



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН

К 95-летию С.П.Курдюмова

К 95-летию
со дня рождения
С.П. Курдюмова



Горизонты
математического моделирования
и теория самоорганизации

С.А. Махов

Самоорганизация в моделях мировой динамики

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Махов С.А. Самоорганизация в моделях мировой динамики // Горизонты математического моделирования и теория самоорганизации. К 95-летию со дня рождения С.П. Курдюмова. — М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2024. — С. 128-143.

<https://doi.org/10.20948/k95-7>

<https://keldysh.ru/e-biblio/k95/7.pdf>

Самоорганизация в моделях мировой динамики

С.А. Махов

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Аннотация. Разработана динамическая макро модель мировой динамики. В модели мир разбит на 19 регионов по географическому принципу. Внутреннее развитие регионов описывается уравнениями разностного типа для демографических и экономических индикаторов (численность населения, валовой продукт, валовое накопление). Межрегиональные взаимодействия представляют собой двусторонние торговые потоки от региона к региону и описываются регрессионными уравнениями. Рассматривались четыре типа регрессий и два вида функциональной зависимости, всего исследовано восемь вариантов торгового уравнения. Проведено сравнение качества регрессионных моделей по коэффициенту детерминации. Расчеты показывают, что модель удовлетворительно аппроксимирует динамику монотонно меняющихся показателей. Проанализирована динамика немонотонных торговых потоков, для их аппроксимации предложено три вида функциональной зависимости от времени. Построен прогноз автономного развития регионов и глобальной динамики до 2040 г.

Ключевые слова: мировая динамика, математическое моделирование, макроэкономика, внешняя торговля, временные ряды, регрессионный анализ, прогноз

Self-organisation in world dynamics

S.A. Makhov

RAS Keldysh Institute of Applied Mathematics

Abstract. The paper presents a dynamic macro model of world dynamics. The world is divided into 19 geographic regions in the model. The internal development of the regions is described by regression equations for demographic and economic indicators (Population, Gross Domestic Product, and Gross Capital Formation). The bilateral trade flows from region to region describes interregional interactions and represented the trade submodel. Four types and two types of functional dependence were considered, in total eight variants of the trading equation were studied. The quality of regression models is compared by the coefficient of determination. By calculations the model satisfactorily approximates the dynamics of monotonically changing indicators. The dynamics of non-monotonic trade flows is analyzed, three types of functional dependence on time are proposed for their approximation. The forecast of regional development and global dynamics up to 2040 is constructed.

Keywords: world dynamics, mathematical modeling, macroeconomics, foreign trade, time series, regression analysis, forecast

Предисловие

Теория самоорганизации, она же синергетика, в своем пятидесятилетнем развитии дошла до стадии научно-практической дисциплины. Однако продвинуться дальше не удастся: официального научного статуса до сих пор нет. Причина, на мой взгляд, кроется в предмете исследования. С одной стороны, работы Г. Хакена, И. Пригожина, научной школы С.П. Курдюмова независимо друг от друга подтвердили наличие спонтанно возникающих структур в физических объектах (лазеры, неравновесные химические реакции, процессы горения), таким образом, самоорганизация объективно существует. С другой стороны, явление самоорганизации трудноуловимо: физические объекты различны, процессы различны, описывающие их уравнения также различны; общее только в самом наличии динамических структур, обусловленных внутренним устройством объекта. Кроме того, роль натурального эксперимента значительно меньше роли математического аппарата и численного моделирования. Поэтому отнести теорию самоорганизации к естественным наукам, несмотря на всю соблазнительность такого шага, не удастся: синергетика не вписывается в рамки стандартной физической теории. Также не получается приписать ее к «чистой» математике: используемый аппарат слишком разнообразен. Попытка «прописать» синергетику в философской среде тоже не принесла плодов, не в последнюю очередь из-за специфики предмета.

Хотя «стратегическое одиночество» синергетики вызывает беспокойство ее «приверженцев», это также дает определенную свободу действий. Не будучи связанным с единственной научной парадигмой, можно проводить исследования как в смежных, так и в дальних областях, пробуя разные подходы. Накопленный материал рано или поздно придаст новый импульс развития.

Прежде чем перейти непосредственно к теме статьи, выскажу несколько замечаний о явлении самоорганизации. Под самоорганизацией я буду понимать универсалии исследуемого объекта, то есть самоорганизация проявляется посредством универсалий объекта, точнее, его модели. При этом поиск универсалий ведется определенными математическими методами, а именно: обыкновенные дифференциальные уравнения (включая теорию бифуркаций, теорию катастроф и методы нелинейной динамики), уравнения в частных производных, разностные уравнения, клеточные автоматы. Для моделирования мировой динамики традиционно используется аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений и их разностных аналогов. Под универсалиями здесь понимаются: 1) устойчивые по времени величины (константы), 2) устойчивые по времени или по ансамблю функциональные зависимости, 3) устойчивое асимптотическое поведение исследуемых величин (устойчивый аттрактор). Дальнейшее изложение следует воспринимать как пример поиска универсалий в рамках конкретной математической модели.

Введение

Настоящая работа посвящена макро моделированию регионов и их совместной торговли. Методика моделирования опирается на работы [1,2,3,4,5].

Целью исследования является прогнозирование основных тенденций и построение сценариев глобального развития. В качестве основных методов используются: а) аппроксимация временных рядов статистическими методами, б) построение и анализ динамической модели. Применяется распределенный подход: мир разбивается на регионы по географическому принципу. Для каждого региона строится макро модель, описывающая демографические и экономические процессы, происходящие внутри региона; взаимодействие регионов описывается моделью внешней торговли. При этом используется однопродуктовое приближение, экономические агрегаты измеряются в постоянных долларах 2015 г.

Принята схема разбивки на регионы, применяемая в Организации Объединенных Наций. Ниже приведены названия регионов для каждого континента с аббревиатурой в скобках.

- Африка: Северная Африка (NAFR), Восточная Африка (EAFR), Центральная Африка (MAFR), Южная Африка (SAFR), Западная Африка (WAFR).

- Америка: Северная Америка (NAMR), Карибские острова (CRBN), Центральная Америка (CAMR), Южная Америка (SAMR).

- Азия: Средняя Азия (CAS), Восточная Азия (EAS), Юго-Восточная Азия (SEAS), Южная Азия (SAS), Западная Азия (WAS).

- Европа: Восточная Европа (EEU), Северная Европа (NEU), Южная Европа (SEU), Западная Европа (WEU).

- Океания: Океания (OCN).

В региональных моделях в качестве основных переменных взяты следующие индикаторы:

- 1) численность населения N ;
- 2) основной капитал K ;
- 3) валовой внутренний продукт Y ;
- 4) валовое накопление (вложения в основные фонды) I ;
- 5) двусторонний торговый поток T .

Для расчета переменных составляются разностные уравнения регрессионного типа. Параметры регрессий оцениваются по известной в прошлом статистике, взятой из баз данных ООН [6,7,8].

В модели внешней торговли основными показателями являются двусторонние торговые потоки, вычисляемые на основе автономных региональных моделей. Таким образом, основные переменные региональных моделей являются экзогенными величинами для торговой модели, что позволяет разделить модельные блоки и упростить расчеты.

Описание модели

Выпишем уравнения для автономной и торговой подмоделей.

$$N(t) = N(t-1) \cdot (1 + d_0 - d_1 \cdot N(t-1)), \quad (1)$$

$$K(t) = I(t) + I(t-1) + I(t-2), \quad (2)$$

$$Y(t) = a_K \cdot K(t) + a_N \cdot N(t), \quad (3)$$

$$I(t) = c_Y \cdot Y(t-1) + c_K \cdot K(t-1). \quad (4)$$

Здесь d_0 , d_1 , a_K , a_N , c_Y , c_K – постоянные параметры. Как видно из уравнения (1), численность населения рассчитывается независимо от экономических переменных; сама же она влияет на остальные переменные посредством уравнения (3). То есть в модель заложена гипотеза об одностороннем влиянии демографии на экономику.

Внешняя торговля региона описывается двусторонними товарными потоками, каждый из которых в общем случае зависит от валовых региональных продуктов и времени:

$$T_{ij} = f(t, Y_i, Y_j). \quad (5)$$

Здесь T_{ij} – товарный поток из региона i в регион j , Y_i , Y_j – валовые продукты регионов экспортера i и импортера j соответственно, t – время в годах: либо календарный год, либо номер года, начиная с определенного момента. Потоки считаются брутто-величинами, то есть внутренняя торговля региона ненулевая: $T_{ii} \neq 0$.

Рассматривалось 8 вариантов торгового уравнения (5):

$$T_{ij} = A + \alpha \cdot Y_i + \beta \cdot Y_j, \quad (5a)$$

$$\ln T_{ij} = \ln A + \alpha \cdot \ln Y_i + \beta \cdot \ln Y_j, \quad (5b)$$

$$\frac{T_{ij}}{Y_i} = \gamma + \delta \cdot Y_j, \quad (5c)$$

$$\ln \frac{T_{ij}}{Y_i} = \gamma + \delta \cdot \ln Y_j, \quad (5d)$$

$$\frac{T_{ij}}{Y_j} = \gamma + \delta \cdot Y_i, \quad (5e)$$

$$\ln \frac{T_{ij}}{Y_j} = \gamma + \delta \cdot \ln Y_i, \quad (5f)$$

$$T_{ij} = \eta + \theta \cdot t, \quad (5g)$$

$$\ln T_{ij} = \eta + \theta \cdot t. \quad (5h)$$

Уравнения (5a) и (5b) соответствуют множественной линейной и степенной зависимости (Multi-1 и Multi-2), уравнения (5c) и (5d) описывают линейную и степенную экспортную функцию (Export-1 и Export-2), (5e) и (5f) – линейную и степенную импортную функцию (Import-1 и Import-2). Ради порядка временные регрессионные модели (5g) и (5h), мы назовем «эталонными» (соответственно, Etalon-1, Etalon-2). Заметим, что для внутрорегионального потока T_{ii} экспортная и импортная функции совпадают.

Зная все потоки, можно рассчитать суммарный товарный экспорт T_{iW} и суммарный товарный импорт T_{Wi} для i -го региона:

$$T_{iW} = \sum_j T_{ij}, \quad (6)$$

$$T_{Wi} = \sum_k T_{ki}. \quad (7)$$

Суммирование происходит по всем торговым партнерам, включая сам регион i . Полный региональный экспорт с учетом услуг X_i связан линейной зависимостью с суммарным товарным экспортом:

$$X_i = e_0 + e_1 \cdot T_{iW}. \quad (8)$$

Аналогично полный региональный импорт M_i определяется через суммарный товарный импорт:

$$M_i = m_0 + m_1 \cdot T_{Wi}. \quad (9)$$

В уравнениях (8), (9) коэффициенты e_0, e_1, m_0, m_1 – константы для каждого региона.

Проверка уравнений проводилась методом наименьших квадратов. Качество аппроксимации уравнений определяется по коэффициенту детерминации и значимости параметров регрессионных моделей. Верификация модели показала следующее.

1) Демография регионов Америки, Азии и Океании хорошо описывается уравнением (1) с 1970 по 2040 гг., для африканских регионов пришлось сдвинуть начало расчетов.

2) Для европейских регионов демографическое уравнение (1) не прошло проверку и подверглось модификации.

3) Уравнения (2)–(4) адекватно описывают региональную макроэкономику, за исключением ряда регионов, для Вост. Африки, Сред. Азии, Вост. Европы сделан сдвиг начала расчетов, для Юж. Америки проделана модификация уравнений.

4) Торговое уравнение (5) дало в целом удовлетворительную подгонку для монотонно меняющихся двусторонних потоков.

5) Наблюдается хорошая аппроксимация для суммарного товарного экспорта и импорта региона.

Помимо верификации также было проведено сравнение видов торгового уравнения по коэффициенту детерминации. Сравнение проводилось тремя способами: а) трех-интервальное распределение моделей по коэффициенту детерминации (грубая прикидка), б) 10-интервальное распределение (гистограмма), в) построение ранг-размерной зависимости (непрерывный способ). В табл. 1 приведено трех-интервальное распределение регрессионных моделей по коэффициенту детерминации R^2 . На рис. 1 и рис. 2 изображены гистограммы распределений восьми моделей по коэффициенту R^2 с шагом 0,1. Ради экономии места и удобства сравнения все линейные модели показаны на рис. 1, все нелинейные – на рис. 2.

Таблица 1. 3-интервальное распределение регрессионных моделей по R^2

Модели	Etalon-1	Etalon-2	Multi-1	Multi-2	Export-1	Export-2	Import-1	Import-2
Диапазон	<i>Количество моделей, попавших в диапазон</i>							
0,0–0,3	77	64	41	33	147	129	158	144
0,3–0,7	95	99	85	78	114	116	112	122
0,7–1,0	189	198	235	250	100	116	91	95

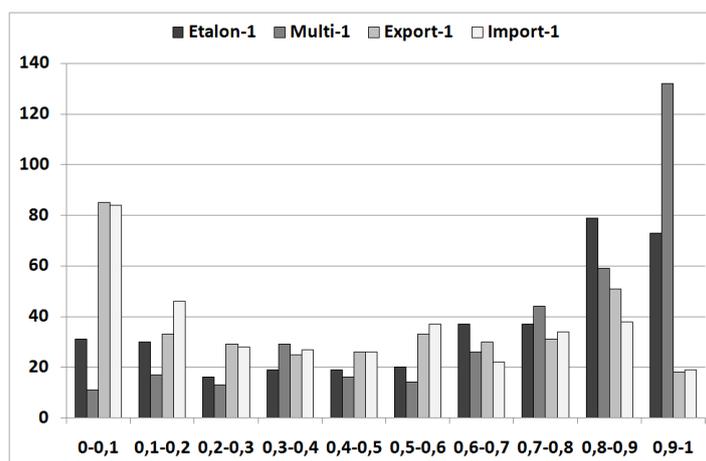


Рис. 1. Гистограмма распределения линейных моделей (5g), (5a), (5c), (5e)

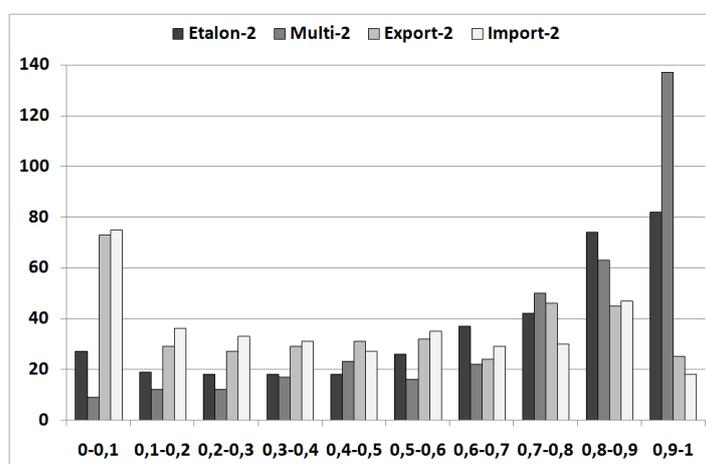


Рис. 2. Гистограмма распределения нелинейных моделей (5h), (5b), (5d), (5f)

На рис. 3 приведены графики ранг-размерной зависимости для линейных моделей, на рис. 4 – для нелинейных моделей. По оси ординат отложены значения R^2 , по оси абсцисс – ранг, при этом ранг 1 присвоен минимальному значению, ранг 361 – максимальному. Ранг-размерная зависимость показывает зависимость исследуемой величины от накопленной частоты, по сути – обратную эмпирическую функцию распределения. Чтобы обратная функция получилась в чистом виде, следует перейти от абсолютных частот к относительным частотам, разделив ранг на 361. Пологость конечного участка графика говорит о количестве примеров удачной аппроксимации: чем более полог график, тем выше качество модели.

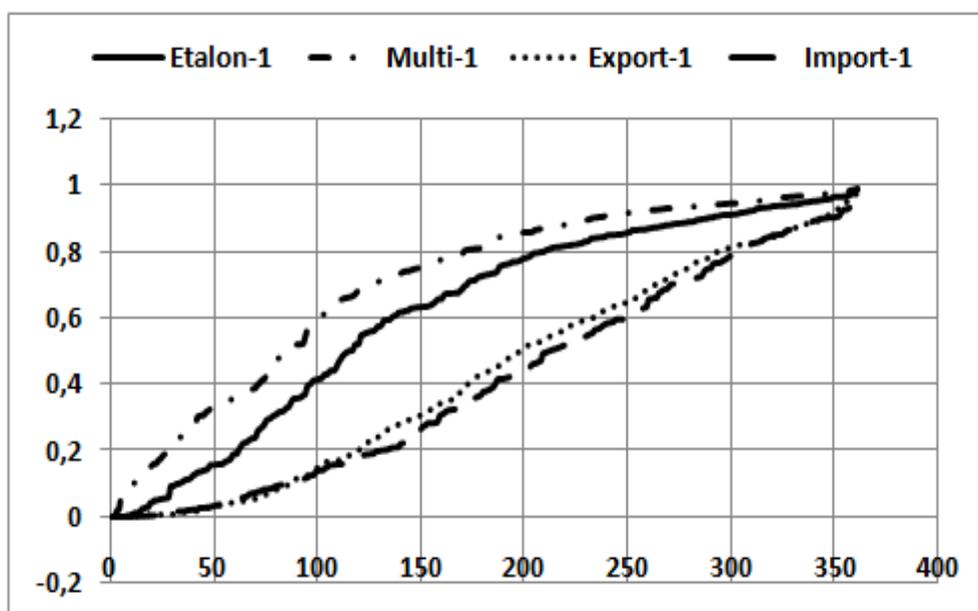


Рис. 3. Ранг-размерная зависимость для моделей (5g), (5a), (5c), (5e)

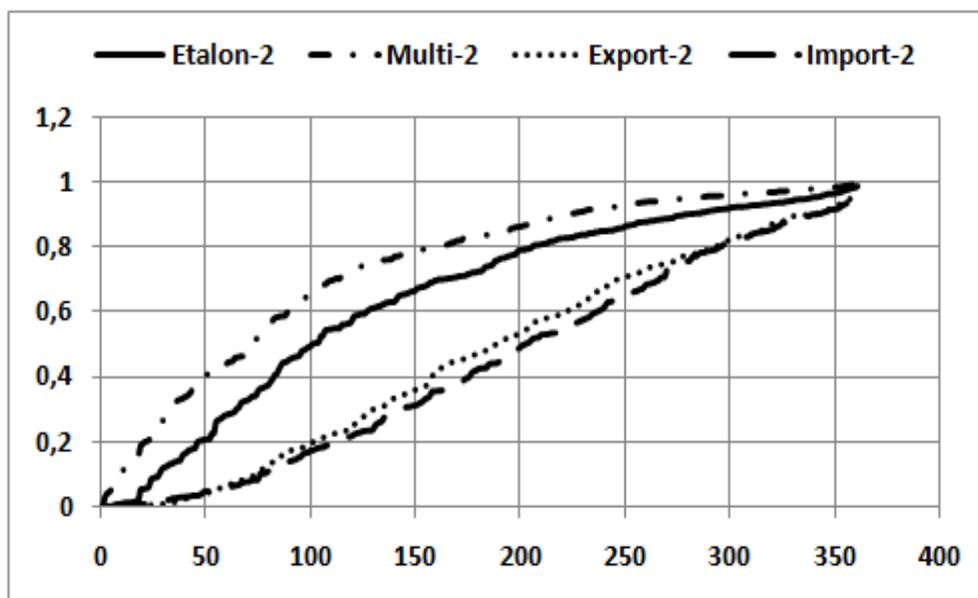


Рис. 4. Ранг-размерная зависимость для моделей (5h), (5b), (5d), (5f)

Выводы:

- нелинейные модели лучше подгоняют данные, чем аналогичные линейные модели;
- множественная модель лучше справляется с подгонкой данных, чем парные модели;
- в парных моделях (5c), (5d), (5e), (5f) случаев с близким к нулю R^2 больше, чем в эталонных регрессиях (5g) и (5h).

Расчеты

Графики приведены для отдельных расчетных величин и лишь при одном фиксированном наборе параметров. Ради экономии на одном рисунке 4–5 расчетных кривых, относящихся преимущественно к одному континенту. Двусторонние товарные потоки рассчитаны по множественной нелинейной модели (5b).

На рис. 5–7 приведены графики глобальных величин: численности мирового населения, глобального продукта и валового накопления с 1970 по 2040 гг. Маркеры – исторические оценки (и прогноз ООН с 2020 г. для населения), сплошная линия – модельный расчет.

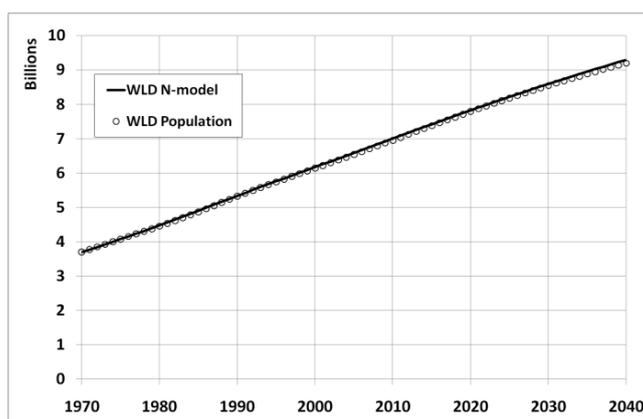


Рис. 5. Динамика мирового народонаселения в млрд. чел.

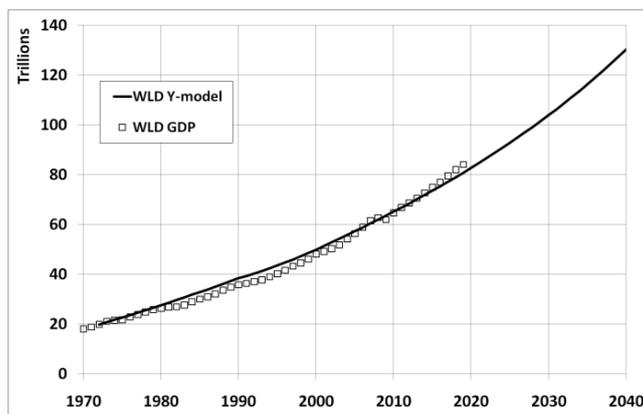


Рис. 6. Динамика валового мирового продукта в трлн долл. 2015 г.

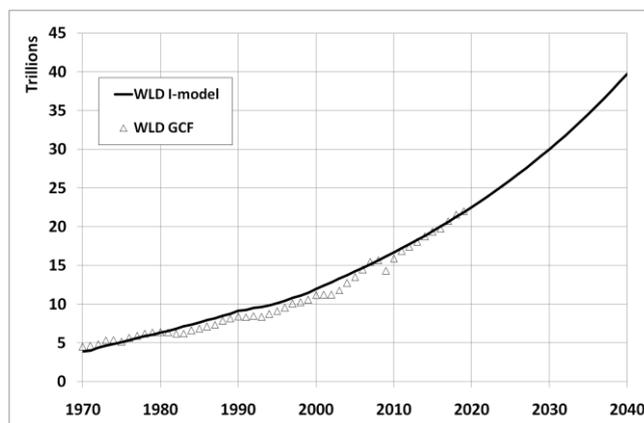


Рис. 7. Глобальное валовое накопление, в трлн долл. 2015 г.

Визуально между эмпирикой и расчетом неплохое соответствие, что для демографии неудивительно, учитывая результаты региональных моделей, а для макроэкономики, видимо, сработал эффект «больших чисел». Основной вклад внесли регионы с большими значениями ВВП: Сев. Америка, Вост. Азия, Зап. Европа; к тому же при суммировании отклонения от расчетных линий частично компенсировались, что снизило относительный разброс.

Вычисления двусторонних торговых потоков по уравнению (5b) дали ожидаемые результаты: в тех случаях, где верификация была успешной, расчеты более или менее близки к статистике; там же, где в ходе проверки возникли трудности, численный эксперимент продемонстрировал несоответствие между моделью и данными.

Лучше всего множественная лог-модель подошла для экспортных потоков десяти регионов: четырех европейских, четырех азиатских (за исключением Сред. Азии), Сев. Америки и Вост. Африки. В качестве образца на рис. 8–11 приведены все экспортные потоки Зап. Европы. Данные представлены в логарифмическом масштабе в долл. 2015 г.

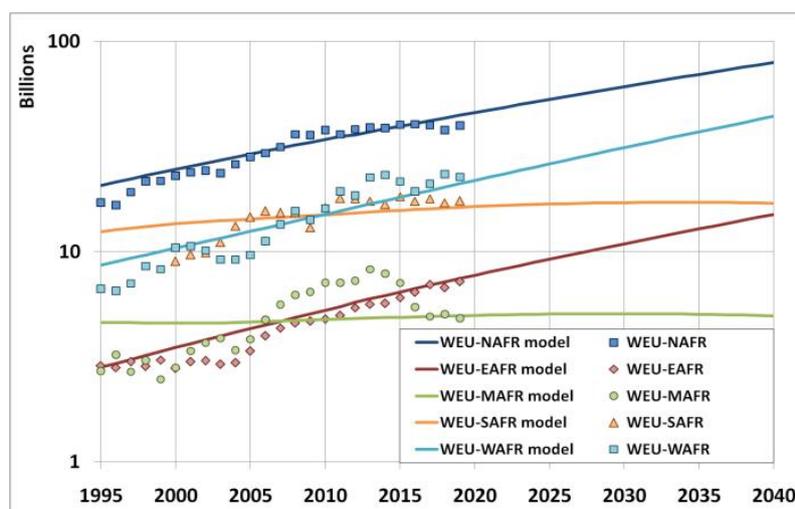


Рис. 8. Двусторонние товарные потоки из Зап. Европы в регионы Африки

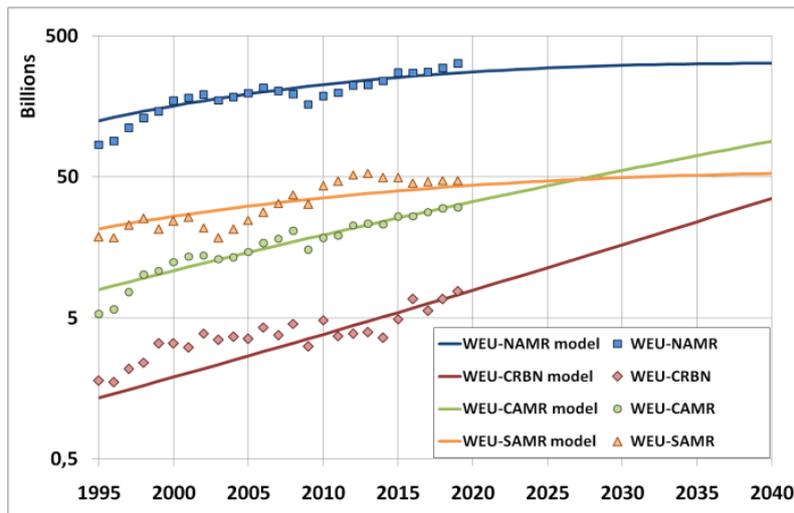


Рис. 9. Двусторонние товарные потоки из Зап. Европы в регионы Америки

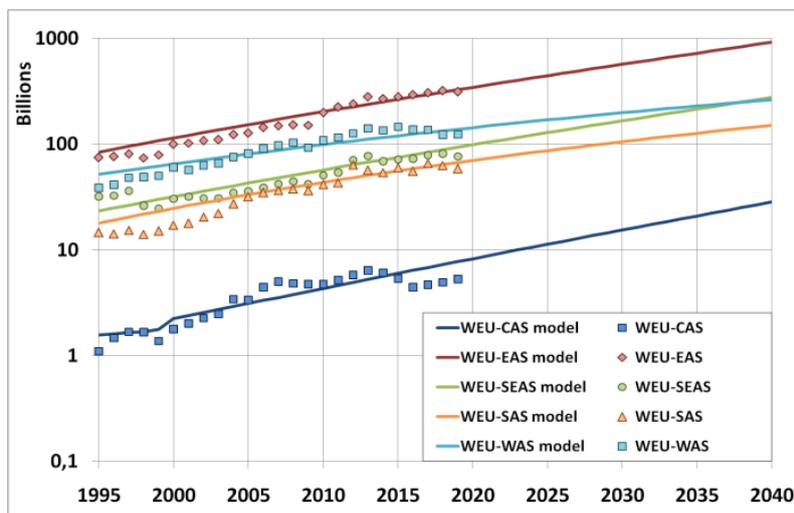


Рис. 10. Двусторонние товарные потоки из Зап. Европы в регионы Азии

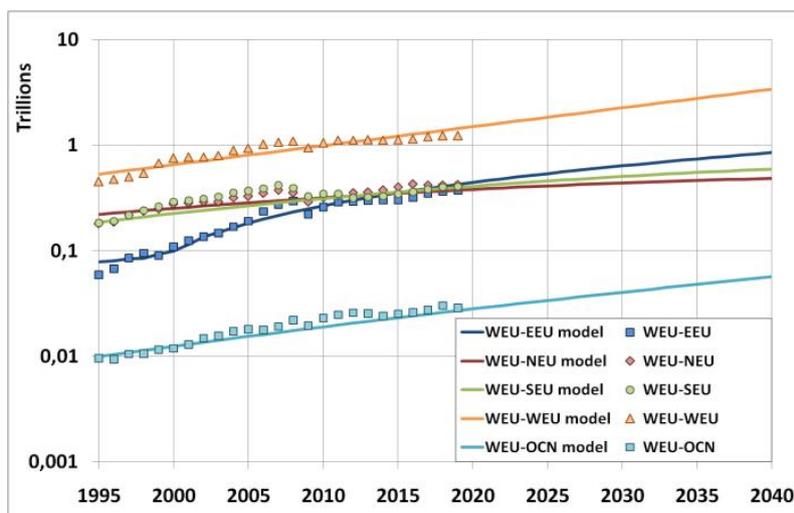


Рис. 11. Двусторонние товарные потоки из Зап. Европы в Европу и Океанию

Региональный товарный экспорт-импорт позволяет оценить интегральную степень расхождения торговой модели с данными. Даже если отдельные двусторонние потоки плохо аппроксимированы, в силу пресловутого закона больших чисел их сумма может быть хорошо подогнана регрессией. На рис. 12 показана динамика суммарного товарного экспорта европейских регионов, на рис. 13 – их товарного импорта.

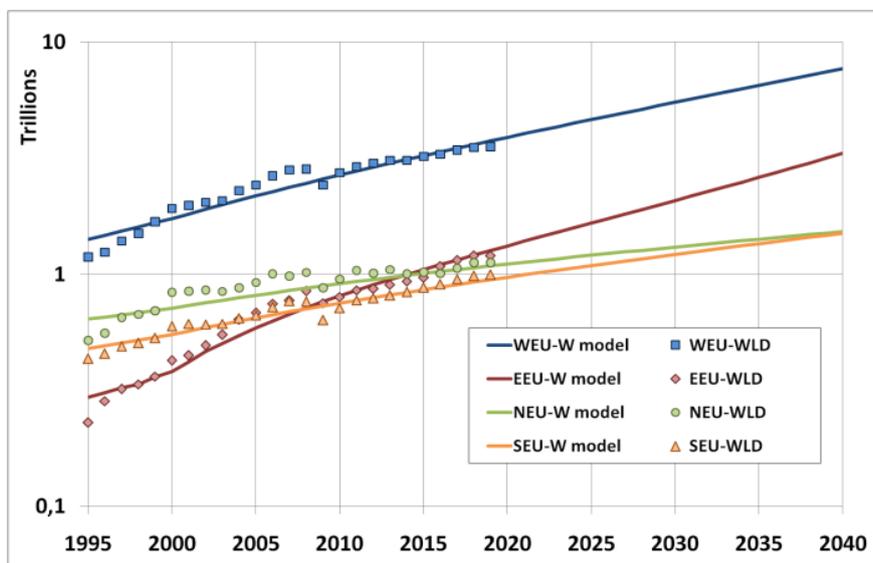


Рис. 12. Суммарный товарный экспорт регионов Европы

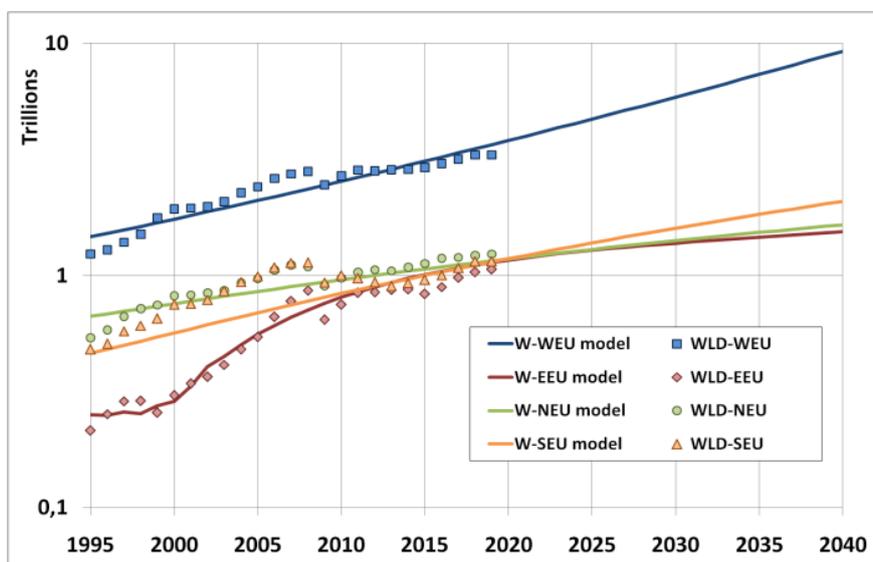


Рис. 13. Суммарный товарный импорт регионов Европы в логарифмическом масштабе

Общие выводы:

- За редким исключением демографические величины ведут себя непрерывно и монотонно, что идеально подходит для регрессионной модели.

- Наблюдается хорошее совпадение расчетных кривых с прогнозом ООН.

- Региональные ВВП в целом растут со временем, на тренд накладываются колебания.

- Макроэкономика региона хуже описывается предложенной моделью, что заметно в регионах Африканского континента. Наилучшее соответствие между моделью и эмпирическими данными наблюдается в регионах Европы и Океании.

- Более половины торговых потоков имеют временной тренд и хорошо аппроксимируются предложенными регрессионными моделями.

- Помимо возрастающего тренда можно выделить три типа динамики двусторонних потоков:

- 1) стационарный ряд – отсутствие линии тренда либо очень слабый тренд;

- 2) S-образная зависимость;

- 3) волновая (циклическая) динамика.

Снижение размерности

Можно дать более строгое обоснование небольшого числа типов зависимостей торговых потоков от времени, используя методы снижения размерности пространства исследуемых признаков. Относительно простым в использовании является метод главных компонент, позволяющий построить в выборочном пространстве систему некоррелированных рядов – главных компонент – на основе ортонормированных линейных комбинаций исходных признаков [9]. Также метод дает возможность оценить суммарную дисперсию главных компонент, т.е. долю объясненного разброса при использовании первых k компонент и отбрасывании остальных. Иными словами, можно оценить точность «натягивания» выборочного пространства на первые k главных компонент, заменяя все пространство k -мерной проекцией.

Метод главных компонент использует либо ковариационную, либо корреляционную матрицу исследуемых признаков. В первом случае величины должны быть отцентрированы (средние равны нулю), во втором случае нормализованы (нулевые средние, единичные дисперсии). Для ковариационной (корреляционной) матрицы вычисляются собственные значения λ_k и собственные векторы u_k , координаты последних задают коэффициенты линейных комбинаций центрированных (нормализованных) признаков в главные компоненты g_k по формулам: $g_k = u_k^1 \cdot z_1 + u_k^2 \cdot z_2 + \dots + u_k^n \cdot z_n$, u_k^i – координаты собственного вектора u_k , z_i – центрированные (нормализованные) признаки, n – размер ковариационной (корреляционной) матрицы. Ввиду того, что ковариации и дисперсии как региональных ВВП, так тор-

говых потоков численно велики (порядка 10^{24} долл. 2015 г.), удобнее использовать корреляционную матрицу.

Критерий информативности первых k главных компонент, показывающий их относительную долю в суммарной дисперсии, рассчитывается по формуле $G_k = (\lambda_1 + \dots + \lambda_k) / (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – собственные значения корреляционной матрицы в порядке убывания.

Результаты применения метода главных компонент к торговым потокам и рядам ВВП приведены в табл. 2, 3 и на рис. 14 и 15. Ряды региональных ВВП описываются первой главной компонентой с точностью 0,954, а двумя компонентами – 0,986. Региональные торговые потоки описываются тремя главными компонентами с точностью 0,802, а семью компонентами – 0,907. Ввиду погрешности вычислительного алгоритма $G_{20} < 1$.

Таблица 2. Собственные значения корреляционной матрицы региональных ВВП и критерий информативности 19 главных компонент

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
λ_k	18,12	0,605	0,193	0,045	$1,51 \cdot 10^{-2}$	$9,15 \cdot 10^{-3}$	$3,93 \cdot 10^{-3}$	$3,65 \cdot 10^{-3}$	$1,98 \cdot 10^{-3}$
G_k	0,9535	0,9853	0,9955	0,9980	0,9988	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$1,60 \cdot 10^{-3}$	$8,84 \cdot 10^{-4}$	$5,62 \cdot 10^{-4}$	$2,82 \cdot 10^{-4}$	$1,94 \cdot 10^{-4}$	$1,24 \cdot 10^{-4}$	$1,07 \cdot 10^{-4}$	$2,47 \cdot 10^{-5}$	$1,71 \cdot 10^{-5}$	$3,00 \cdot 10^{-6}$
0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1

Таблица 3. Собственные значения корреляционной матрицы торговых потоков и критерий информативности 20 главных компонент

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ_k	209,9565	47,2331	32,4538	15,0965	10,4513	6,4716	5,9259	5,1194	4,6699	3,4799
G_k	0,5816	0,7124	0,8023	0,8442	0,8731	0,8910	0,9074	0,9216	0,9346	0,9442
k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
λ_k	3,0285	2,8947	2,5916	2,5242	2,0266	1,8877	1,4455	1,3530	1,1380	0,9729
G_k	0,9526	0,9606	0,9678	0,9748	0,9804	0,9856	0,9896	0,9934	0,9965	0,9992

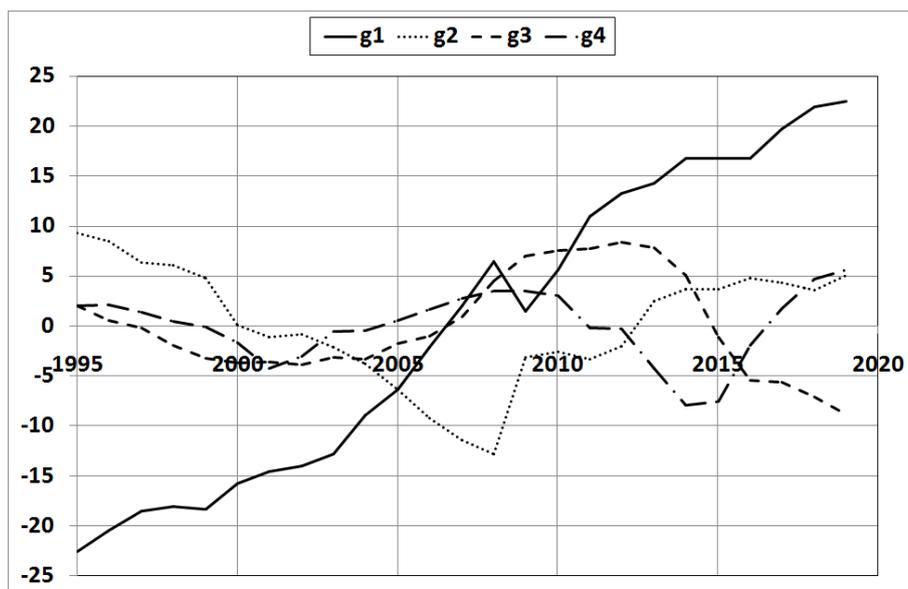


Рис. 14. Первые 4 главных компонент для торговых потоков: g_1 , g_2 , g_3 , g_4

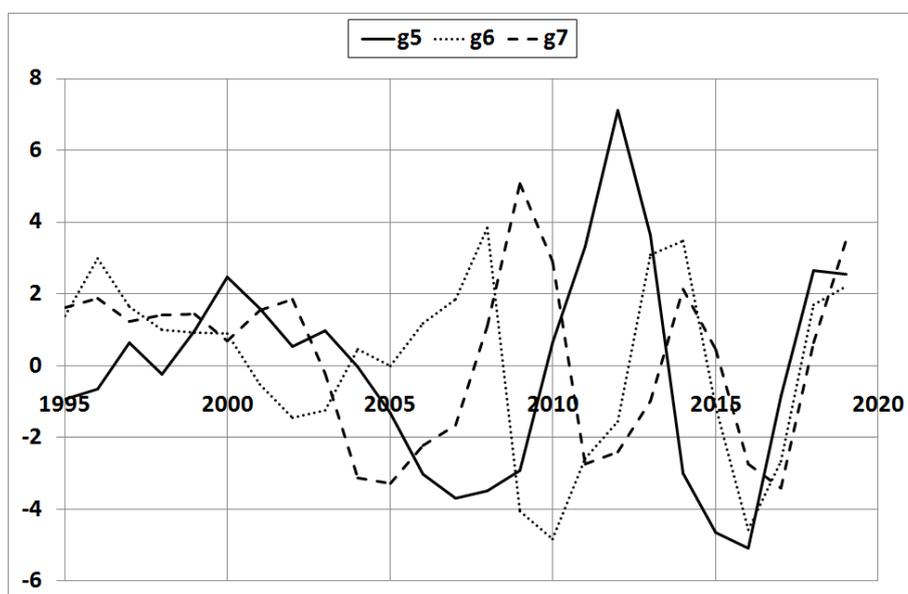


Рис. 15. Следующие 3 главных компоненты для торговых потоков: g_5 , g_6 , g_7

Анализируя первые 7 компонент, можно сделать следующие выводы. Первая главная компонента g_1 возрастает со временем, описывая трендовую составляющую рядов взаимной торговли. Вторая компонента g_2 состоит из двух частей: нисходящий тренд до 2008 г. и восходящий тренд с выходом на константу к 2016 г. Третья компонента g_3 представляет собой фактически одиночную положительную волну, начинающуюся в 2008 г. и заканчивающуюся в 2016 г., вне этой волны имеет место слабый нисходящий тренд. Четвертую компоненту можно описать как колебание из двух волн: положительной волны с 2003 по 2011 гг. и отрицательной с 2012 по 2017 гг. Компоненты g_5 , g_6 , g_7 в той или иной степени можно считать циклическими с нечетко выраженными периодами от 5 до 9 лет. У следующих

главных компонент колебания постепенно становятся менее регулярными и более похожими на случайные всплески стационарного случайного процесса.

Сравнивая графики главных компонент с тремя вышеприведенными типами немонотонной динамики двусторонних потоков, заключаем следующее:

- а) линейная комбинация компонент g_1 и g_2 может дать S -образную зависимость;
- б) линейная комбинация компонент g_3 и g_4 описывают ситуацию одиночной волны;
- в) компоненты g_5, g_6, g_7 и все последующие дают циклическую динамику, которую с некоторой точностью можно считать «белым шумом».

Заключение

Построена динамическая макро модель мировой динамики. В модели мир разбит на 19 географических зон – регионов, каждый регион представляет собой формальное объединение соседних государств. Внутреннее развитие регионов описывается уравнениями разностного типа для демографических и экономических индикаторов. Межрегиональные взаимодействия представляют собой торговые связи, подмодель торговли описывает перетекание валовой продукции от региона к региону. Проведенные расчеты показывают, что модель удовлетворительно описывает динамику монотонно меняющихся показателей. Наилучшее соответствие наблюдается у демографических показателей, наихудшее – у индикаторов внешней торговли. Расчеты показывают либо положительную динамику, либо выход индикаторов на постоянные значения к 2040 г.

Литература

1. *Махов С. А.* Динамическая модель внешней торговли стран БРИКС // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2016. №128.
2. *Махов С. А.* Динамическая модель стран БРИКС с учетом торговли // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2017. №139.
3. *Пирогов Г.Г., Богородицкий В.К., Бороздин И.И., Татарникова М.В., Федоровский Ю.П.* Моделирование международных внешнеэкономических связей в моделях глобального развития. Препринт ВНИИСИ. – М.: ВНИИСИ, 1980.
4. *Дубовский С.В.* Прогнозирование российского экономического роста и финансовой динамики в условиях глобализации и нестабильности // Общественные науки и современность. – М.: Наука, 2005. №3, с.129-136.
5. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов, прогноз и управление. – М.: Мир, 1974, кн. 1.

6. *United Nations, Department of Economic and Social Affairs, Population Division* World Population Prospects 2019: Methodology of the United Nations Population Estimates and Projections (ST/ESA/SER.A/425). – New York: United Nations, 2019. https://population.un.org/wpp/Publications/Files/WPP2019_Methodology.pdf
7. *United Nations Statistic Division*. National accounts main aggregates database. 2020. <https://unstats.un.org/unsd/snaama/Downloads>.
8. UNCTADstat Data Center online. 2020. http://unctadstat.unctad.org/wds/ReportFolders/reportFolders.aspx?sCS_ChosenLang=en.
9. Айвазян С.А., Бухитабер В.М., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности. Справочное издание // Под ред. С. А. Айвазяна. – М.: Финансы и статистика, 1989.