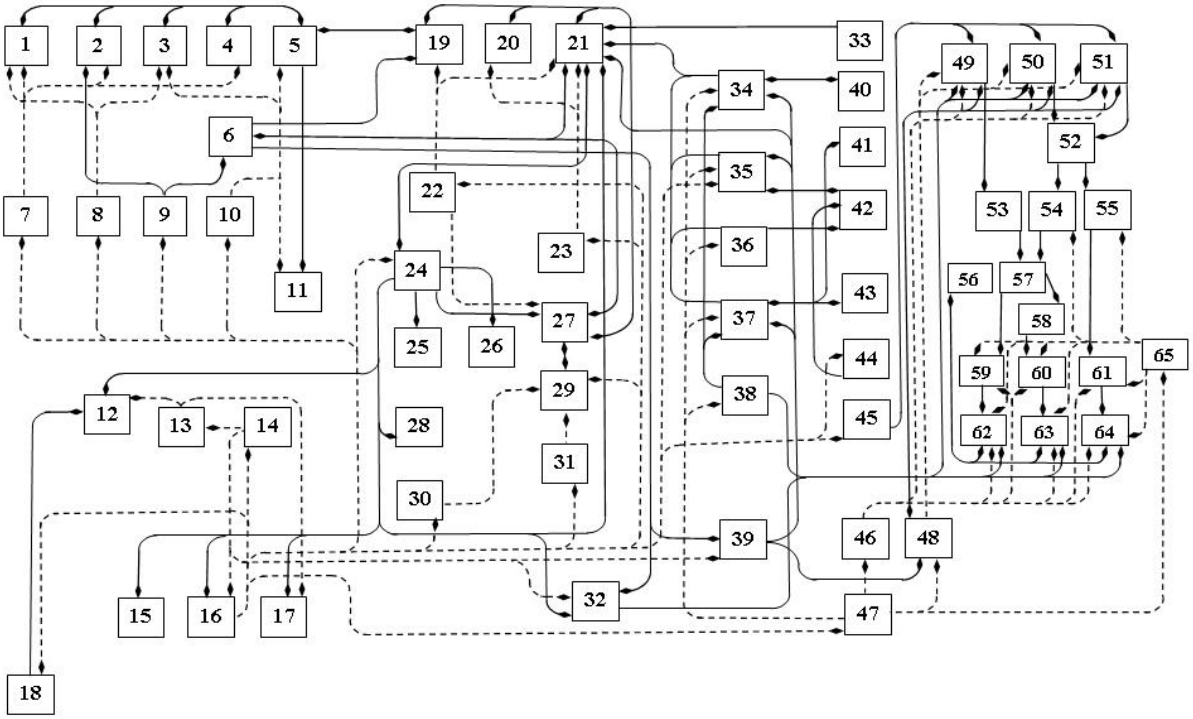
К примеру, для графа системы, изображенного на рис. 1.1, предельным будем считать состояние, когда надежность элемента v_3 опустится ниже отметки 0.4. Тогда, предельное состояние этой системой достигается (см. табл. 1.1) при импульсном воздействии $\mathbf{Imp}_1(0) = (1,0.75,1,0.75)$ за время $t_1 = 3$, а при $\mathbf{Imp}_2(0) = (0.75,1,1,1)$ за время $t_1 = 3$ (учитывая и резервное соединение).

И в первом, и во втором случаях время, определяющее стойкость системы, равно трем единицам, но во втором случае система переходит в предельное состояние при меньшем воздействии, по сравнению с первым. Для того чтобы предотвратить переход системы в предельное состояние под влиянием импульсного воздействия $\mathbf{Imp}_1(0)$, достаточно повысить надежность элемента v_3 до 0.95.

1.6. Исследование стойкости технической системы

На рис. 1.8 изображен граф системы управления сложных техническим объектом, имеющий два вида связей. Важно, что граф изображенный на рис. 1.8 со всеми показателями качественного состояния элементов и коэффициентов сопротивляемости получен при экспертной поддержке специалистов соответствующего профиля.

Система может быть подвержена двум типам внешних воздействий. Первый – электромагнитные воздействия, которые могут распространяться по обоим видам связей. Второй – информационные воздействия, которые могут распространяться только по связям, изображенными сплошными



1. постоянное запоминающее устройство
2. постоянное запоминающее устройство
3. оперативное запоминающее устройство
4. процессор
5. канал ввода-вывода
6. формирователь тактовой сетки
7. вторичное устройство питания (ВИП)
8. ВИП
9. ВИП
10. ВИП
11. согласующее устройство
12. устройство стабилизации
13. ВИП
14. стабилизатор тока
15. прибор управления исполнительными элементами
16. батарея электропитания
17. прибор управления исполнительными элементами
18. блок датчиков
19. контроллер
20. устройство обмена
21. устройство обмена
22. ВИП
23. ВИП
24. распределитель
25. датчик
26. распределитель
27. прибор управления
28. датчик
29. оперативное запоминающее устройство
30. ВИП
31. ВИП
32. усилитель-преобразователь
33. преобразователь координат
34. преобразователь угла
35. электронный блок акселерометров
36. электронный блок магнитного подвеса
37. преобразователь угла
38. блок аварийного отключения
39. блок тактовой частоты
40. датчик команд
41. датчик команд
42. датчики акселерометров
43. датчик команд
44. устройство термостатирования
45. устройство термостатирования
46. блок питания (БП)
47. стабилизатор тока
48. БП
49. гироблок
50. гироблок
51. гироблок
52. датчик
53. предварительный усилитель (ПУ)
54. ПУ
55. ПУ
56. датчик
57. преобразователь
58. ПУ
59. усилитель-корректор (УК)
60. УК
61. УК
62. усилитель мощности (УМ)
63. УМ
64. УМ
65. БП

***Рис*. 1.8.** Граф системы управления. Пунктирными линиями изображены связи, по которым подается напряжение, а сплошными – информационный сигнал.

линиями.

Компьютерный эксперимент, в котором поочередно к каждой вершине прилагались различные затухающие импульсные воздействия (1.4), выявил ряд особенностей в поведении исследуемой системы.

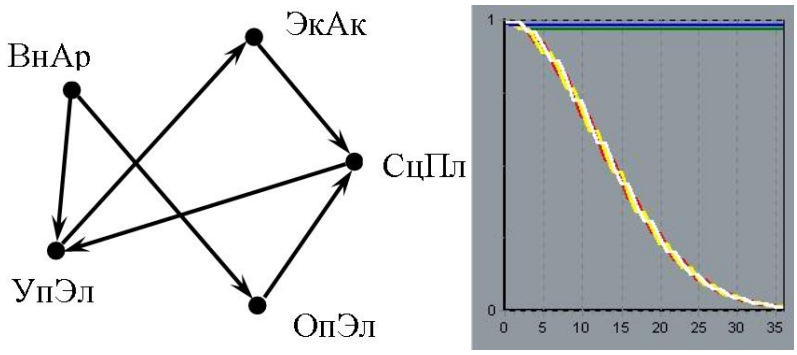
Если импульсное воздействие приложено к элементу 16, то из строя в течение незначительного промежутка времени выходит более 90% элементов системы.

Если импульсное воздействие одновременно приложено сразу к двум элементам – 31 и 32, то из строя выходит более 80% элементов системы, в то время как те же импульсные воздействия приложенные к этим элементам поочередно не приносят существенного ущерба.

Обнаружены группы элементов – 1-5, 34-38 и 48-50, – которые являются *внутренними источниками воздействий.* Каждая из этих групп составляют в графе системы контуры обратной связи. “Зацикливание” импульсного воздействия в контуре графа системы приводит к периодическому изменению весов вершин самого контура, и оказывает влияние на веса соседних с вершинами контура вершин графа. Внутренние источники импульсных воздействий на графах систем приводят к появлению *остаточного эффекта*, когда из строя выходят элементы спустя длительное время после попадания системы вод влияние внешних воздействий.

1.7. Моделирование региональной социально-экономической системы в условиях внешних воздействий

В рамках предлагаемого подхода возможно исследование и социально-экономических систем. Это позволяет определить ряд сценариев, по которым будет развиваться система при различных внешних воздействиях. Полезность и практичность такого подхода продемонстрирована когнитивной моделью управления государством на примере Союза Сербии и Черногории.

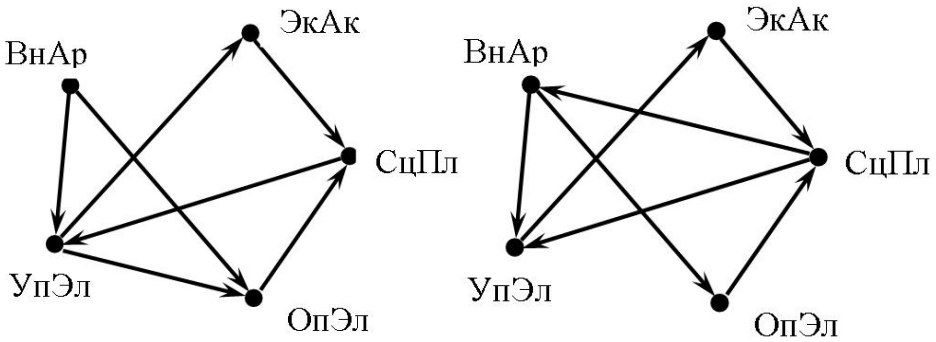


(*а*) (*б*)

***Рис.* 1.9.** Структура региональной социально-экономической системы

На рис. 1.9 представлена структура социально-экономической системы (см. рис 1.9а) типичная для многих небольших регионов (республик, областей) Российской Федерации. Система состоит из пяти основных элементов: **СцПл –** социальное положение (напряженность) в регионе, **ОпЭл** – оппозиционная элита региона, **УпЭл** – управленческая элита региона, **ВнАр** – внешний арбитр, **ЭкАк –** экономическая активность региона.

Целесообразно также использовать в исследуемой модели *управляющие воздействия*, позволяющие повышать значения качественных по-



(*в*) (*г*)

***Рис.* 1.9.**

казателей состояния элементов системы в любой момент времени, вмешиваясь тем самым в процесс распространения дестабилизирующих импульсных воздействий по системе. А также *внутренний ресурс системы* – периодическое восстановление значений качественных показателей состояния элементов системы на определенную величину.

Исследование модели разумно проводить при различных исходных данных (показателях качественного состояния элементов системы и коэффициентах сопротивляемости ребер) о состоянии системы и импульсных

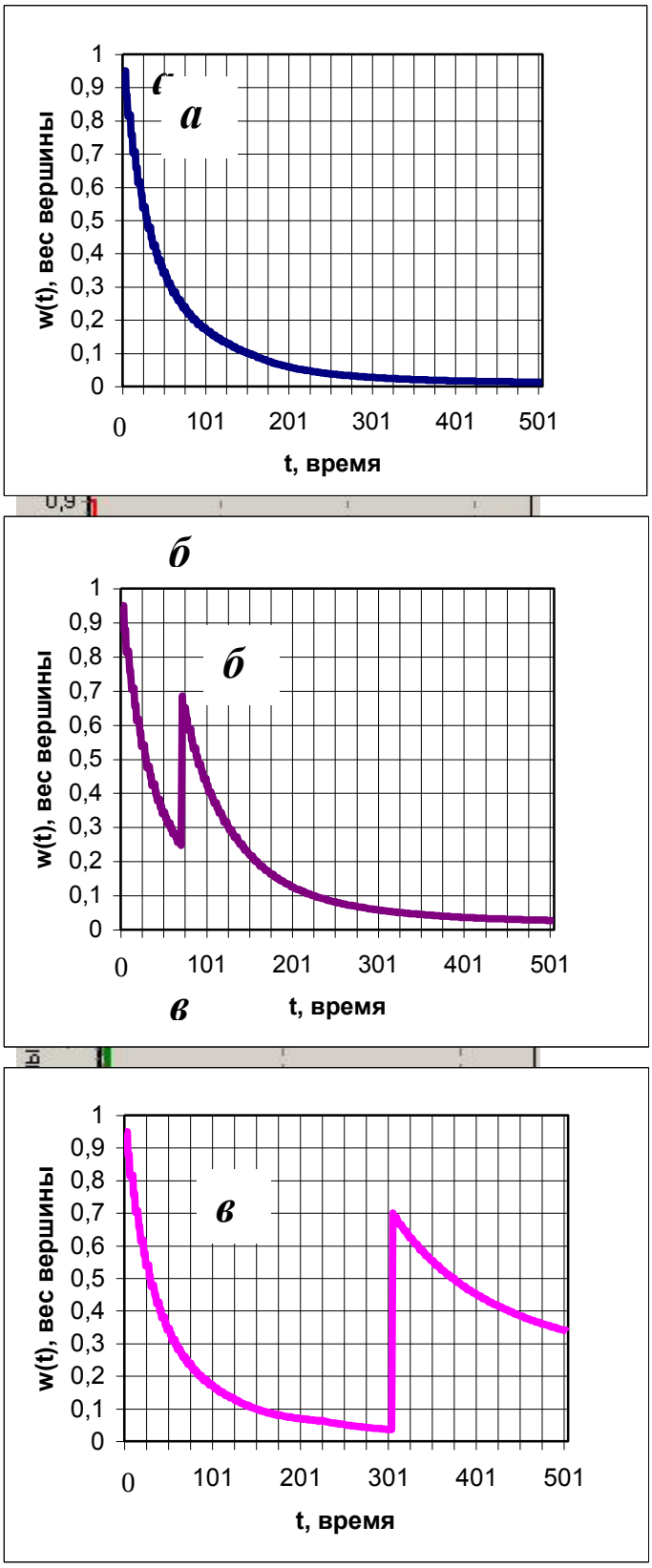


Рис. **1.11**

воздействиях приложенных к различным вершинам. Это позволит сделать наиболее достоверные выводы о стойкости системы.

Своего критического уровня $cr(СцПл) = 0{,}01$ система со структурой на рис. 1.9*а* достигает за *характеристическое время* t=33 (см. рис. 1.9*б*). Если в структуру системы добавить обратные связи (к примеру УпЭл→ОпЭл или СцПл→ВнАр, см. рис. 1.9*в* и рис. 1.9*г*), то, на первый взгляд, система должна стать более стойкой к внешним воздействиях. Но при указанных структурных изменениях система характеристическое время уменьшиться почти вдвое.

На рис. 1.10(*а*) представлен график изменения основного показателя системы – СцПл исследуемой региональной социально-экономической системы с внутренним ресурсом и внешним затухающем воздействии, приложенным к вершине (элементу) ВнАр. Наблюдается падение основного показателя.

На рис. 1.10(*б*) представлен график изменения основного показателя системы СцПл, когда то же самое по величине внешнее затухающее воздействие, что и в предыдущем случае, при тех же исходных данных системы приложено к другому элементу системы – к вершине (элементу) ОпЭл. В такой ситуации, в отличие от предыдущей, системе удается восстановиться, благодаря внутреннему ресурсу, и зафиксировать значение основного показателя на некотором стабильном уровне, хотя и ниже исходного.

На рис. 1.10(*в*) показан график изменения основного показателя системы СцПл, когда импульсное воздействие в два раза меньшее, чем ранее, приложено сразу к двум элементам системы – ОпЭл и ВнАр. Наблюдается падение значение СцПл.

Управляющие воздействия являются основным инструментом повышения значений показателей качественного состояния элементов системы. Но величина управляющего воздействия, время и точка его приложения должны быть определены в зависимости от распространяемого по системе импульсного воздействия.

На рис. 1.11(*а*) изображен график изменения основного показателя исследуемой региональной социально-экономической системы с внутренним ресурсом, когда затухающее импульсное воздействие приложено к элементу ВнАр. Наблюдается падение основного показателя.

Управляющее воздействие, приложенное к системе в момент времени t=75 (см. рис. 1.11(*б*)), повысит значение показателей качественного состояния ее элементов, но не повлияет на общее состояние системы в дальнейшем.

Управляющее воздействие, приложенное к системе в более поздний момент распространения по ней импульсных воздействий приводит к иному результату (см. рис. 1.11(*в*). Основной показатель системы не понижается, а стабилизируется, хотя и уровне более низком, чем первоначальный. Это объясняется тем, что в предыдущем случае управляющее воздействие

было приложено к системе, когда по ней распространялось импульсное воздействие, величина которого позволяла поглотить повышение значение показателей качественного состояния элементов системы.

Для обеспечения стойкости системы как новой задачи в рамках концепции управления рисками возможны два подхода.

Первый – тривиальный – наделение системы достаточным внутренним ресурсом, позволяющим противостоять любым внешним дестабилизирующим воздействиям.

Второй – изменение (периодические или единовременные) структуры системы, т.е. изменение связей между элементами системы, позволяющие повышать стойкость системы, "убирая" из структуры системы наиболее опасные и уязвимые взаимосвязи. Второй подход очерчивает новое направление теории управления сложными системами – *структурное управление*.

1.8. Экспериментальное программное обеспечение для исследования сложных систем в условиях внешних воздействий

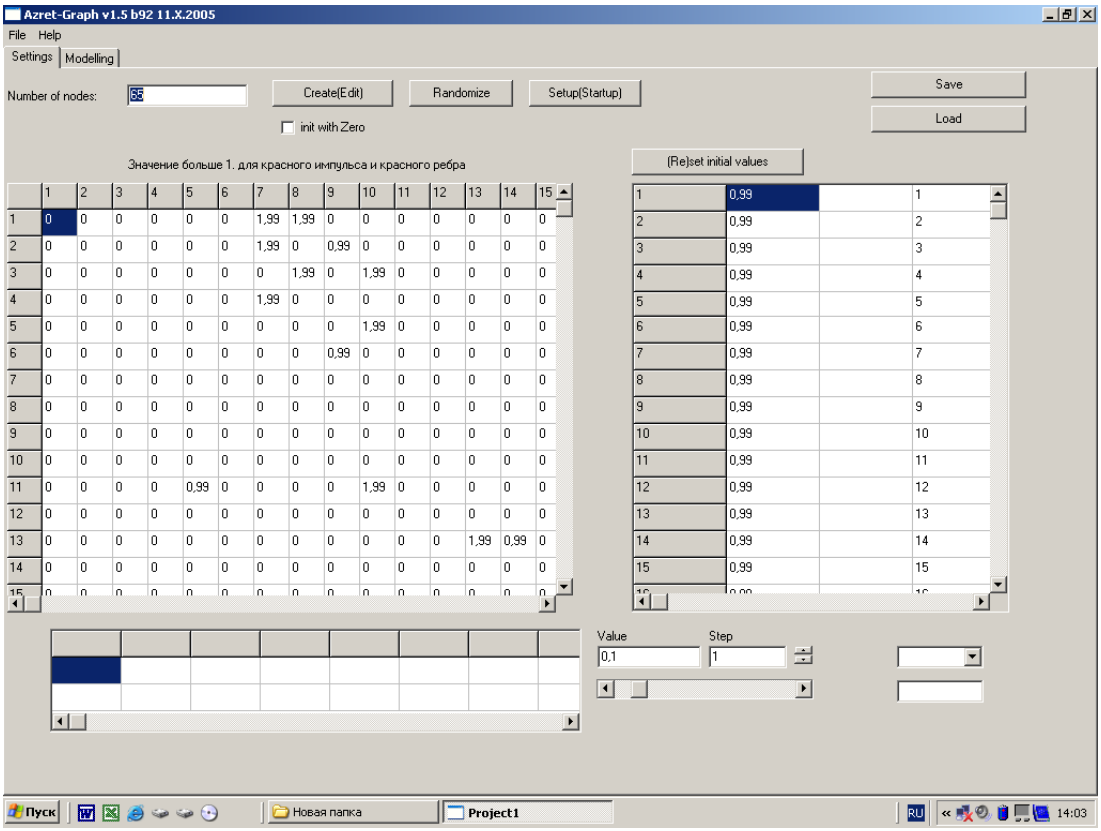


***Рис.* 1.12(*а*)**

Для экспериментального исследования сложных систем большой размерности разработано программное обеспечение, которое позволяет рассмотреть систему в различных условиях внешних воздействий.

Интерфейс программы позволяет задавать в окне Setting (см. рис. 1.12*а*) граф системы, вектор показателей качественного состояния элементов системы и вектор импульсных воздействий.

В окне Modeling (см. рис. 1.12*б*) программа представляет результаты моделирования, где можно проследить за изменением показателя качественного изменения любого элемента системы.

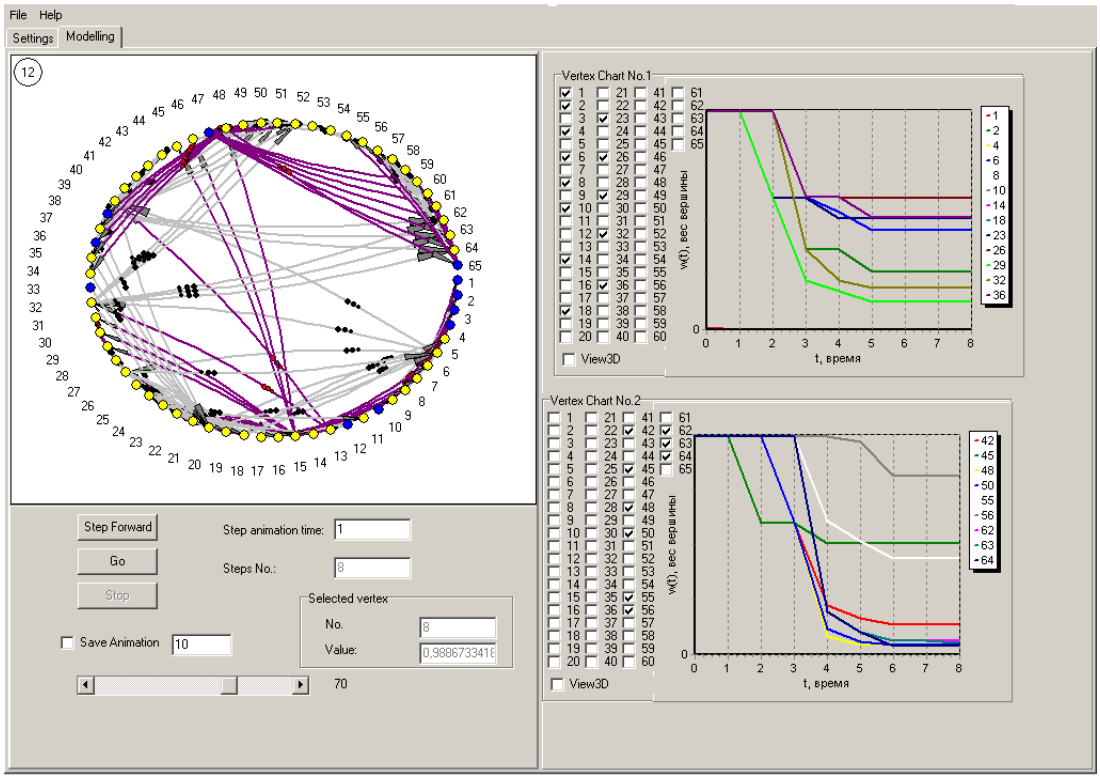


***Рис.* 1.12(*б*)**

1.9. Выводы

Как показывает практика, графы являются удобным, и поэтому широко используемым инструментом в математическом моделировании. Заслужено популярны графы в физике [67], химии [68,69], биологии [70,71], технике [50,72,73], экономике [74,75], географии [76] и т.д. Не смотря на то, что графы являются универсальным инструментом, они еще не нашли должного применения в синергетике. В качестве исключения можно сослаться на цикл работ [38,77–79] и монографию [80], где графы используются в моделировании сложных динамических систем с целью получения картины их поведения.

Предложенная в настоящей главе математическая модель распространения внешних воздействий по системе позволяет объяснить ряд явлений, наблюдаемых в сложных технических системах при попадании их в условия внешних воздействий (форс-мажорные обстоятельства). В частности, становится ясно, каким образом при внешних воздействиях выходят из строя (достигают предельного состояния) элементы, не получавшие импульсного воздействия непосредственно. Показано, что причиной выхода из строя элементов системы вне зоны форс-мажорных обстоятельств (после окончания влияния внешних воздействий) являются *внутренние источники возмущений*.

Существенной особенностью построенной модели является возможность выхода из строя при распространении импульсных воздействий по системе наиболее надежных элементов. Этот факт красноречиво подчеркивает *прямую зависимость надежности элемента от его положения в структуре, а также зависимость стойкости всей системы от выбранной при проектировании структуры*. Найденные в ходе исследования модели явление относятся к классу синергетических эффектов [81], прогнозирование которых на начальных этапах исследования не тривиально.

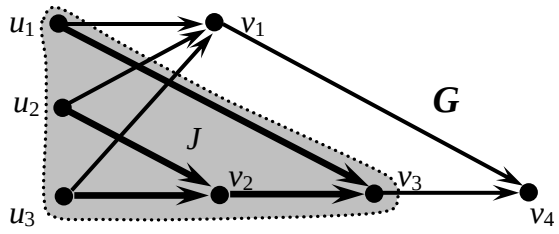


***Рис.* 1.13.** Множество уязвимости и граф уязвимости вершины v_3 графа G.

Граф уязвимости $J=(U,W)$ вершины v_3 на графе G нарисован “жирными” стрелками. Множество уязвимости $U=\{u_1,u_2,u_3,v_2,v_3\}$ вершины v_3 очерчены пунктирной линией. Внешние воздействия, приложенные ко всем или некоторым элементам множества уязвимости вершины v_3, в состоянии привести к выходу из строя элемента системы, соответствующего этой вершине.

Использование предложенных в работе характеристик (структурная уязвимость, предельная надежность) для оценки состояния элементов при внешних воздействиях, с одной стороны, позволяет решить оптимизационную задачу – резервирование наиболее подверженных внешнему влиянию

элементов системы (см. алгоритм ПС в параграфе 1.5). С другой стороны, искусственно направленные воздействия на множество уязвимости (см. рис. 1.13) некоторого элемента системы выведут этот элемент из строя.

В общем, руководствуясь предложенной моделью, можно говорить о стойкости системе по отношению к конкретным воздействиям. В случае, когда класс воздействий за время их распространения по структуре системы не переводит ее в предельное состояние, система считается *абсолютно стойкой* к этому классу воздействий. $\vartheta = \mathrm{F}(\sigma_D(t), \sigma_N(t))$

В работе представлены рекомендации (см. параграф 1.5) по наделению системы требуемым уровнем стойкости к внешним поражающим воздействиям. С одной стороны, это позволяет уменьшить риск [38] возникновения ЧС (аварий, и катастроф) в системах, функционирование которых предполагается в условиях внезапных внешних воздействий, на необходимый промежуток времени. К подобным системам относятся системы управления при ЧС, военная техника и т.д. С другой, определение значения стойкости к заданным внешним воздействиям позволяет предупредить возможность возникновения ЧС.

Таким образом, стойкость является одним из параметров управления риском возникновения угроз и опасностей в сложных системах, что принципиально важно для обеспечения безопасности этих систем [82].

Глава II. Синтез и анализ сложных структур большой размерности

Задача построения структур с заданными характеристиками появляется там, где требуется объединить элементы, часто различной природы, в целостную функционирующую систему. В настоящее время, в эпоху “больших задач”, создание структур с большой размерностью (с большим числом элементов) имеет особое значение.

Проследить за сохранением (или, наоборот, отсутствием) определенных качественных характеристик при проектировании сложных структур – сложная и важная задача для многих организационных структур и структур “естественных”, возникающих в геологии, геофизике, астрофизике и т.д.

В настоящей главе предлагает новый метод проектирования и анализа сложных многоэлементных структур. В основе метода лежит свойство самоподобия *фрактальных графов*. *Предфрактальный граф*, конечный аналог фрактального графа, - есть симбиоз графа и фрактала. Использование свойства самоподобия дает возможность “программирования” предфрактального графа, наделения требуемыми характеристиками и свойствами

2.1. Моделирование “тесных миров”

В 1967 г. социолог из Гарвардского университета С. Милграм [83] сделал утверждение о том, что каждого человека можно связать с любым другим человеком на земном шаре из цепочки из шести знакомых. Дальнейшие исследования помогли найти много аргументов в пользу гипотезы С. Милграма. Этот феномен получил название “тесного (маленького) мира” (“small world”). В 90-х годах прошлого века эмпирически было доказано, что подобным свойством обладают структуры многих социальных тех-

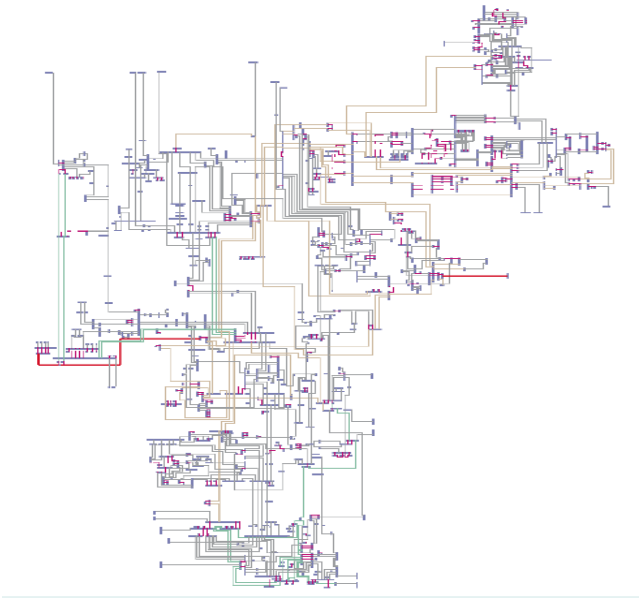


***Рис.* 2.1.** Электроэнергетическая система штата Нью-Йорк.

нических систем. Например: электроэнергетические сети (см. рис. 2.1), WWW (Internet), нейронные сети, метаболические сети клеток, сети научного и корпоративного (см. рис. 2.2) сотрудничества и т.д.

Структура таких систем по истечении времени претерпевает определенные изменения, вызываемые различными внешними обстоятельствами. Изменения в структуре систем могут быть описаны простейшими теоретико-графовыми операциями: стягивание ребра, удаление (добавление) ребра, удаление (добавление) вершины. Изменения структуры системы могут быть разовыми, а могут быть постоянными. Для второго случая разумно ввести понятие *структурной динамики,* – понимая под ней, изменение структуры системы с течением времени. Несомненно, для описании структурной динамики лучше всего подходит аппарат теории графов.

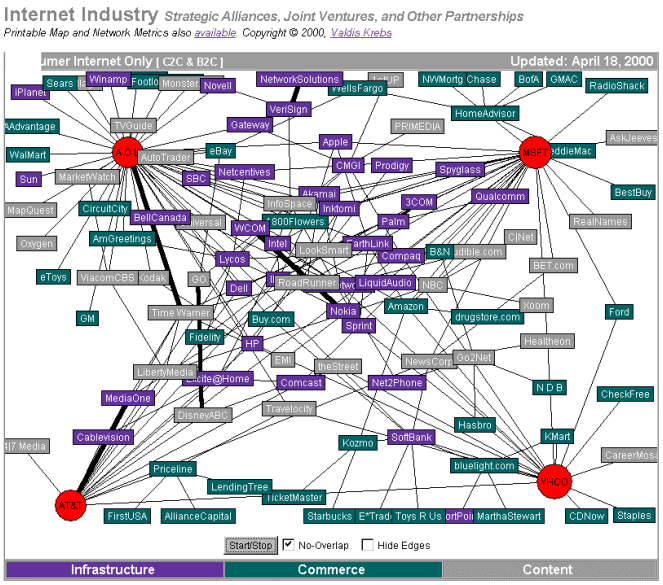


***Рис.* 2.2.** Электроэнергетическая система штата Нью-Йорк.

Одним из наиболее распространенных сценариев структурной динамики является *рост структуры*. Рост структуры – это регулярное появление новых элементов и

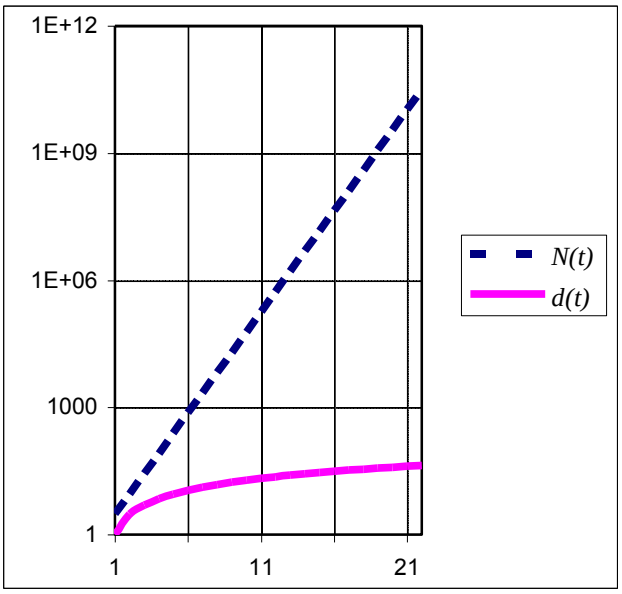


***Рис.* 2.3.** *N(t)* – число вершин, *d(t)* – диаметр.

связей в структуре системы. Рост структуры происходит по строго сформулированным правилам, определяющим предпочтительность присоединение новых элементов со старыми. Не исключается наличия в них фактора случайности.

Структуры систем, обладающих свойством “тесного мира”, – динамически растущие структуры. Феномен “тесного” мира в терминах теории графов можно интерпретировать как графы с быстро растущим числом вершин при незначительно изменяющемся диаметре (см. рис. 2.3).

В настоящей работе для описания сложных структур, обладающих свойством “тесного мира”, предлагаются так называемые *фрактальные графы.*

2.2. Фрактальные и предфрактальные графы

Термином *затравка* условимся называть какой-либо связный граф $H=(W,Q)$. Для определения *фрактального (предфрактального) графа* нам потребуется операция *замены вершины затравкой (ЗВЗ)*. Суть операции ЗВЗ заключается в следующем. В данном графе $G=(V,E)$ у намеченной для замещения вершины $\tilde{v}\in V$ выделяется множество $\tilde{V}=\{\tilde{v}_j\}\subseteq V$, $j=1,2,\ldots,|\tilde{V}|$, смежных ей вершин. Далее из графа G удаляется вершина $\tilde{v}$ и все инцидентные ей ребра. Затем каждая вершина $\tilde{v}_j\in\tilde{V}$, $j=1,2,\ldots,|\tilde{V}|$, соединяется ребром с одной из вершин затравки $H=(W,Q)$. Вершины со-

единяются произвольно (случайным образом) или по определенному правилу, при необходимости.

Предфрактальный граф будем обозначать через $G_L = (V_L, E_L)$, где V_L – множество вершин графа, а E_L – множество его ребер. Определим его рекуррентно, поэтапно, заменяя каждый раз в построенном на предыдущем этапе $l = 1,2,...,L-1$ графе $G_l = (V_l, E_l)$ каждую его вершину затравкой $H = (W, Q)$. На этапе $l = 1$ предфрактальному графу соответствует затравка $G_1 = H$. Об описанном процессе говорят, что *предфрактальный граф* $G_L = (V_L, E_L)$ *порожден затравкой* $H = (W, Q)$. Процесс порождения предфрактального графа G_L, по существу, есть процесс построения последовательности предфрактальных графов $G_1, G_2, ..., G_l, ..., G_L$, называемой *траекторией*. Фрактальный граф $G = (V, E)$, порожденный затравкой $H = (W, Q)$, определяется бесконечной траекторией.

Использование операции ЗВЗ в процессе порождения предфрактального графа G_L, для элементов $G_l = (V_l, E_l)$, $l \in \{1,2,...,L-1\}$, его траектории позволяет ввести отображение $\varphi : V_l \to V_{l+1}$ или $\varphi(V_l) = V_{l+1}$, а в общем виде

$$\varphi^t(V_l) = V_{l+t}, \quad t = 1,2,...,L-l. \tag{2.1}$$

В выражении (1) множество V_{l+t} – *образ* множества V_l, а множество V_l – *прообраз* множества V_{l+t}.

Для предфрактального графа G_L, ребра, появившиеся на l-ом, $l \in \{1,2,...,L\}$, этапе порождения, будем называть *ребрами ранга* l. *Новыми* ребрами предфрактального графа G_L назовем ребра ранга L, а все остальные ребра назовем – *старыми*.

Если из предфрактального графа G_L, порожденного n-вершинной затравкой H, последовательно удалить все старые ребра (ребра ранга l,

$l = 1,2,\ldots,L-1$), то исходный граф распадется на множество связных компонент $\{B_L^{(1)}\}$, каждая из которых изоморфна [59] затравке H. Множество компонент $\{B_L^{(1)}\}$ будем называть *блоками первого ранга*. Аналогично, при удалении из предфрактального графа G_L всех старых ребер рангов $l = 1,2,\ldots,L-2$, получим множество *блоков* $\{B_L^{(2)}\}$ *второго ранга*. Обобщая, скажем, что при удалении из предфрактального графа G_L всех ребер рангов $l = 1,2,\ldots,L-r$, получим множество $\{B_{L,i}^{(r)}\}$, $r \in \{1,2,\ldots,L-1\}$, *блоком* r*-го ранга*, где $i = 1,2,\ldots,n^{L-r}$ -порядковый номер блока. Блоки $B_L^{(1)} \subseteq G_L$ первого ранга также будем называть *подграф-затравками* H предфрактального графа G_L.Очевидно, что всякий блок $B_L^{(r)} = (U_L^{(r)}, M_L^{(r)})$, $r \in \{1,2,\ldots,L-1\}$, является предфрактальным графом $B_r = (U_r, M_r)$, порожденным затравкой H.

Уточним для отображения φ в формуле (1.1) ряд подробностей. Для любой вершины $v_j \in V_l$, $j \in \{1,2,\ldots,n^l\}$, предфрактального графа $G_l = (V_l, E_l)$, $l \in \{1,2,\ldots,L-1\}$, из траектории графа G_L, справедливо

$$\varphi^t(v_j) = U_{l+t,j}^{(t)}, \tag{2.2}$$

$$\varphi^t(v_j) = B_{l+t,j}^{(t)}, \text{ где } B_{l+t,j}^{(t)} = (U_{l+t,j}^{(t)}, M_{l+t,j}^{(t)}) \subseteq G_{l+t}, \ t = 1,2,\ldots,L-l.$$

Аналогично,

$$\varphi^t(U_{l,i}^{(r)}) = U_{l+t,i}^{(r+t)}, \tag{2.3}$$

$$\varphi^t(B_{l,i}^{(r)}) = B_{l+t,i}^{(r+t)}, \ r \in \{1,2,\ldots,L-t\}, \ i \in \{1,2,\ldots,n^{l-r}\}.$$

Два блока предфрактального графа назовем *смежными*, если существует ребро, вершины которого принадлежат различным блокам. Не требует доказательства тот факт, что блоки предфрактального графа смежны тогда и только тогда, когда смежны их прообразы из (2.2).

Обобщением описанного процесса порождения предфрактального графа G_L является такой случай, когда вместо единственной затравки H используется множество затравок $\mathbf{H}=\{H_t\}=\{H_1,H_2,...,H_t,...,H_T\}$, $T\geq 2$. Суть этого обобщения состоит в том, что при переходе от графа G_{l-1} к графу G_l каждая вершина замещается некоторой затравкой $H_t\in\mathbf{H}$, которая выбирается случайно или согласно определенному правилу, отражающему специфику моделируемого процесса или структуры.

Термином *подграф-затравка* $z_s^{(l)}$ будем называть блок $B_{l,s}^{(1)}$, $s=\overline{1,n^{l-1}}$, первого ранга предфрактального графа G_l, $l=\overline{1,L}$ из траектории. Последовательное выделение подграф-затравок $z_s^{(l)}$ на графах $G_1,G_2,...,G_L$ из траектории предфрактального графа G_L разбивает множество ребер E_L на непересекающиеся подмножества подграф-затравок $Z(G_L)=\{z_s^{(l)}\}$, $l=\overline{1,L}$, $s=\overline{1,n^{l-1}}$. Такое разбиение на подмножества позволит нам сохранить информацию смежности старых ребер на момент их появления в предфрактальном графе. В траектории переход от графа G_{l-1} к G_l осуществляется $|V_{l-1}|=n^{l-1}$ операциями ЗВЗ, поэтому общее число использованных затравок в порождении предфрактального графа G_L равно $1+n+n^2+...+n^{L-1}=\dfrac{n^L-1}{n-1}$. Тогда мощность множества $Z(G_L)$ всех подграф-затравок из траектории графа G_L также равно $Z(G_L)=\dfrac{n^L-1}{n-1}$.

На рис. 2.4 изображена траектория предфрактального графа $G_3=(V_3,E_3)$, порожденного затравкой $H=(W,Q)$ – полным 4-вершинным графом. Самыми “жирными” линиями нарисованы ребра подграф-затравки $z_1^{(1)}$.

Линиями средней “жирности” нарисованы ребра подграф-затравок $z_1^{(2)}$, $z_2^{(2)}$, $z_3^{(2)}$ и $z_4^{(2)}$. И наконец, тонкими линиями нарисованы новые ребра предфрактального графа G_3, которые образуют подграф-затравки $z_s^{(3)}$, $s=\overline{1,16}$.

Будем говорить, что *предфрактальный граф* $G_L=(V_L,E_L)$ *– взве-*

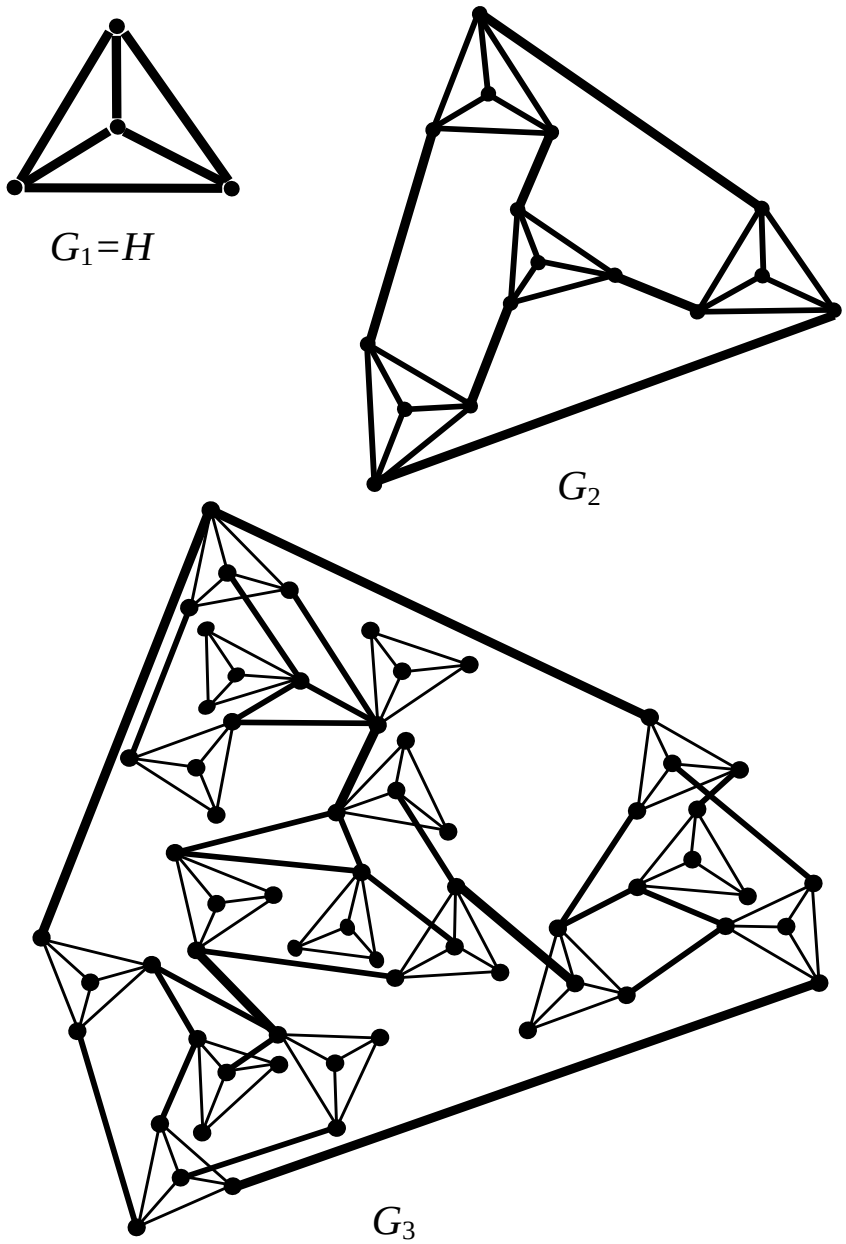


***Рис.* 2.4.** Траектория предфрактального графа $G_3=(V_3,E_3)$. Жирными линиями нарисованы ребра первого ранга. Линиями средней жирности нарисованы ребра второго ранга. Тонкими линиями нарисованы новые ребра – ребра третьего ранга.

шен, если каждому его ребру $e^{(l)} \in E_L$ приписано действительное число $w(e^{(l)}) \in (\theta^{l-1}a, \theta^{l-1}b)$, где $l = \overline{1, L}$ – ранг ребра, $a > 0$, и $\theta < \dfrac{a}{b}$.

2.3. О НЕКОТОРЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ И МЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ СЛОЖНЫХ СТРУКТУР

Целесообразно, установить точное соответствие между свойствами исследуемой структуры и топологическими характеристиками соответствующей ей графа. За основу возьмем характеристики, предложенные в работе [59].

Иерархичность – свойство структуры, которое проявляется в связях между элементами. Эта характеристика позволяет распределить элементы структуры в порядке их значимости. Значимость элемента определяется связями и расположением соответствующей ему вершины в графе по отношению к другим вершинам. На предфрактальном графе, к примеру, значимость ребер убывает с ростом их ранга. Чем “старее” ребра, т.е. чем ниже ранг ребер, тем больше вершин в подграфах, которые они соединяют.

Диаметр структуры – диаметр графа [59], метрическая характеристика, введенная для определения кратчайшего расстояния между наиболее удаленными вершинами. По значению диаметра можно косвенно судить о ряде предельных параметров системы, в частности о ее надежности, пропускной способности и т.д. [59]. *Пропускная способность* структуры [59] определяется максимальным потоком сообщений, который можно организовать между ее элементами. При равной пропускной способности элементов, пропускная способность всей структуры обратно пропорциональна ее диаметру [59]. Поэтому при проектировании структур с высокой пропускной способностью естественно стремиться к структуре с минимальным диаметром.

Связность – способность “противостоять” разбиению, разделению структуры на части. Теория графов оперирует реберной и вершинной связностью [59]. Они позволяют оценить топологию структуры на “крепость”, и поэтому важны в проектировании структур. К характеристикам, оценивающим связность графов, можно отнести так же число точек сочленения и мостов [7]. К ним прибегают, когда граф имеет связность равную единицы.

Распараллеливание – возможность обработки исследуемой структуры несколькими процессорами (процессами) [87,88]. Это свойство трудно недооценить в сложных структурах.

В порождении предфрактального графа важное место занимает случайный характер связей между старыми ребрами. Именно, это не позволяет нам рассматривать точные количественные значения его характеристик. В таком случае разумнее рассматривать интервалы, в которых варьируются значения тех или иных характеристик. На практике, для анализа и проектирования сложных структур с использованием предфрактальных графов, достаточными могут быть интервалы (или количественные оценки), а не точные значений этих характеристик. Ниже будут даны оценки рассмотренных в этом параграфе характеристик, и описаны условия достижимости их концов.

2.4. Связность

2.4.1. Число реберной связности

Числом реберной связности $\lambda(H)$ графа $H=(W,Q)$ назовем наименьшее число ребер, удаление которых приведет к нарушение связности графа H.

Теорема 2.1. *Для всякого предфрактального графа* $G_L=(V_L,E_L)$, *порожденного затравкой* $H=(W,Q)$, *справедливо равенство* $\lambda(G_L)=\lambda(H)$.

Доказательство. Следуя условиям теоремы, выделим произвольно на затравке H число $\lambda(H)$ ребер $e_i = (v_i', v_i'')$, $i = \overline{1, \lambda(H)}$, удаление которых приводит к распадению графа H на компоненты $H' = (W', Q')$ и $H'' = (W'', Q'')$. Не будем заострять внимание на доказательстве невозможности появления более чем двух компонент. Фактически, удаление ребер $e_i \in Q$ приводит к нарушению любых связей между множествами вершин $\{v_i' = W'\}$ и $\{v_i'' = W''\}$, где $i = \overline{1, \lambda(H)}$. По этой причине и происходит распад затравки H на компоненты. Рассмотрим процесс порождения и траекторию предфрактального графа G_L. На протяжении всей траектории, как следует из определения предфрактального графа, старые ребра первого ранга e_i, $i = \overline{1, \lambda(H)}$, будут инцидентны образам вершин v_i' и v_i''. Поэтому удаление всех ребер e_i, $i = \overline{1, \lambda(H)}$, в любом предфрактальном графе G_l, $l = \overline{1, L}$, из траектории приведет к нарушению связностей между образами вершин v_i' и v_i''. А это повлечет за собой разделение предфрактального графа G_l на две компоненты. Тем самым мы доказали, что $\lambda(G_L) \le \lambda(H)$. Докажем, что $\lambda(H)$ - наименьшее число ребер, удаление которых приведет к разрушению предфрактального графа G_L на компоненты.

Число реберной связности $\lambda(G_l)$ предфрактального графа G_l из траектории не может уменьшаться при продвижении по траектории, $l = \overline{1, L}$, по двум причинам. Во-первых, операция ЗВЗ на этапе l, не влияет на число старых ребер ранга $l-1$, $l = \overline{2, L}$. Во-вторых, предфрактальный граф G_l, $l = \overline{1, L}$, состоит из множества затравок, соединенных старыми ребрами различных рангов. Отсюда верно равенство $\lambda(G_L) = \lambda(H)$. ◄

2.4.1. Число вершинной связности

Числом вершинной связности $\chi(H)$ графа $H=(W,Q)$ назовем наименьшее число вершин, удаление которых приведет к несвязному или тривиальному графу.

Теорема 2.2. *Для всякого предфрактального графа* $G_L=(V_L,E_L)$ *число вершинной связности* $\chi(G_L)=1$*, если смежность старых ребер не нарушается.*

Доказательство. Фактически, теорема гласит, что при сохранении условия смежности старых ребер число вершинной связности предфрактального графа не зависит от числа вершинной связности его затравки. А именно, смежность старых ребер приводит к появлению точек сочленения на предфрактальном графе. *Точкой сочленения графа* назовем вершину, удаление которой приведет к нарушению связности графа.

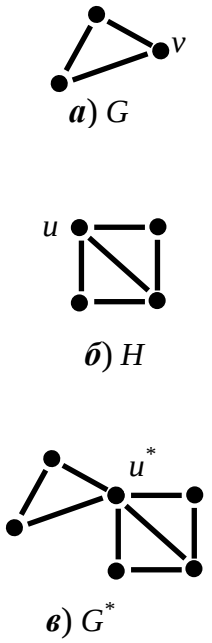


***Рис.* 2.5**

Рассмотрим два графа $G=(V,E)$ и $H=(W,Q)$. Выделим произвольно на графе G вершину $v\in V$ (рис. 2.5*а*) и множество инцидентных ей ребер $\omega(v)\in E$. На графе H аналогичным образом выделим вершину $u\in W$ (рис. 2.5*б*) и множество инцидентных ей ребер $\omega(u)\in Q$. Заместим вершину $v\in V$ графом H. Получим граф $G^*=(V^*,E^*)$ (рис. 2.5*в*), в котором множество вершин $V^*=V+W-v-u+u^*$, а множество ребер E^* определим следующим образом. Смежность вершин в подграфах $G-v\in G^*$ и $H-u\in G^*$ не меняется, а для вершины $u^*\in V^*$ множество инцидентных ей ребер представляет собой множество $\omega(u^*)=\omega(u)+\omega(v)\in E^*$.

Ясно, что при таком замещении вершины $v\in V$ любая простая цепь, содержащая одновременно вершины множеств $V-v\in V^*$ и $W-u\in V^*$ в

графе V^* будут содержать и вершину $u^* \in V^*$. Поэтому ввиду [59], можно утверждать, что вершина $u^* \in V^*$ есть точка сочленения графа G^*. А значит $\chi(G^*) = 1$. Таким образом, мы доказали, что, сохранив смежность ребер в замещенной вершине $v \in V$ графа G, превратили вершину $u^* \in V^*$ в точку сочленения для графа G^*.

Процесс порождения предфрактального графа G_L представляет собой последовательное использование операций ЗВЗ. Поэтому на основе доказанного выше утверждения можно сделать вывод. Сохранение смежности старых ребер в процессе порождения предфрактального графа приведет к появлению точек сочленения. А значит, и к уменьшению числа вершинной связности до $\chi(G_L) = 1$. ◄

Из доказанных теорем вытекают несколько важных для приложений следствий.

Регулярным называется граф, все степени вершин которого равны между собой.

Лемма 2.1. *Для всякого предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного затравкой $H = (W, Q)$, справедливо неравенство $\chi(G_L) \le \lambda(H)$.*

Доказательство. Для любого графа G верно неравенство $\chi(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$ [59], где $\delta(G)$ - наименьшая степень вершин графа G. Тогда непосредственно из теоремы 2.2 следует, что $\chi(G_L) \le \lambda(H)$. Важно, что достижимость $\chi(G_L) = \lambda(H)$ осуществляется при непересечении старых ребер на протяжении всей траектории предфрактального графа G_L. ◄

Лемма 2.2. *Для всякого предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного регулярной затравкой $H = (W, Q)$, справедливо равенство $\chi(G_L) = \lambda(G_L) = \delta(G_L) = a$, где a - натуральное число, если смежность старых ребер не сохраняется.*

Доказательство. Поэтому для регулярного графа H справедливо $\chi(H)=\lambda(H)=\delta(H)=a$ [59]. Согласно лемме 2.1, непересечение старых ребер предфрактального графа обеспечивает невозрастание его минимальной степени вершин $\delta(G_L)=\delta(H)$ и $\chi(G_L)=\lambda(H)$. А значит, на всей траектории предфрактального графа G_L сохраняется равенство $\chi(G_L)=\lambda(G_L)=\delta(G_L)=a$. ◄

Лемма 2.3. *Для любого натурального числа a можно построить предфрактальный граф G_L такой, что $\chi(G_L)=\lambda(G_L)=\delta(G_L)=a$.*

Доказательство. Для того, чтобы построить предфрактальный граф G_L с заданными характеристиками $\chi(G_L)=\lambda(G_L)=\delta(G_L)=a$, достаточно использовать для его порождения регулярную затравку H степени вершин a. Конечно, в процессе порождения смежность старых ребер не сохраняется. ◄

2.5.1. Число точек сочленения

Число точек сочленения графа $H=(W,Q)$ обозначим через $m(H)$.

Теорема 2.3. *Для всякого предфрактального (n,q,L)-графа $G_L=(V_L,E_L)$, порожденного затравкой $H=(W,Q)$, справедливы следующие верхняя и нижняя оценки для числа точек сочленения:* $n^{L-1}m(H)\le m(G_L)\le n^{L-1}m(H)+2q\dfrac{n^{L-1}-1}{n-1}$, *если затравка H - дерево.*

Доказательство. Очевидно, что на затравке H, как и на любом другом дереве, все вершины, за исключением висячих (ее степень равна единице), являются точками сочленения. А поскольку G_L - дерево, то максимальное число точек сочленения достигается, если в траектории старые ребра соединяют затравки таким образом, что число висячих вершин наименьшее. Найдем условия, при которых это может произойти.

Рассмотрим предфрактальный граф G_2 порожденный затравкой - деревом H. На этапе $l=2$ при ЗВЗ старые ребра могут принять два положения, относительно вершин затравок:

1) старые ребра инцидентны невисячим вершинам затравок, т.е. точкам сочленения затравок;
2) старые ребра инцидентны висячим вершинам затравок.

В первом случае число точек сочленения для графа G_2 равно $m(G_2)=m(H)n$, где n - число затравок в графе G_2, а во втором $m(G_2)=m(H)n+2q$, где q - число старых ребер.

Разница числа точек сочленения в первом и во втором случае составляет $2q$, это говорит о том, что каждое старое ребро в графе G_2 соединенное вторым способом дает две новые точки сочленения. Ясно, что если старые ребра соединены произвольно, то число точек сочленения ограничивается двойным неравенством: $m(H)n \le m(G_2) \le m(H)n+2q$.

Предположим теперь, что теорема верна для предфрактального дерева G_{L-1}, т.е. $n^{L-2}m(H) \le m(G_L) \le n^{L-2}m(H)+2q\dfrac{n^{L-2}-1}{n-1}$, это значит, что наименьшее число точек сочленения в графе G_{L-1} $m(G_L)=n^{L-2}m(H)$ возможно только лишь при инцидентности старых ребер невисячим вершинам затравок, а максимальное - $m(G_L)=n^{L-2}m(H)+2q\dfrac{n^{L-2}-1}{n-1}$, при инцидентности старых ребер висячим вершинам затравок. На следующем $l=L$ этапе порождения графа G_L, при выполнении условия 1) на всей траектории, число точек сочленения увеличится ровно в n раз, т.е. нижняя оценка имеет вид $m(G_L)=n^{L-2}m(H)\cdot n=n^{L-1}m(H)$. А верхняя оценка, достигаемая при выполнении условия 2) на всей траектории, отличается от нижней на

удвоенное число всех старых ребер -

$$m(G_L) = m(H)n^{L-1} + (2q\frac{n^{L-2}-1}{n-1} + 2qn^{L-2}) = m(G_L)n^{L-1} + 2q\frac{n^{L-1}-1}{n-1}.$$

При произвольном соединении старых ребер на $l = L$ этапе порождения число точек сочленения оценивается неравенством

$$n^{L-1}m(H) \le m(G_L) \le n^{L-1}m(H) + 2q\frac{n^{L-1}-1}{n-1}. \blacktriangleleft$$

Теорема 2.4. *Для всякого предфрактального* (n, q, L)*-графа* $G_L = (V_L, E_L)$*, порожденного затравкой* $H = (W, Q)$ *без точек сочленения, справедливы верхняя и нижняя оценки для числа точек сочленения* $n^{L-1} \le m(G_L) \le \frac{n^L - n}{n-1}$*, если смежность старых ребер одного ранга не нарушается.*

Доказательство. Рассмотрим предфрактальный граф G_2. Поскольку затравка H не имеет точек сочленения, то на графе G_2 они появятся только в том случае, если старые ребра первого ранга подходящие к затравкам остаются смежными, т.е. инцидентными одной вершине. Удаление каждой такой вершины неизбежно приведет к распадению графа G_2 на компоненты. Тогда число точек сочленения предфрактального графа G_2 равно $m(G_2) = n$, т.е. числу затравок.

На следующем этапе порождения $l = 3$, старые ребра одного ранга не нарушая смежности между собой, могут быть смежны еще и со старыми ребрами других рангов. И в этом случае число точек сочленения будет равно числу затравок графа G_3, $m(G_3) = n^2$. В случае же смежности ребер только лишь одного ранга, число точек сочленения равно общему числу всевозможных подграфов G_i, $i = 1,2$ из траектории G_3; количество подграфов $H = G_1$ равно n^2, а число G_2 равно n т.е. $m(G_3) = n(n+1) = \frac{n^3 - n}{n-1}$.

Ясно, что при смежности ребер одного ранга и необязательной при этом смежности старых ребер различных рангов, число точек сочленения графа G_3 будет ограничено неравенством $n^2 \le m(G_3) \le \dfrac{n^3 - n}{n-1}$.

Продолжая рассуждения аналогичным образом, предположим, что число точек сочленения $m(G_{l-1})$ графа G_{l-1} оценивается неравенством $n^{l-2} \le m(G_{l-1}) \le \dfrac{n^{l-1} - n}{n-1}$. По индукции, переходя в траектории от графа G_{l-1} к графу G_l, как и ранее, при выполнении условий теоремы, возможны два случая. Первый - достижение нижней оценки числа точек сочленения возможно, если старые ребра предыдущего ранга смежны как между собой так со старыми ребрами следующего ранга; в этом случае число точек сочленения графа G_l равно числу затравок этого графа - $m(G_l) = n^{l-1}$. При достижении же верхней оценки смежность только лишь ребер одного ранга, добавляет в граф G_l число точек сочленения равное числу затравок этого графа, т.е. $m(G_l) = \dfrac{n^{l-1} - n}{n-1} + n^{l-1} = \dfrac{n^l - n}{n-1}$, это значит что каждая операция ЗВЗ при порождении графа G_l дает по одной точке сочленения. В случае же произвольной смежности ребер различных рангов число точек сочленения $m(G_l)$ ограничивается двойным неравенством $n^{l-1} \le m(G_l) \le \dfrac{n^l - n}{n-1}$, $l = \overline{1, L}$. ◄

СЛЕДСТВИЕ 2.4.1. *Предфрактальный граф* $G_L = (V_L, E_L)$ *порожденный затравкой* $H = (W, Q)$ *без точек сочленения, не имеет точек сочленения, если старые ребра не пересекаются в траектории.*

ТЕОРЕМА 2.5. *Для всякого предфрактального* (n, q, L)*-графа* G_L*, порожденного затравкой* $H = (W, Q)$*, справедливы верхняя и нижняя оценки*

для числа точек сочленения $m(H)n^{L-1} \le m(G_L) \le m(H)n^{L-1} + \dfrac{n^L - n}{n-1}$, *если смежность старых ребер одного ранга не нарушается.*

Доказательство. Рассмотрим траекторию предфрактального графа G_L, порожденного затравкой H, имеющей $m(H)$ - точек сочленения. На этапе $l = 2$ порождения все точки пересечения старых ребер (первого ранга) могут совпасть с точками сочленения затравок и в этом случае $m(G_2) = m(H)n$, где n - число затравок графа G_2. При выполнении условий теоремы меньше чем $m(G_2) = m(H)n$ точек сочленения быть не может. В случае же несовпадения всех точек пересечения старых ребер с точками сочленения затравок, число точек сочленения $m(G_2)$ графа G_2 будет определено равенством $m(G_2) = m(H)n + n$, поскольку каждая пара смежных старых ребер в инцидентной им вершине дадут по точке сочленения графа G_2. А в общем, при произвольном размещении смежных старых ребер, число точек сочленения $m(G_2)$ графа G_2 ограничивается неравенством $m(H)n \le m(G_2) \le m(H)n + n$.

Продолжая рассуждения аналогичным образом, на l - ом этапе, $l = \overline{3, L}$, порождения в траектории графа G_L, получим, что число точек сочленения $m(G_l)$ графа G_l равно $m(G_l) = m(H)n^{l-1}$, при совпадении инцидентности смежных старых ребер с точками сочленения затравок. В противном случае, если каждая смежная пара старых ребер одного ранга не инцидентна ни одной из точек сочленения затравок, а значит каждая из таких пар дает по одной точке сочленения для графа G_l, то, как уже стало ясно, верхняя оценка достижима и равна $m(G_l) \le m(H)n^{l-1} + \dfrac{n^l - n}{n-1}$.

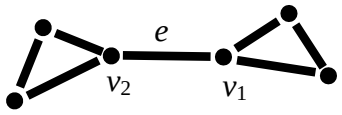
В целом при произвольной инцидентности пар старых смежных ребер с точками сочленений затравок или другими точками сочленения, по-

лученных в результате смежности старых ребер одного ранга, число точек сочленения $m(G_l)$ графа G_l оценивается двойным неравенством $m(H)n^{l-1} \le m(G_l) \le m(H)n^{l-1} + \dfrac{n^l - n}{n-1}$, $l = \overline{1, L}$. ◄

2.5.1. Число мостов

Мостом графа назовем ребро, удаление которого приводит к нарушению связности графа. *Число мостов* графа $H = (W, Q)$ обозначим через $k(H)$.

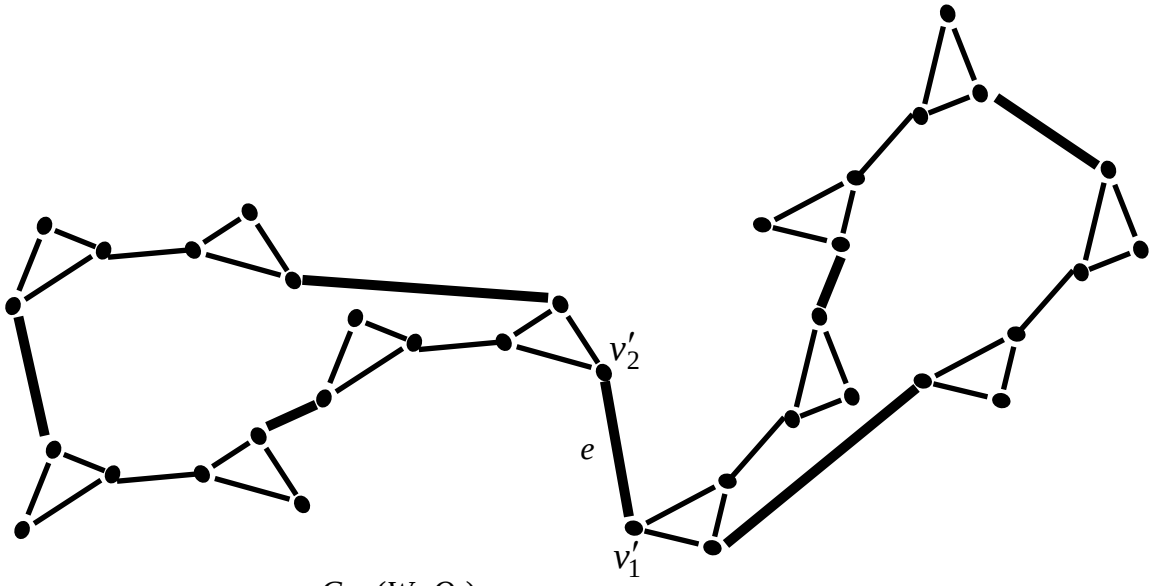
Теорема 2.6. *Для всякого предфрактального* (n, q, L)*-графа* $G_L = (V_L, E_L)$ *порожденного затравкой* $H = (W, Q)$*, справедливы верхняя и нижняя оценки для числа мостов:* $k(H) \le k(G_L) \le k(H)\dfrac{n^L - n}{n-1}$.



$G_1 = H = (W,Q)$

Рис.* 2.6*А

Доказательство. Рассмотрим траекторию предфрактального графа G_L порожденного затравкой $H = (W, Q)$. На затравке $H = (W, Q)$ выделим мост $e = \{v_1, v_2\} \in Q$ (см. рис. 2.6*А*), удаление кото-



$G_2 = (W_2, Q_2)$

Рис.* 2.6*Б

рого приводит к разделению затравки на две компоненты. На этапе $l=2$ порождения предфрактального графа G_L, после замещения всех вершин затравки, выделенное нами ребро (уже старое ребро 1-го ранга) $e=\{v_1',v_2'\}\in E_2$ (см. рис. 2.6*Б*) случайным образом соединит вершины двух подграфов-затравок предфрактального графа $G_2=(V_2,E_2)$. Но удаление ребра $e\in E_2$ приведет к распадению графа G_2 на компоненты, поскольку, как требует определение, мост $e\in E_2$ - единственная цепь соединяющая концы ребра e, независимо от того какие вершины $v_1\in W$ и $v_2\in W$ или же $v_1'\in V_2$ и $v_2'\in V_2$ оно соединяет. Из этих рассуждений вытекает, что все мосты затравки H остаются мостами на всей траектории графа G_L, поэтому $k(G_L)$-мостов предфрактального (n,L)-графа G_L не меньше числа $k(H)$- мостов затравки H, $k(G_L)\geq k(H)$.

Рассмотрим теперь произвольный предфрактальный граф $G_l^*=(V_l^*,E_l^*)$, $l=\overline{2,L}$, выделим на нем подграф-затравку $H=(W,Q)$, который, в отдельном от графа виде, имеет $k(H)$ мостов. На рис 5 ребра затравки изображены “тонкими” линиями, а старые ребра предфрактального графа G_l^* - “жирными”. Возникает вопрос - останутся ли мостами для графа G_l^* ребра являющиеся мостами на отдельно взятой затравке H. Пусть при удалении моста $e^*=\{v_1^*,v_2^*\}\in Q$, как следует из определения, затравка H распадается на две компоненты $H'=(W',Q')$ и $H''=(W'',Q'')$ (см. рис. 2.7*А*). Значит, для того чтобы ребро $e^*\in Q$ перестало быть мостом на самом графе G_l^*, достаточно, чтобы подграфам H' и H'' были инцидентны хотя

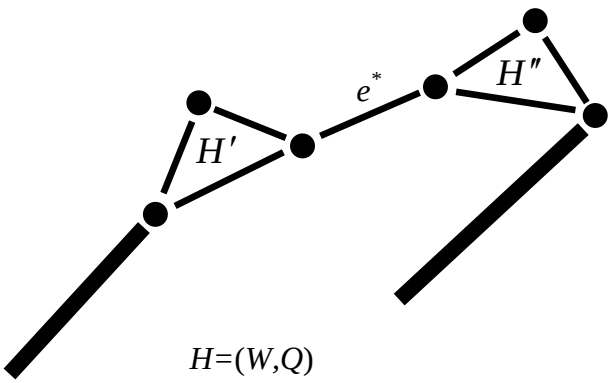


Рис.* 2.7*А

бы по одному старому ребру $(l-1)$-го ранга, тем самым нейтрализуя мост e^* и сохраняя связность графа G_l^*, при удалении ребра e^*. Описанное отражено на рис. 5*А*.

В случае же, если старые ребра $(l-1)$-го ранга сохраняют смежность, то ребро e^* - будет мостом и для всего графа G_l^*. Поскольку при его удалении связность предфрактального графа G_l^* нарушается. Этот случай проиллюстрирован на рис. 2.7*Б*.

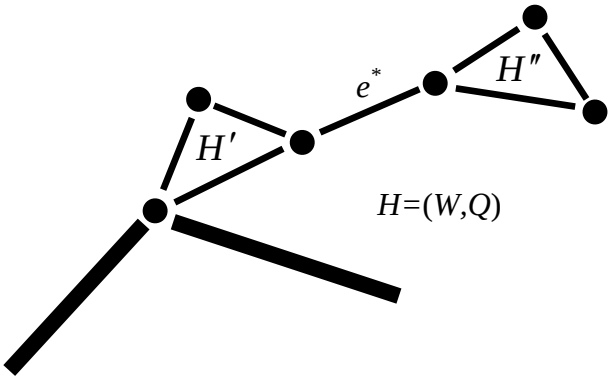


Рис.* 2.7*Б

Теперь стало ясно, что число мостов $k(G_L)$ предфрактального графа G_L, порожденного затравкой H, зависит от того, как часто сохраняется смежность старых ребер графа G_L. Если старые ребра $(l-1)$-го ранга предфрактального графа G_l, $l=\overline{2,L}$ из траектории предфрактального графа G_L подходят к подграфам-затравкам таким образом, что каждый их $k(H)$ мостов образует с какими-либо двумя из старых ребер одного ранга простую цепь, то мосты отдельно взятой затравки не будут мостами графа G_l, т.к. при их удалении из подграфа - затравки H, компоненты, на которые должна была бы распасться отдельная затравка, будут инцидентными старым ребрам, тем самым сохраняя связность самого графа G_l. В случае выполнения этого правила для всех графов G_l, $l=\overline{2,L}$ из траектории предфрактального графа G_L получим, что все мосты затравок, появляющихся в процессе порождения графа G_L, нейтрализуются старыми ребрами, кроме тех $k(H)$ мостов, которые существовали изначально на графе $G_1=H$, поскольку для этих мостов не существует старых

ребер меньшего ранга. Отсюда следует, что нижняя граница для числа мостов графа G_L определяется неравенством $k(G_L) \geq k(H)$.

Для нахождения верхней границы достаточно рассмотреть случай, когда в предфрактальном графе G_L сохраняется смежность старых ребер любого ранга. Действительно, при сохранении смежности старых ребер $(l-1)$-го ранга предфрактального графа G_l, $l = \overline{2, L}$, все старые ребра, подходящие к затравке H, будут смежными одной из компонент, полученных при удалении одного из мостов. А следовательно все $k(H)$ мосты затравки H останутся мостами и на графе G_l. Учитывая, что на графе G_l число затравок равно n^{l-1}, замечаем, что число его мостов по сравнению с графом G_{l-1} увеличится на $n^{l-1} \cdot k(H)$:

$$k(G_1) = k(H), \;\; k(G_2) = k(H) + nk(H), \ldots, \; k(G_l) = k(H) \cdot \frac{n^l - 1}{n-1}.$$

Итак, в процессе порождения графа G_L, двигаясь по его траектории, замечаем, что, в случае сохранения смежности старых ребер, число мостов растет по геометрической прогрессии, а ее сумма равна достижимой верхней границе $k(G_L) \leq k(H) + k(H) \cdot n^2 + \ldots + k(H) \cdot n^{L-1}$; $k(G_L) \leq k(H) \dfrac{n^L - 1}{n-1}$.

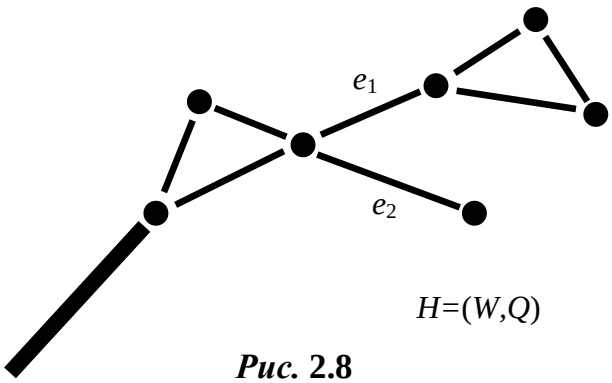


***Рис.* 2.8**

Обобщим полученные результаты. При произвольном построении фрактального графа G_L число его мостов $k(G_L)$ ограничивается неравенством $k(H) \leq k(G_L) \leq k(H) \dfrac{n^L - 1}{n-1}$. ◄

ПРИМЕЧАНИЕ 2.1. Возможны случаи, когда не все мосты затравки можно нейтрализовать старыми ребрами.

Первый случай. Затравка $H=(W,Q)$ имеет висячие вершины, т.е. наименьшая степень вершин затравки равна $\min\limits_{i=\overline{1,n}} \deg\limits_{v_i \in W} v_i = 1$. Это позволяет предположить наличие висячих вершин у предфрактального графа G_{l-1}. При висячих вершин затравками на шаге l, $l=\overline{1,L}$, к самой затравке H подойдет лишь одно старое ребро $(l-1)$ - ранга и все $k(H)$-мостов затравки останутся мостами и для графа G_l. Так на рис. 2.8 изображена затравка $H=(W,Q)$, ее ребра нарисованы “тонкими” линиями. Затравка H имеет два моста e_1 и e_2, причем мост e_2 инцидентен висячей вершине. Затравке H инцидентно одно старое ребро (на рис. 2.8 оно выделено “жирной” линией), которое не может нейтрализовать ни один из мостов затравки.

Второй случай. На затравке $H=(W,Q)$ число мостов

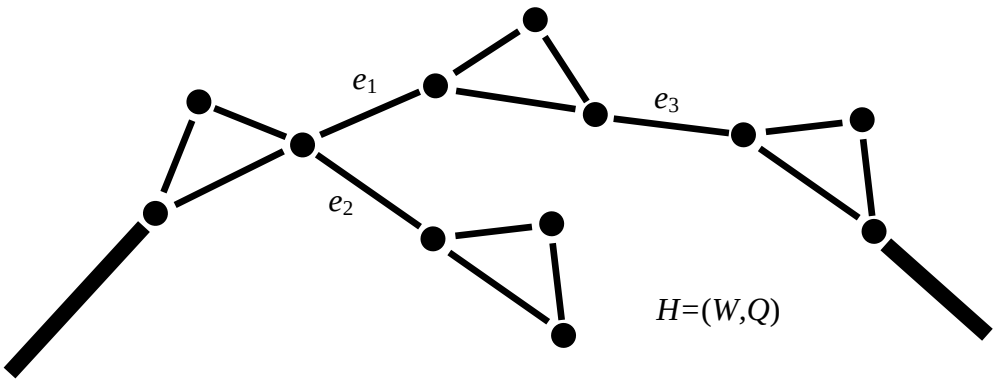


***Рис.* 2.9**

$k(H) > \min\limits_{i=\overline{1,n}} \deg\limits_{v_i \in W} v_i$ больше наименьшей степени вершин затравки. В процессе порождения предфрактального графа, при замещении затравкой вершины с наименьшей степенью, затравке станут инцидентны старые ребра, число которых меньше числа $k(H)$ мостов затравки. Поэтому некоторое число мостов не будет нейтрализовано старыми ребрами, при любом их расположении относительно затравки.

На рис. 2.9, где “тонкими” линиями отмечены ребра затравки $H=(W,Q)$, а “жирными” – старые ребра предфрактального графа, показано, что мосты e_1 и e_2 нейтрализованы, а ребро e_3 остается мостом и для всего предфрактального графа.

Описанные случаи наглядно доказывают невозможность достижения точной нижней оценки числа мостов предфрактального графа G_L в теореме 8, если предфрактальный граф G_L порожден затравкой H, число мостов которой не удовлетворяет неравенству $2 \le k(H) \le \min\limits_{i=\overline{1,n}} \deg\limits_{v_i \in W} v_i$. ◄

2.5.1. Род графа

Одной из самых наглядных характеристик непланарных графов является искаженность графа [59]. *Искаженностью* $\mathbf{sk}(G)$ графа G называется наименьшее число ребер, удаление которых из G приводит к планарному графу.

Рассмотрим произвольный граф $G=(V,E)$, выделим на нем множество ребер $\tilde{E}=\{\tilde{e}_i\} \subseteq E$, $i=1,2,\ldots,\mathbf{sk}(G)$, удаление которых приводит к планарному графу $\tilde{G}=(V,E/\tilde{E})$. Множество $\tilde{E}$ будем называть *множеством искажения* графа G.

Граф $\tilde{G}$, без особого труда, можно уложить (вложить [59]) на плоскость или сферу. Здесь возникает вопрос, на какую поверхность можно уложить сам граф $G \supseteq \tilde{G}$. Утвердительный ответ можно получить сразу, если к сфере, на которой уложен граф $\tilde{G}$, добавить $\mathbf{sk}(G)$ непересекающихся ручек, и по каждой из которых провести ребро $\tilde{e}_i \in \tilde{E}$. Таким образом граф G можно уложить на сфере с $\mathbf{sk}(G)$ ручками. Предположим, что при укладке графа G на сферу с $\mathbf{sk}(G)$ ручками, несколько ребер из $\tilde{E} \subseteq E$ пройдут по одной ручке. В этом смысле использование $\mathbf{sk}(G)$ ру-

чек для укладки на плоскости графа G было не оптимальным. Поэтому целесообразно ввести характеристику, которая качественно иначе отражает “непланарность” графа G.

Род $\gamma(G)$ графа G определяется как наименьшее число ручек, которые необходимо добавить к сфере, чтобы граф G можно было бы уложить

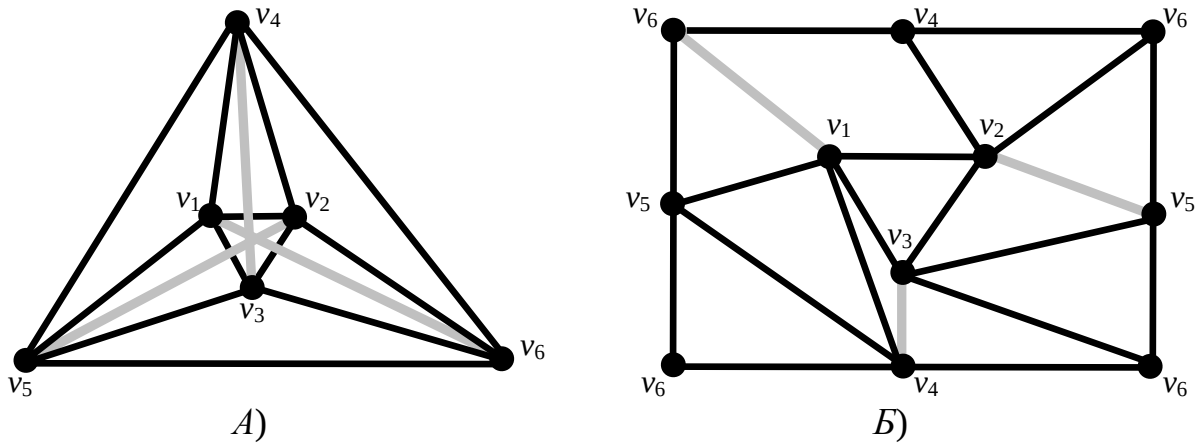


***Рис*. 2.10**

на полученной таким образом поверхности.

На рис. 2.10*А* изображен полный шестивершинный граф K_6. Его искаженность $\mathbf{sk}(K_6)=3$, а род $\gamma(K_6)=1$ [59]. На рис 2.10*Б* представлена укладка графа K_6 на торе (сфере с одной ручкой). Укладка изображена в виде прямоугольника с отождествленными противоположными сторонами. Серым цветом выделено множество искажения. Рис. 2.10*Б* наглядно демонстрирует, как по одной ручке, добавленной к сфере, проходит несколько ребер из множества искажения графа. Если быть точным, то по одной ручке на сфере проходят все ребра множества искажения графа K_6, о чем свидетельствует его род.

Связь между родом затравки и родом порожденного ею предфрактального графа устанавливает

Теорема 2.7. *Род* $\gamma(G_L)$ *предфрактального графа* $G_L = (V_L, E_L)$, *порожденного затравкой* $H = (W, Q)$ *с сохранением смежности старых ребер, определяется равенством*

$$\gamma(G_L) = \gamma(H)\frac{n^L - 1}{n - 1}. \tag{2.4}$$

Доказательство. *Блоком* [59] графа называется его максимальный не содержащий точек сочленения подграф.

Рассмотрим предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$, порожденный затравкой $H = (W, Q)$ с сохранением смежности старых ребер. Тогда, как и ранее, предфрактальный граф G_{l+1}, $l = 1,2,\ldots,L-1$, из траектории можно получить из графа G_l “склеиванием” (проводя операцию “склеивания”) с затравкой H в каждой его вершине. Вершины, в которых были проведены склеивания, в соответствии с [59] являются точками сочленения, поскольку именно в них пересекаются старые ребра предфрактального графа. Поэтому каждая подграф-затравка H, если она сама не имеет точек сочленения, является блоком предфрактального графа G_{l+1}.

В процессе порождения предфрактального графа G_L, смежность старых ребер которого не нарушается, было использовано $\frac{n^L - 1}{n - 1}$ затравок H, каждая из которых впоследствии стала блоком графа G_L. Это легко подсчитать, если производить переход от G_l к G_{l+1}, используя операцию склеивания с затравкой, на всей траектории $l = 1,2,\ldots,L-1$.

Согласно [59], род графа равен сумме родов его блоков, поэтому в справедливости формулы (2.4) можно убедиться умножив число блоков предфрактального графа G_L, которое равно $\frac{n^L - 1}{n - 1}$, на род $\gamma(H)$ его затравки, не имеющей точек сочленения.

В случае, когда затравка H имеет точки сочленения, а значит и блоки, в процессе порождения предфрактального графа G_L, каждая операция склеивания будет увеличивать род текущего предфрактального графа в траектории на число $\gamma(H)$, как и в случае с неразделимой (без точек сочленения) затравкой. Поэтому (2.4) верно и для этого случая. ◄

Фактически, род графа это число ручек, по которым проходит множество искажения, а мощность этого множества и есть искаженность графа. Для предфрактального графа, смежность старых ребер которого не нарушается, множество искажения распределено по его блокам (это показано в доказательстве теоремы 2.7), поэтому имеет место

СЛЕДСТВИЕ 2.7.1. *Искаженность* $\mathbf{sk}(G_L)$ *предфрактального графа* G_L, *порожденного затравкой* H *с сохранением смежности старых ребер, определяется равенством* $\mathbf{sk}(G_L) = \mathbf{sk}(H)\dfrac{n^L - 1}{n-1}$.

Суть множества искажения непланарного графа – концы каждого ребра из этого множества являются вершинами, для которых не существует общей грани плоского графа, полученного из исходного удалением множества искажения. Очевидно, что при замещении концов любого ребра из множества искажения затравками, их образы также будут обладать подобным свойством. Т.е ребро, соединяющее образы замещенных вершин, будет входит в множество искажение полученного графа. А это значит, что в процессе порождения предфрактального графа (с произвольной смежностью старых ребер) мощность его множества искажения (или его искаженность) не убывает. Этот факт отражен в следующих следствиях.

СЛЕДСТВИЕ 2.7.2. *Для рода* $\gamma(G_L)$ *предфрактального графа* G_L, *порожденного затравкой* H, *справедливо неравенство* $\gamma(G_L) \geq \gamma(H)\dfrac{n^L - 1}{n-1}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.7.3. *Для искаженности* $\mathbf{sk}(G_L)$ *предфрактального графа* G_L, *порожденного затравкой* H, *справедливо неравенство* $\mathbf{sk}(G_L) \geq \mathbf{sk}(H)\dfrac{n^L-1}{n-1}$.

При более широком рассмотрении, когда предфрактальный граф G_L, порожден множеством затравок $\mathbf{H}$, для характеристик непланарности, исследуемых в настоящем параграфе, очевидны следующие следствия.

СЛЕДСТВИЕ 2.7.4. *Род* $\gamma(G_L)$ *предфрактального графа* G_L, *порожденного множеством затравок* $\mathbf{H}$ *ограничивается неравенством* $\gamma_{\min}\dfrac{n^L-1}{n-1} \leq \gamma(G_L) \leq \gamma_{\max}\dfrac{n^L-1}{n-1}$, *если смежность старых ребер не нарушается и неравенством* $\gamma(G_L) \geq \gamma_{\min}\dfrac{n^L-1}{n-1}$ *– в противном случае. Где* $\gamma_{\min}$ *и* $\gamma_{\max}$, *соответственно наименьший и наибольший род среди всех графов из множества* $\mathbf{H}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.7.5. *Искаженность* $\mathbf{sk}(G_L)$ *предфрактального графа* G_L, *порожденного множеством затравок* $\mathbf{H}$ *ограничивается неравенством* $\mathbf{sk}_{\min}\dfrac{n^L-1}{n-1} \leq \mathbf{sk}(G_L) \leq \mathbf{sk}_{\max}\dfrac{n^L-1}{n-1}$, *если смежность старых ребер не нарушается и неравенством* $\mathbf{sk}(G_L) \geq \mathbf{sk}_{\min}\dfrac{n^L-1}{n-1}$ *– в противном случае. Где* $\mathbf{sk}_{\min}$ *и* $\mathbf{sk}_{\max}$, *соответственно наименьшая и наибольшая искаженность среди всех графов из множества* $\mathbf{H}$.

2.5. СТРУКТУРНЫЙ ХАОС И ЧИСЛО ВСЕХ ПРЕДФРАКТАЛЬНЫХ ГРАФОВ ОДНОГО РАНГА

ТЕОРЕМА 2.8. *Число всех предфрактальных графов* L*-го ранга, порожденных затравкой* $H=(W,Q)$, $|W|=n$, $|Q|=q$, *равно* $n^{2q\frac{n^L+L(1-n)-1}{(n-1)^2}}$.

Доказательство. Рассмотрим процесс порождения предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ некоторой затравкой $H = (W, Q)$, $|W| = n$, $|Q| = q$. При замещении затравкой H одного из концов ребра $e \in E_{l-1}$ предфрактального графа $G_{l-1} = (V_{l-1}, E_{l-1})$, $l = 2,3,\ldots,L$, само ребро может стать инцидентным одной из n вершин затравки. Поэтому при переходе от графа G_{l-1} к графу G_l каждое старое ребро графа G_l может соединить затравки, заместившие его концы, n^2 способами. Число ребер графа G_{l-1} равно $|E_{l-1}| = q\dfrac{n^{l-1}-1}{n-1}$, тогда переход от предфрактального графа G_{l-1} к графу G_l может быть осуществлен одним из $n^{2q\frac{n^{l-1}-1}{n-1}}$ вариантов. Это утверждение справедливо для любого $l = 2,3,\ldots,L$. В таком случае переход от графа G_1 к графу G_L будет осуществлен одним из $\prod_{l=2}^{L} n^{2q\frac{n^{l-1}-1}{n-1}} = n^{\sum_{l=2}^{L} 2q\frac{n^{l-1}-1}{n-1}} = n^{2q\frac{n^L+L(1-n)-1}{(n-1)^2}}$. ◄

Динамические системы, имеющие *конечный горизонт прогноза,* принято называть *системами с хаотическим поведением*. Траектории системы с хаотическим поведением с близкими начальными данными "разбегаются" экспоненциально, а поэтому для таких систем долгосрочный прогноз невозможен.

Для анализа работоспособности системы с динамически меняющейся структурой необходимо прогнозирование поведение структуры этой системы. Для этого иногда достаточно просмотреть все возможные варианты изменений в структуре, и сравнить их количественные оценки. В нашем случае – фрактальные графы, динамически растущие структуры, причем рост структуры, т.е. увеличение числа вершин предфрактального графа, происходит очень быстро. Число всевозможных предфрактальных графов одного ранга, порожденного одной и той же затравкой, как свидетельству-

ет теорема 2.6, зависит экспоненциально от числа вершин самого предфрактального графа. Структурную динамику такого рода, по аналогии с системами с хаотическим поведением, назовем *структурным хаосом*. На первый взгляд, такое свойство может привести к мысли о невозможности получения хоть сколько-нибудь полезных, т.е. полиномиальных, количественных оценок для характеристик предфрактального графа. О том, что это не так говорят все результаты, представленные в настоящей главе (см. теоремы 2.1 – 2.5). И действительно, количественные оценки, полученные в работе, ограничены сверху полиномами $O(N)$ от числа N – вершин предфрактального графа, в то время как число всех предфрактальных графов с N – вершинами ограничено сверху экспонентой $O(n^{N+1})$, где n - число вершин затравки (см. теорему 2.6).

Таким образом, доказанные утверждения показывают возможность получения “хороших” диапазонов количественных оценок для несравнимо большого числа предфрактальных графов.

Глава III. Параллельные алгоритмы на предфрактальных графах

3.1. Параллельные алгоритмы на графах

На настоящий момент, насколько нам известно, в отечественной научной периодике нет работ связанных с распараллеливанием алгоритмов на графах. В подтверждение этого можно сослаться на [85–90], где представлены некоторые параллельные алгоритмы для задач дискретной математики. В то время как в зарубежной периодике вопросам распараллеливания алгоритмов уделяется не сравнимо большее внимание.

Большинство известных параллельных графовых алгоритмов построено для PRAM (Parallel Random Access Machine) – модели параллельной вычислительной системы. В представленной раннее классификации, PRAM относится к компьютерам с общей памятью. Во избежание конфликтных ситуаций при одновременном обращении нескольких процессоров к общей памяти в PRAM заданы следующие правила:

- конкурентное чтение / конкурентная запись (CRCW);
- конкурентное чтение / исключительная запись (CREW);
- исключительное чтение / конкурентная запись (ERCW);
- исключительное чтение / исключительная запись (EREW).

С более подробным описанием PRAM модели можно ознакомиться, например, в [91] или [92].

Простейшие параллельные алгоритмы для графа G с n вершинами и m ребрами можно найти в переводном учебнике [93].

В [94] предлагается эффективный алгоритм нахождения связных компонент неориентированного графа G. В этом алгоритме используется $n+m$ процессоров CREW PRAM, а сам алгоритм исполняется за время $O(\log^{3/2} n)$. В [95] разработан параллельный алгоритм поиска всех пар

кратчайших путей, где на модели CRCW PRAM достигается временная сложность $O(n^3 / p + \log n)$, используя при этом p процессоров. Для проверки того является ли данное остовное дерево минимальным, разработан параллельный алгоритм [96] на EREW PRAM модели. Алгоритм исполняется за время $O(\log n)$ и использует $O((m+n)/\log n)$ процессоров. Для графа, степень каждой вершины которого $\Delta > 2$, существует алгоритм [97] вершинной раскраски в Δ цветов на EREW PRAM (допуская при этом, что граф не содержит $(\Delta - 1)$-клик). Время выполнения алгоритма на $n/\log n$ процессорах равно $O(\log n)$. Для обновления остовного дерева минимального веса, при одновременном добавлении к исходному графу k новых вершин, используется алгоритм [98], время выполнения которого $O(\log k \cdot \log n)$. Алгоритм реализуется на EREW PRAM с $(k \cdot n)/(\log k \cdot \log n)$ процессорами. В [99] описан параллельный алгоритм поиска максимальных ациклических множеств. Алгоритм исполняется за $O(\sqrt{n} \log^3 n)$ время на n^2 процессорах EREW PRAM. В работе [100] предлагается эффективное выполнение алгоритма Эдмондса для нахождения оптимального ветвления графа на STAR машине. Время исполнения алгоритма – $O(n \cdot \log n)$, а число используемых процессоров – m. STAR машина основана на модели параллельной машины типа SIMD с вертикальной обработкой информации [101].

3.2. Параллельный алгоритм поиск кратчайшего пути

Лемма 3.1. *Для любых двух вершин $v, u \in V_L$, предфрактального (n, q, L)-графа G_L, смежность старых ребер которого не нарушатся, существует такой блок $B_{s^*}^{(l^*)}$, что кратчайший путь между вершинами v и u будет принадлежать этому блоку.*

Доказательство проведем конструктивно. Пусть заданы две вершины $v,u \in V_L$. Найдем общий блок для этих вершин. Каждая из этих двух вершин принадлежат затравкам L-го ранга, которые являются и блоками L-го ранга. Если эти две вершины принадлежат одному и тому же блоку, то найден общий блок $B_{s^*}^{(l^*)}$. В противном случае, рассматриваем блоки $(L-1)$-ого ранга, которым принадлежат вершины v и u. Если вершины v и u принадлежат одному блоку $(L-1)$-ого ранга, тогда общий блок найден. Если не найден общий блок $(L-1)$-ого ранга, тогда продолжаем процедуру уменьшения рангов блоков, в которые входят вершины v и u до тех пор, пока не будет найден общий блок $B_{s^*}^{(l^*)}$. ◄

Таким образом, в начале алгоритму необходимо находить один общий блок $B_{s^*}^{(l^*)}$, в пределах которого и будет осуществляться поиск кратчайшего пути между двумя заданными вершинами предфрактального графа.

Работа алгоритма заключается в следующем. Каждая затравка рассматривается как отдельный подграф, и два процессора p_1, p_2 параллельно независимо друг от друга находят кратчайшие пути, переходя от одной затравки к другой. Цель такого подхода уменьшить, на сколько это возможно высоту алгоритма, т.е. его вычислительную сложность [87].

Процессор p_1 назначается вершине v. Его основная цель найти кратчайший путь от вершины v до затравки наименьшего ранга, принадлежащей общему блоку $B_{s^*}^{(l^*)}$. Процессор p_2 назначается вершине u. Его основная цель найти кратчайший путь от вершины u до затравки наименьшего ранга, принадлежащей общему блоку $B_{s^*}^{(l^*)}$. Затравка наименьшего ранга

одна, и имеет ту же индексацию, что и найденный блок $B_{s^*}^{(l^*)}$, т.е. $z_{s^*}^{(l^*)}$ - также является "общей" затравкой для заданных вершин *v* и *u*. Последним шагом алгоритма будет поиск кратчайшего пути между двумя вершинами v^* и u^* на затравки $z_{s^*}^{(l^*)}$, найденными в процессе работы алгоритма.

Опишем теперь работу одного процессора p_1. Вершины предфрактального графа могут одновременно принадлежать затравкам разных рангов. Пусть вершина *v* принадлежит затравке наименьшего ранга, тогда обозначим ее через v_1, а затравку которой она принадлежит через z_{v_1}. Если затравка z_{v_1} и есть общая затравка $z_{s^*}^{(l^*)}$, тогда работа процессора останавливается и вершина v_1 обозначается через v^*. В противном случае просматриваются все вершины затравки z_{v_1}. Вершину принадлежащую затравке наименьшего ранга, обозначим через v_2, а саму затравку - z_{v_2}. Далее осуществляется поиск кратчайшего пути от вершины v_1 до v_2. Если затравка z_{v_2} и есть общая затравка $z_{s^*}^{(l^*)}$, тогда работа процессора останавливается и вершина v_2 обозначается v^*. В противном случае процессор продолжает свою работу, находя кратчайшие пути на затравках меньших рангов $z_{v_i}, i \le L - l^*$, пока не будет найден кратчайший путь до одной из вершин затравки $z_{s^*}^{(l^*)}$.

Работа процессора p_2 будет аналогичной, при этом вершины и затравки будут обозначаться через u_j,и z_{u_j} соответственно.

После того, как будут найдены вершины v^* и u^*, на последнем этапе алгоритм находит кратчайший путь между этими двумя вершинами на общей затравке $z_{s^*}^{(l^*)}$.

Поиск кратчайшего пути на затравках ведется с помощью *алгоритма Дейкстры* [102], который заложен в алгоритм в виде вызываемой процедуры. Следует отметить, что затравка, на которой ведется поиск кратчайшего пути, рассматривается как отдельный подграф и за пределы затравки процедура не выходит.

Процедура поиска кратчайшего пути (ПКП), основанная на алгоритме Дейкстры.

(Вход: вершины s и t, затравка z)

Шаг 1. Все вершины и ребра не окрашены. Каждой вершине затравки z в ходе выполнения алгоритма присваивается число $d(x)$, равное длине кратчайшего пути из s в x, включающего только окрашенные вершины.

Положить $d(s)=0$ и $d(x)=\infty$ для всех x, отличных от s. Окрасить вершину s и положить $y = s$ (y - последняя из окрашенных вершин).

Шаг 2. Для каждой неокрашенной вершины x пересчитать величину $d(x)$:

$$d(x)=\min\{d(x),d(y)+1\}$$

Если $d(x)=\infty$, для всех неокрашенных вершин x, закончить процедуру алгоритма: в исходном графе отсутствуют пути из вершины s в неокрашенные вершины. В противном случае окрасить ту из вершин x, для которой величина $d(x)$ является наименьшей. Кроме того, окрасить ребро, ведущее в выбранную на данном шаге вершину x. Положить $y = x$.

Шаг 3. Если $y = t$, закончить процедуру: кратчайший путь из вершины s в вершину t найден (это единственный путь из s в t, составленный из окрашенных ребер). В противном случае перейти к шагу 2.

(Выход: кратчайший путь из s в t)

Конец процедуры. ◄

Алгоритм β_1.

Шаг 1. Найти общий блок $B_{s^*}^{(l^*)}$ для заданных вершин *v* и *u* пред-фрактального графа. Пусть в начале каждая из двух вершин *v* и *u* принадлежат блокам *L*-го ранга.

Шаг 1.1. Если вершины *v* и *u* принадлежат одному и тому же блоку, то найден общий блок $B_{s^*}^{(l^*)}$. Тогда перейти шагу 2.

В противном случае, если общий блок не найден, перейти к шагу 1.2.

Шаг 1.2. Уменьшить ранги блоков, которым принадлежат вершины *v* и *u*. Перейти к шагу 1.1.

Шаг 2. Одновременно два процессора p_1, p_2, для вершин *v* и *u* выполнять следующие шаги.

Работа процессора p_1:

Шаг 2.1. Затравку наименьшего ранга, среди всех затравок, которым принадлежит вершина *v*, определить как z_{v_1}, а саму вершину как v_1. Инициировать циклическую переменную: $i = 1$.

Шаг 2.2. Если затравка z_{v_i} и есть общая затравка $z_{s^*}^{(l^*)}$, вершина v_i обозначить v^*, перейти к шагу 3. В противном случае перейти к шагу 2.3.

Шаг 2.3. Просмотреть все вершины затравки z_{v_i}. Найти вершину принадлежащую затравке наименьшего ранга, обозначить через v_{i+1}, а саму затравка - $z_{v_{i+1}}$. Найти кратчайший путь от вершины v_i до v_{i+1} с помощью процедуры поиска кратчайшего пути:

Процедура ПКП (v_i, v_{i+1}, z_{v_i});

Увеличить итерационную переменную: $i = i + 1$.

Перейти к шагу 2.2.

Работа процессора p_2:

Шаг 2.1. Затравку наименьшего ранга, среди всех затравок, которым принадлежит вершина u, определить как z_{u_1}, а саму вершину как u_1. Инициировать циклическую переменную: $j = 1$.

Шаг 2.2. Если затравка z_{u_j} и есть общая затравка $z_{s^*}^{(l^*)}$, вершина u_j обозначить u^*, перейти к шагу 3. В противном случае перейти к шагу 2.3.

Шаг 2.3. Просмотреть все вершины затравки z_{u_j}, Найти вершину, принадлежащую затравке наименьшего ранга, обозначить через u_{j+1}, а саму затравку - $z_{u_{j+1}}$. Найти кратчайший путь от вершины u_j до u_{j+1} с помощью процедуры поиска кратчайшего пути:

Процедура ПКП (u_j, u_{j+1}, z_{u_j});

Увеличить итерационную переменную: $j = j + 1$.

Перейти к шагу 2.2.

Шаг 3. На выходе шага 2 получаем кратчайший путь от вершины v до v^* и кратчайший путь от u до u^*. Найти кратчайший путь от вершины v^* до вершины u^* на общей затравке $z_{s^*}^{(l^*)}$: Процедура ПКП ($v^*, u^*, z_{s^*}^{(l^*)}$);

Конец алгоритма β_1. ◄

Теорема 3.1. ***Вычислительная сложность*** *[87] алгоритма* β_1 *для предфрактального* (n,q,L)*-графа* $G_L = (V_L, E_L)$, $|V_L| = N$, *порожденного затравкой* $H = (W, Q)$, $|W| = n$, *равна* $O(N)$, *если смежность старых ребер не нарушается.*

Доказательство. Основная вычислительная нагрузка алгоритма β_1 ложится на шаг 2. Каждый процессор находит кратчайшие пути на L затравках, т.е. выполняет эту операцию L раз. Перед тем как начать поиск кратчайшего пути, на каждой затравке просматриваются все ее n вершин.

Т.е. для просмотра всех вершин каждому процессору понадобится выполнить $n \cdot L$ операций.

Согласно [102], поиск кратчайшего пути на отдельно взятой затравку занимает n^2 операций, а в целом для всех затравок $L \cdot n^2$.

Таким образом вычислительная сложность шага 2 для одного процессора равна $O(Ln^2 \cdot nL) = O(L^2 n^3)$, а для двух процессоров – $O(2L^2 n^3)$.

Отсюда, для $L \geq 3$, вычислительная сложность алгоритм $\gamma_Д$ $O(2L^2 n^3) < O(n^L) = O(N)$. ◄

Примечание. Вычислительная сложность параллельного алгоритма $\gamma_Д$ для предфрактального (n,q,L)-графа G_L, смежность старых ребер которого не нарушается, меньше вычислительной сложности алгоритма Дейкстры:

$O(N) < O(N^2)$, в N раз. ◄

Теорема 3.2. *Временная сложность параллельного алгоритма* $\gamma_Д$ *для предфрактального* (n,q,L)*-графа* G_L*, смежность старых ребер которого не нарушается, равна* $O\left(\frac{1}{2}N\right)$. ◄

3.3. Параллельный алгоритм поиска остовного дерева минимального веса

Параллельный алгоритм β_2 осуществляет поиск остовного дерева минимального веса (ОДМВ) [59] $T = (V_L, E_T)$ на взвешенном предфрактальном графе $G_L = (V_L, E_L)$. *Остовное дерево минимального веса* $T = (V_L, E_T)$ графа $G_L = (V_L, E_L)$ – это его подграф без циклов с наименьшим суммарным реберным весом. Алгоритм использует k процессоров $p_1, p_2, ..., p_k$. Назначим каждый процессор одной из подграф-затравок $z_s^{(l)}$,

$l=\overline{1,L}$, $s=\overline{1,n^{l-1}}$, предфрактального графа G_L, тогда число используемых процессоров равно $k=\dfrac{n^L-1}{n-1}$.

Суть работы алгоритма заключается в следующем. Каждая подграф-затравка $z_s^{(l)}$ рассматривается как отдельно взятый граф. При этом каждый из k процессоров параллельно независимо друг от друга находит ОДМВ на своей подграф-затравке $z_s^{(l)}$. Поиск ОДМВ отдельно взятой подграф-затравки осуществляется алгоритмом Прима [59]. Алгоритм Прима используется в алгоритме $\alpha_{\Pr}$ в виде процедуры, по мере необходимости. Нахождения ОДМВ всех подграф-затравок $z_s^{(l)}$, позволяет построить ОДМВ предфрактального графа G_L.

Каждое ребро предфрактального графа имеет свой “уникальный” номер, однозначно определяющий ребро во всей траектории. Таким образом, выделение ОДМВ на подграф-затравке $z_s^{(l)}$ будет соответствует выделению множества ребер на предфрактальном графе G_L.

Использование $k=\dfrac{n^L-1}{n-1}$ процессоров, равное числу подграф-затравок позволяет достичь, как это будет показано далее, максимальной эффективности алгоритма β_2.

АЛГОРИТМ β_2.

Вход: взвешенный предфрактальный граф $G_L=(V_L,E_L)$.

Выход: ОДМВ $T=(V_L,E_T)$.

1. Назначим каждый из k процессоров $p_1,p_2,\ldots,p_k$ подграф-затравкам $z_s^{(l)}$, $l=\overline{1,L}$, $s=\overline{1,n^{l-1}}$. Каждый процессор будет обраба-

---

тывать только назначенную ему подграф-затравку.

2. Одновременно k процессоров $p_1, p_2, ..., p_k$ параллельно и независимо друг от друга применяют процедуру Prim к назначенной подграф-затравке.

3. На выходе шага 2 получаем множество из k ОДМВ $T_1, T_2, ..., T_k$, которое определяет ОДМВ $T = (V_L, E_T)$, $E_T \subseteq E$.

ПРОЦЕДУРА Prim.
ВХОД: взвешенный граф $G = (V, E)$.
ВЫХОД: ОДМВ $T_s = (V, E_s)$.

Для обоснования алгоритма β_2 будем использовать

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Всякий предфрактальный граф G_L можно представить в виде множества подграф-затравок $\{B_L^{(1)}\}$, соединенных старыми ребрами разных рангов. А именно, старые ребра $(L-1)$-го ранга объединяют множество подграф-затравок в множество блоков $\{B_L^{(2)}\}$ второго ранга, их в свою очередь, старые ребра $(L-2)$-го ранга объединяют в множество блоков $\{B_L^{(3)}\}$ третьего ранга и т.д. Окончательно, старые ребра первого ранга объединяют множество $\{B_L^{(L-1)}\}$ блоков $(L-1)$-го ранга в связный предфрактальный граф G_L.

ТЕОРЕМА 3.3. *Для предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$ всякий его связный остовный подграф $S = (V_L, E_S)$ удовлетворяет двум условиям:*

1. В множество ребер E_S входит хотя бы одно ребро каждого ранга.

2. Старые ребра $\{e^{(l)}\} \subseteq E_S$ ранга l, $l \in \{1, 2, ..., L-1\}$, имеющие общую вершину-прообраз, на графе G_l из траектории, образуют связный подграф.

Доказательство. Первая часть теоремы целиком вытекает из утверждения 3.1. Действительно, если на подграфе $S=(V_L,E_S)$ будут отсутствовать все ребра какого-либо ранга, то он не будет связным. Вторую часть теоремы докажем от противного. Предположим, что некоторое множество ребер $\{e^{(l)}\}\subseteq E_S$, имеющих общую вершину-прообраз не образует на предфрактальном графе G_l, $l\in\{1,2,...,L-1\}$, связный подграф. Это значит, что среди образов концов ребер $\{e^{(l)}\}$ на графе G_L найдутся такие, что ни одна из цепей их соединяющих не войдет в остовый подграф $S=(V_L,E_S)$, что противоречит условию связности этого подграфа. ◄

Теорема 3.4. *Параллельный алгоритм β_2 строит на предфрактальном графе $G_L=(V_L,E_L)$ ОДМВ $T=(V_L,E_T)$.*

Доказательство. Алгоритм β_2 на предфрактальном графе G_L выделяет k ОДМВ $T_1,T_2,...,T_k$. Докажем, что множество $T_1,T_2,...,T_k$ образует ОДМВ предфрактального графа G_L. ОДМВ T_i, $i=\overline{1,n^{L-1}}$, выделенные на подграф-затравках $z_s^{(L)}$, образуют остовный лес, состоящий из n^{L-1} связных компонент. Связные компоненты, в данном случае, это ОДМВ выделенные на блоках $\{B_L^{(1)}\}$. Согласно правилу взвешивания предфрактального графа, ребра, принадлежащие блокам первого ранга имеют наименьшие веса по сравнению с ребрами других рангов. Поэтому выделение ОДМВ на подграф-затравках $z_s^{(L)}$ необходимо для получения ОДМВ предфрактального графа G_L.

Далее ОДМВ T_i выделенные на подграф-затравках $z_s^{(L-1)}$, в соответствии с утверждением 1, образуют n^{L-2} связных компонент. Каждая компонента будет представлять собой ОДМВ блоков $\{B_L^{(2)}\}$. Продолжая данную линию рассуждений получим, что ОДМВ выделенные на подграф-

затравках $z_s^{(2)}$ в совокупности с раннее найденными ОДМВ образуют n связных компонент. Каждая компонента будет представлять ОДМВ блока $\{B_L^{(L-1)}\}$. И, наконец, ОДМВ подграф-затравки $z_1^{(1)}$ связывает n компонент в одну связную компоненту. Полученный связный остовный подграф, в силу добавления деревьев минимального веса, будет представлять ОДМВ предфрактального графа G_L. ◄

Теорема 3.5. *Время исполнения алгоритма* β_2 *на предфрактальном графе* $G_L = (V_L, E_L)$, $|V_L| = n^L$ *при использовании* $k = \dfrac{n^L - 1}{n-1}$ *процессоров, равно* $O(n^2)$.

Доказательство. Основой алгоритма является шаг 2, с ним и связано затрата времени на исполнение. Остальные шаги производят простые операции и инициализацию переменных. Алгоритм β_2 выполняет шаг 2 параллельно, каждым из k процессоров. Для выполнения шага 2 потребуется $O(n^2)$ времени (столько времени [102] требует процедура Prim для обработки подграф-затравки). Так как это верхняя оценка в наихудшем случае, тогда будем считать что все k процессоров закончат свою работу – выполнение шага 2 – одновременно, за время $O(n^2)$. Тогда алгоритм α_{Pr} исполняется за время $O(n^2)$. ◄

Отметим, что n определяет размерность задачи поиска ОДМВ на подграф-затравке, в то время как размерность задачи поиска ОДМВ на предфрактальном графе $G_L = (V_L, E_L)$ равна N, $|V_L| = N = n^L$. Таким образом время исполнения алгоритма β_2 равно времени затрачиваемому на поиск ОДМВ на подграф-затравке.

Время исполнения последовательного алгоритма Прима на предфрактальном графе $G_L = (V_L, E_L)$, $|V_L| = N$ равно $O(N^2)$. Сравнив после-

довательный алгоритм Прима с параллельным алгоритмом β_2, получаем что время исполнения алгоритма β_2 меньше на порядок: $O(N) < O(N^2)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.5.1. *Ускорение параллельного алгоритма* β_2 *на предфрактальном графе* $G_L = (V_L, E_L)$, $|V_L| = n^L$ *при использовании* k *процессоров,* $k = \dfrac{n^L - 1}{n-1}$, *от последовательного алгоритма Прима равно* $O(N)$. ◄

ТЕОРЕМА 3.6. *Вычислительная сложность алгоритма* β_2 *на предфрактальном графе* $G_L = (V_L, E_L)$, $|V_L| = N = n^L$ *равна* $O(N \cdot n^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Алгоритм β_2 представляет собой, по существу многократное выполнение шага 2. Шаг 2 потребует выполнения $O(n^2)$ операций на каждой подграф-затравке (столько операций требует процедура Прима). В сумме будет выполнено $k \cdot O(n^2)$ операций, $k = \dfrac{n^L - 1}{n-1}$. ◄

Тогда, $O(k \cdot n^2) = O\left(\dfrac{n^L - 1}{n-1} \cdot n^2\right) = O(n^L \cdot n^2) = O(N \cdot n^2)$. Отсюда вычислительная сложность алгоритма β_2 равна $O(N \cdot n^2)$.

Вычислительная сложность алгоритма Прима равна $O(N^2)$. Сравнив ее с вычислительной сложностью алгоритма α_{Pr}, получаем: $O(N \cdot n^2) < O(N^2)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.6.1. *Вычислительная сложность алгоритма* α_{Pr} *меньше вычислительной сложности алгоритма Прима в* n^{L-2} *раз.* ◄

3.4. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА СОВЕРШЕННОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ

Алгоритм β_3 производит поиск совершенного паросочетания [59] на заданном предфрактальном графе. Рассмотрим взвешенный предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$ и траекторию $G_l = (V_l, E_l)$, $l = 1,2,..,L$. Алгоритм

использует k процессоров $p_1, p_2, ..., p_k$. Где k может варьировать в промежутке от одного до n^{L-1}. Назначим каждый процессор одной из подграф-затравок $z_s^{(L)}$, $s = \overline{1, n^{L-1}}$.

Теорема 3.7. *Предфрактальный граф* $G_L = (V_L, E_L)$*, порожденный затравкой* $H = (W, Q)$*, имеет совершенное паросочетание, если затравка* $H = (W, Q)$ *имеет совершенное паросочетание.*

Основная идея алгоритма заключается в том, что каждая подграф-затравка рассматривается как отдельно взятый граф. При этом каждый из k процессоров параллельно независимо друг от друга находит совершенные паросочетания на своей подграф-затравке $z_s^{(L)}$. Поиск совершенного паросочетания подграф-затравки осуществляется с помощью алгоритма Эдмондса [102]. Алгоритм Эдмондса оформлен в виде процедуры и используется по мере необходимости. В результате нахождения совершенных паросочетаний всех подграф-затравок $z_s^{(L)}$, получаем совершенное паросочетание предфрактального графа G_L.

Для достижения максимальной эффективности алгоритма β_3 предположим, что число процессоров равно количеству подграф-затравок $z_s^{(L)}$, то есть $k = n^{L-1}$.

Алгоритм β_3.

Вход: предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$.

Выход: совершенное паросочетание $M = (V_L, E_M)$.

1. Назначим каждый из k процессоров $p_1, p_2, ..., p_k$ подграф-затравкам $z_s^{(L)}$, $s = \overline{1, n^{L-1}}$. Каждый процессор будет обрабатывать только назначенную ему подграф-затравку.

2. Одновременно k процессоров $p_1, p_2, ..., p_k$ параллельно и незави-

---

симо друг от друга применяют процедуру Edmonds к назначенной подграф-затравке.

3. На выходе шага 2 получаем множество k совершенных паросочетаний $M_1, M_2, ..., M_k$, которое определяет совершенное паросочетание $M = (V_L, E_M)$, $E_M \subseteq E$.

ПРОЦЕДУРА Edmonds.

ВХОД: граф $G = (V, E)$.

ВЫХОД: совершенное паросочетание $M_s = (V, E_s)$.

ТЕОРЕМА 3.8. *Параллельный алгоритм* β_3 *строит на предфрактальном графе* $G_L = (V_L, E_L)$ *совершенное паросочетание* $M = (V_L, E_M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На последнем шаге L порождения предфрактального графа G_L все вершины замещаются затравкой $H = (W, Q)$. Совершенное паросочетание M_s подграф-затравки $z_s^{(L)}$, $s = \overline{1, n^{L-1}}$, покроет все вершины принадлежащие данной подграф-затравке. Так как множество вершин графа G_L можно представить в виде совокупности вершин подграф-затравок $z_s^{(L)}$, то покрыв совершенными паросочетаниями все подграф-затравки, получим покрытие всего множества вершин G_L. Совершенные паросочетания подграф-затравок $z_s^{(L)}$, при этом состоят только из новых ребер и в совокупности образуют совершенное паросочетание предфрактального графа G_L. ◄

ТЕОРЕМА 3.9. *Время исполнения алгоритма* β_3 *на предфрактальном графе* $G_L = (V_L, E_L)$, $|V_L| = n^L$ *при использовании* $k = n^{L-1}$ *процессоров, равно* $O(n^3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основой алгоритма является шаг 2, с ним и связано затрата времени на исполнение. Остальные шаги производят простые операции и инициализацию переменных. Алгоритм β_3 выполняет шаг 2

параллельно, каждым из k процессоров. Для выполнения шага 2 потребуется $O(n^3)$ времени (столько времени [102] требует процедура Edmonds для обработки подграф-затравки). Так как это верхняя оценка в наихудшем случае, тогда будем считать что все k процессоров закончат свою работу – выполнение шага 2 – одновременно, за время $O(n^3)$. Тогда алгоритм β_3 исполняется за время $O(n^3)$. ◄

Время исполнения последовательного алгоритма Эдмондса на предфрактальном графе $G_L = (V_L, E_L)$, $|V_L| = N$ равно $O(N^3)$. Сравнив последовательный алгоритм Эдмондса с параллельным алгоритмом β_3, получаем что время исполнения алгоритма β_3 меньше на два порядка: $O(N) < O(N^3)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.9.1. *Ускорение параллельного алгоритма* β_3 *на предфрактальном графе* $G_L = (V_L, E_L)$, $|V_L| = n^L$ *при использовании* k *процессоров,* $k = n^{L-1}$*, от последовательного алгоритма Эдмондса равно* $O(N^2)$.

ТЕОРЕМА 3.10. *Вычислительная сложность алгоритма* β_3 *на предфрактальном графе* $G_L = (V_L, E_L)$, $|V_L| = N = n^L$ *равна* $O(N \cdot n^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Алгоритм β_3 представляет собой, по существу многократное выполнение шага 2. Шаг 2 потребует выполнения $O(n^3)$ операций на каждой подграф-затравке (столько операций требует процедура Edmonds). В сумме будет выполнено $k \cdot O(n^3)$ операций, $k = n^{L-1}$. ◄

Тогда, $O(k \cdot n^3) = O(n^{L-1} \cdot n^3) = O(n^L \cdot n^2) = O(N \cdot n^2)$. Отсюда, вычислительная сложность алгоритма β_3 равна $O(N \cdot n^2)$. ◄

СЛЕДСТВИЕ 3.10.1. Вычислительная сложность алгоритма β_3 меньше вычислительной сложности алгоритма Эдмондса в n^{2L-2} раз.

Основные результаты диссертации

1. Построена и исследована вероятностно-детерминистическая модель, позволяющая анализировать стойкость сложных систем относительно сильных кратковременных воздействий. Введены количественные характеристики стойкости сложных систем и для них получены априорные оценки.
2. Решены задачи проектирования сложных масштабно-инвариантных структур с заданными количественными характеристиками, определяющими живучесть. Обнаружено и изучено явление структурного хаоса.
3. Для класса предфрактальных графов построены параллельные алгоритмы решения
   - задачи поиск кратчайшего пути,
   - задачи поиск остовного дерева минимального веса,
   - задачи поиска совершенного паросочетания.

   Предложенные алгоритмы существенно эффективней стандартных методов.

Литература

1. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Физматлит, 2001.
2. *Моисеев Н.Н.* Алгоритмы развития. – М.: Наука, 1987.
3. *Моисеев Н.Н.* Математика ставит эксперимент. – М.: Наука, 1979.
4. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. Введение в информатику с позиций математического моделирования. – М.: Наука, 1988.
5. Компьютеры и нелинейные явления. – М.: Наука, 1988.
6. *Павловский Ю.Н.* Декомпозиция моделей управляемых систем. – М.: Знание, 1985.
7. *Моисеев Н.Н.* Математика ставит эксперимент. – М.: Наука, 1979.
8. *Вилкас Э.Й., Майминас Е.З.* Решения: теория, информация, моделирование. – М.: Радио и связь, 1981.
9. *Еленин Г.Г., Синько М.Г.* Математическое моделирование явления на поверхности. – М.: Знание, 1988.
10. *Иваницкий Г.Р.* Ритмы развивающихся сложных систем. – М.: Знание, 1988.
11. *Краснощеков П.С., Петров А.А.* Введение в математическое моделирование. – М.: Наука, 1984.
12. *Мори Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии: Лекции о моделях. – М.: Мир, 1983.
13. *Арнольд В.И.* “Жесткие” и “мягкие” математические модели. М.: МЦНПО, 2000.
14. *Митин Н.А.* Математическое моделирование информационных процессов: Автореф. дис. … канд. физ.-матем. наук. М.: ИПМатем. им. М.В. Келдыша РАН, 1999.
15. *Анисимова С.А.* Рефлексивные модели субъекта, совершающего моральный выбор. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 60. М., 2003.
16. *Анисимова С.А.* Психотехнологии в культурных организациях и теория рефлексии. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 51. М., 2004.
17. *Бурцев М.С.* Исследование новых типов самоорганизации и возникновения поведенческих стратегий: Автореф. дис. … канд. физ.-матем. наук. М.: ИПМатем. им. М.В. Келдыша РАН, 2005.
18. *Burtsev M.S.* Tracking the Trajectories of Evolution // Artificial Life 10(4), 2004. стр. 397-411.
19. *Малков А.С.* О математическом моделировании. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 11. М., 2005.
20. *Малков А.С., Коротаев А.В., Халтурина Д.А.* Математическая модель роста населения Земли,экономики, технологии и образования. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 13. М., 2005.
21. *Малков А.С., Малинецкий Г.Г., Чернавский Д.С.* Оматематическом моделировании исторических процессов: аграрные общества // Информационные технологии и вычислительные системы. №2. 2005. – С. 51-60.

22. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. – М.: Едиториал УРСС, 2004.

23. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация удвоения цикла и ее приложения. – М.: Мир, 1980.

24. *Гарел Д. Гарел О.* Колебательные химические реакции. – М.: Мир, 1986.

25. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастическое и хаотическое колебания. – М.: Наука, 1987.

26. *Хакен Г.* Синергетика. – М.: Мир, 1980.

27. *Хакен Г.* Информация и самоорганизация. – М.: Мир, 1991.

28. *Занг В.-Б.* Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. – М.: Мир, 1999.

29. *Хакен Г.* Тайны природы. Синергетика: учение о взаимодействии. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

30. *Безручко Б.П., Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Путь в синергетику. Экскурс в десяти лекциях. – М.: КомКнига, 2005.

31. *Малинецкий Г.Г.* Математические основы синергетики. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. – М.: КомКнига, 2005.

32. *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. – М.: Едиториал УРСС, 2003.

33. Режимы с обострением. Эволюция идеи: Законы коэволюции сложных структур. – М.: Наука, 1998.

34. *Князева Е.Н., Курдюмов С.П.* Основания синергетики. Синергетическое мировидение. – М.: КомКнига, 2005.

35. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flow// Journ. of the Atmospheric Science. 1963. V.20 P.130-141.

36. Пределы предсказуемости. – М.: Центрком, 1997.

37. *Малинецкий Г.Г., Курдюмов С.П.* Нелинейная динамика и проблемы прогноза // Вестник РАН, 2001, т.71, №3. С.210-224.

38. *Владимиров В.А., Кульба В.В., Малинецкий Г.Г, Махутов Н.А. и др.* Управление риском. – М.: Наука, 2000.

39. *Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г.* Синергетика и системный синтез // Новое в синергетике: взгляд в третье тысячелетие. – М.: Наука, 2002.

40. Новое в синергетике: взгляд в третье тысячелетие / Под ред. *Малинецкого Г.Г., Курдюмова С.П.* – М.: Наука, 2002.

41. *Кульба В.В., Кононов Д.А., Косяченко С.А., Шубин А.Н.* Методы формирования сценариев развития социально-экономических систем. – М.: СИНТЕГ, 2004.

42. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос. – М.: Наука, 1992.

43. *Малинецкий Г.Г.* Базовые модели и ключевые идеи синергетики. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, №70. М., 1994.

44. *Касти Дж.* Большие системы. Связность, сложность и катастрофы. – М.: Мир, 1982.

45. *Эйген М.* Гиперцикл. – М.: Мир, 1984.

46. Безопасность России. Правовые, социально-экономические и научно-технические аспекты. Функционирование и развитие сложных народнохозяйственных, технических, транспортных систем, систем связи и коммуникаций / Под ред. К.В. Фролова. – М.: МГФ “Знание”, 1998.

47. *Острейковский В.А.* Теория надежности. – М.: Высшая школа, 2003.

48. *Райншке К.* Модели надежности и чувствительности систем. – М.: Мир, 1979.

49. *Барлоу Р., Прошан Ф.* Математическая теория надежности. – М.: Советское радио, 1969.

50. *Барлоу Р., Прошан Ф.* Статистическая теория надежности и испытание на безотказность. – М.: Наука, 1984.

51. *Куюнджич С.М.* Разработка и анализ моделей надежности и безопасности систем. – М.: Физматлит, 2001.

52. *Райншке К., Ушаков И.А.* Оценка надежности систем с использованием графов. – М.: Радио и связь, 1988.

53. *Рябинин И.А.* Надежность и безопасность структурно-сложных систем. – СПб.: Политехника, 2000.

54. Моделирование живучести систем энергетики: методология, модель, реализация. Сообщения по прикладной математике. – М.: ВЦ АН СССР, 1986.

55. *Кочкаров А.А., Кочкаров Р.А.* Предфрактальные графы в проектировании и анализе сложных структур. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, №10. М., 2003.

56. *Архипова Н.И., Кульба В.В.* Управление в чрезвычайных ситуациях. – М.: РГГУ, 1998.

57. *Кочкаров А.А., Малинецкий Г.Г.* Концепция стойкости для социально-экономических и технических систем. Труды Международной конференции “Математическое моделирование социальной и экономической динамики”. М.: РГСУ, 2004. – с. 151-154.

58. *Кочкаров А.А., Малинецкий Г.Г.* Стойкость и обоснование стойкости сложных технических и социально-технических систем. Труды XI Международной конференции "Проблемы управления безопасностью сложных систем". Часть 1. М.: РГГУ, 2003. – С. 50-53.

59. *Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.* Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990.

60. *Робертс Ф.С.* Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. – М.: Наука, 1986.

61. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. – М.: Эдиториал УРСС, 2000.

62. *Николис Г., Пригожин И.* Познание сложного. Введение. – М.: Мир, 1990.

63. *Уилсон Р.* Введение в теорию графов. – М.: Мир, 1977.

64. *Харари Ф.* Теория графов. – М.: Мир, 1973.

65. *Евстигнеев В.А., Касьянов В.Н.* Теория графов: алгоритмы обработки бесконтурных графов. – Новосибирск: Наука, 1998.

66. *Евстигнеев В.А., Касьянов В.Н.* Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003.

67. *Кестен Х.* Теория просачивания для математиков. – М.: Мир, 1986.

68. Применение теории графов в химии / Под ред. *Зефирова Н.С., Кучанова С.И.* – Новосибирск: Наука, 1988.

69. Химические приложения топологии и теории графов. Под ред. *Кинга Р.* – М.: Мир, 1987.

70. *Миркин Б.Г., Родин С.Н.* Графы и гены. – М.: Наука, 1977.

71. *Розенблит А.Б., Голендер А.Е.* Логико-комбинаторные методы в конструировании лекарств. – Рига: Зинатне, 1983.

72. Применение теории графов связи в технике / Под ред. *Кернопа Д., Розенберга Р.* – М.: Мир, 1974.

73. *Басакер Р., Саати Т.* Конечные графы и сети. – М.: Наука, 1974.

74. *Волконский В.И., Груздов В.В., Сомик К.В.* Связные информационные структуры – метод интеграции экономики будущего. – М.: Полтекс, 2001.

75. *Авондо-Бодино Дж.* Применение в экономике теории графов. – М.: Прогресс, 1966.

76. *Коробков С.А.* Применение теории графов в геодезии. – М.: Недра, 1976.

77. *Кульба В.В., Назаретов В.М., Чухров И.П.* Модифицированные функциональные графы как аппарат моделирования сложных динамических систем. Препринт. – М.: Институт проблем управления, 1995.

78. *Кульба В.В., Кононов Д.А., Ковалевский С.С. и др.* Сценарный анализ динамики поведения социально-экономических систем. Препринт. – М.: Институт проблем управления, 2002.

79. *Кононов Д.А., Кульба В.В. и др.* Синтез формализованных сценариев и структурная устойчивость сложных систем (синергетика и аттрактивное поведение). Препринт. – М.: Институт проблем управления, 1998.

80. *Кульба В.В., Кононов Д.А., Косяченко С.А., Шубин А.Н.* Методы формирования сценариев развития социально-экономических систем. – М.: СИНТЕГ, 2004.

81. *Малинецкий Г.Г.* Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: Введение в синергетику. / Сер. “Кибернетика: неограниченные возможности и возможные ограничения”. – М.: Наука, 1997.

82. *Махутов Н.А., Гаденин М.М.* Научные исследования и подготовка специалистов по обеспечению защищенности критически важных объектов // Машиностроение и инженерное образование. – 2004. – №1.

83. *S. Milgram*. The small world problem // Psychology Today. 1967. №2. Pp. 60-67.

84. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. – М.: ИКИ, 2002.

85. *Бандман О.Л.* Методы параллельного микропрограммирования. – Новосибирск: Наука, 1981.

86. *Горбунова Е.О.* Формально-кинетическая модель бесструктурного мелкозернистого параллелизма // Сибирский журнал вычислительной математики. 1999. Т. 2. № 3. С. 239-256.

87. *Бандман О.Л.* Мелкозернистый параллелизм в вычислительной математике // Программирование. 2001. №4. С. 5-20.

88. *Бочаров Н.В.* Технологии и техника параллельного программирования // Программирование. 2003. №1. С. 5-23.

89. *Воеводин В.В., Воеводин Вл.В.* Параллельные вычисления. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002.

90. *Кузюрин Н.Н.* Параллельный алгоритм для задачи о балансировке множеств // Дискретная математика. 1991. Т.3. В.4. С. 153-158.

91. *Bader D.A., Illendula A.K., Moret B.M.E., Weisse-Bernstein N.R.* Using PRAM algorithms on a uniform-memory-access shared-memory architecture. WAE 2001. LNCS 2141. 2001. P. 129-144.

92. *Agbaria A., Ben-Asher Y., Newman I.* Communication–processor tradeoffs in a limited resources PRAM. Algorithmica. 2002. № 34. P. 276–297.

93. *Макконелл Дж.* Анализ алгоритмов. Вводный курс. – М.: Техносфера, 2002.

94. *Metaxas P.* Parallel Algorithms for Graph Problems. PhD dissertation, Dartmouth College, 1991.

95. *Han Y., Pan V.Y., Reif J.H.* Efficient parallel algorithms for computing all pair shortest paths in directed graphs. Algorithmica. 1997. № 17. P. 399–415.

96. *King V., Poon Ch.K., Ramachandran V., Sinha S.* An optimal EREW PRAM algorithm for minimum spanning tree verification. Information Processing Letters. 1997. № 62. P. 153-159.

97. *Sajith G., Saxena S.* Optimal parallel algorithm for Brook's colouring bounded degree graphs in logarithmic time on EREW PRAM. Discrete Applied Mathimatics. 1996. № 64. P. 249-265.

98. *Johnson D.B., Metaxas P.* Optimal algorithms for the single and multiple vertex updating problems of a minimum spanning tree. Algorithmica. 1996. № 16. P.633–648.

99. *Chen Z.-Z., He X.* Parallel algorithms for maximal acyclic sets. Algorithmica. 1997. № 19. P. 354-368.

100. *Непомнящая А.Ш.* Представление алгоритма Эдмондса для нахождения оптимального ветвления графа на ассоциативном параллельном процессоре // Программирование. 2001. №4. С. 43-52.

101. *Кочкаров А.М.* Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. – Нижний Архыз: РАН САО, 1998.

102. *Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В.* Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. – Ижевск: НИЦ "РХД", 2001.