

Режимы с обострением: эволюция идеи



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 517.9, 519.6
ББК 22.161, 22.19
Р 33

Режимы с обострением: эволюция идеи / Под ред. Г.Г. Малинецкого. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 312 с. — ISBN 5-9221-0768-2.

Рассматривается один из бурно развивающихся разделов самоорганизации — синергетики — теория нестационарных диссипативных структур. Эти структуры являются типичными для многих нелинейных сред с положительной обратной связью. Они обладают многими парадоксальными свойствами — пространственной локализацией, возможностью строить на их основе сложные организации в диссипативных средах.

Для студентов-старшекурсников, аспирантов, специалистов и просто интересующихся задачами теории самоорганизации систем, прогнозами катастрофических явлений.

Ил. 152.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие ко второму изданию	5
Из предисловия к первому изданию	27
I. Режимы с обострением, инерция тепла, нестационарные диссипативные структуры (рождение идеи)	32
<i>Тихонов А. Н., Самарский А. А., Заглязьминский Л. А., Волосевич П. П., Дегтярев Л. М., Курдюмов С. П., Попов Ю. П., Соколов В. С., Фаворский А. П.</i> Нелинейный эффект образования самоподдерживающегося высокотемпературного электропроводного слоя газа в нестационарных процессах магнитной гидродинамики.	32
<i>Самарский А. А., Соболев И. М.</i> Примеры численного расчета температурных волн	41
<i>Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.</i> Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла.	61
<i>Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.</i> Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью	68
<i>Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.</i> Локализация процессов диффузии в средах с постоянными свойствами	72
<i>Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.</i> Об одном подходе к сравнению решений параболических уравнений	78
<i>Еленин Г. Г., Плохотников К. Э.</i> Об одном способе качественного исследования одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности с нелинейным источником тепла.	90
<i>Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П., Самарский А. А.</i> Взаимодействие диссипативных тепловых структур в нелинейных средах	103
<i>Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.</i> Диссипативные структуры в неоднородной нелинейной горячей среде	111
<i>Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.</i> Нестационарные диссипативные структуры в нелинейных двухкомпонентных средах с объемными источниками	119
II. Собственные функции нелинейной среды (теория сложных нестационарных структур)	126
<i>Самарский А. А., Еленин Г. Г., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.</i> Горение нелинейной среды в виде сложных структур	126

<i>Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Потапов А. Б., Самарский А. А.</i> Архитектура многомерных тепловых структур	136
<i>Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б.</i> О приближенном исследовании симметричных локализованных структур	143
<i>Бакирова М. И., Димова С. Н. (НРБ), Дородницын В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А., Свирицевский С. Р.</i> Инвариантные решения уравнения теплопроводности, описывающие направленное распространение горения и спиральные волны в нелинейной среде	149
<i>Димова С. Н. (НРБ), Касчиев М. С., Колева М. Г., Василева Д. П. (НРБ).</i> Численное исследование радиально-несимметричных структур в нелинейной теплопроводной среде	157
<i>Куркина Е. С., Курдюмов С. П.</i> Спектр диссипативных структур, развивающихся в режиме с обострением	165
III. Математический аппарат теории нестационарных структур (симметрии, теоремы сравнения, точные решения)	178
<i>Дородницын В. Л.</i> Разностные аналоги теоремы Э. Нётер	178
<i>Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.</i> О неограниченных решениях полулинейных параболических уравнений	198
<i>Галактионов В. А., Посашков С. А.</i> О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями	226
IV. Развитие и приложение теории	245
<i>Керкис А. Ю., Соколов В. С., Трынкина Н. А., Фомичев В. П.</i> Экспериментальное исследование эффекта токового слоя	245
<i>Захаров А. И., Клавдиев В. В., Письменный В. Д., Ротхардт Л., Саенко В. Б., Старостин А. Н., Ян Г.</i> Экспериментальное наблюдение <i>T</i> -слоев в движущейся плазме, взаимодействующей с магнитным полем	249
<i>Кириченко Н. А.</i> Локализованные нестационарные структуры в задачах лазерной термохимии	254
<i>Ахромеева Т. С., Бункин Ф. В., Кириченко Н. А., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.</i> О некоторых свойствах математической модели лазерного нагрева металлов в воздухе	268
<i>Капица С. П.</i> Синергетика и демография	274
V. Приложения	285
<i>Малинецкий Г. Г.</i> Научное творчество С. П. Курдюмова и теория режимов с обострением	285
<i>Избранные труды С. П. Курдюмова</i>	302

Предисловие ко второму изданию

Режимы с обострением. Новые горизонты

Г. Г. Малинецкий

Совершенствования науки следует ждать не от способности или проворства какого-нибудь отдельного человека, а от последовательной деятельности многих поколений, сменяющих друг друга.

Ф. Бэкон

Развитие традиции. С момента первого издания книги «Режимы с обострением» [1] прошло несколько лет. За это время и в самой теории, и в ее приложениях удалось значительно продвинуться вперед. И среди сделанного трудно даже упомянуть все наиболее интересные исследования. Поэтому, оглядываясь на эти годы, проще поступить иначе. Так, как советовал во время подготовки обзорных докладов поступать Сергей Павлович — в одной части выделить то, что развивает традицию, что позволяет ответить на уже заданные вопросы. В другой — обсудить новые идеи, взаимосвязи, проблемы, появляющиеся в обсуждаемой области.

Начать, наверно, следует с того, что значение теории режимов с обострением в эти годы росло. Почему? В одной из недавно вышедших книг в серии «Синергетика: от прошлого к будущему» профессор Д. С. Чернавский охарактеризовал синергетику, как «науку о неустойчивых процессах» [2]. Однако неустойчивости, характерные для линейных систем, связаны с экспоненциальным ростом (или с ростом по закону геометрической прогрессии в дискретном времени).

Более глубокое понимание реальности связано с исследованием *нелинейных систем*. Простейший признак нелинейных систем — возможность более быстрого отклонения от состояния равновесия, взрывной рост, происходящий не за бесконечное (как для линейных систем), а за конечное время. Но именно такие объекты и являются предметом исследования теории режимов с обострением.

Традиционная проблематика теории режимов с обострением, как математической теории, связана с компьютерным исследованием нелинейных математических моделей, для которых характерны решения, несуществующие в целом, а также с получением априорных оценок для времени обострения.

Сергей Павлович стремился вовлечь в развитие теории друзей, коллег, физиков-экспериментаторов, которые могли бы проверить предсказания теории. И это давало в прошлом и дает сейчас свои плоды.

Профессор Алексей Георгиевич Свешников — создатель научной школы в области математической теории дифракции, много лет заведовавший кафедрой математики физического факультета МГУ, — вспоминает, что именно после одной из бесед с Сергеем Павловичем у него возник интерес к математическим аспектам теории режимов с обострением.

Одним из важных результатов, полученных в этой области, стала теория разрушения решений нелинейных краевых задач для нелинейных уравнений псевдопараболического типа.

В рамках этих исследований, в частности, рассматриваются следующие уравнения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \left(\Delta \varphi + \operatorname{div} \left(|\nabla \varphi|^{p-2} \nabla \varphi \right) - |\varphi|^{q_1} \varphi \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a \operatorname{div} \left(|\nabla \varphi|^2 \nabla \varphi \right) + \bar{\lambda} |\varphi|^{q_2} \varphi = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\Delta^2 \varphi + \Delta \varphi + \operatorname{div} \left(|\nabla \varphi|^{p_1-2} \nabla \varphi \right) \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \operatorname{div} \left(|\nabla \varphi|^{p_2-2} \nabla \varphi \right) = 0. \quad (2)$$

Эта теория была построена А. Г. Свешниковым и его учениками [3, 4]. Одним из них — М. О. Корпусовым — в Институте прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН была в 2005 г. защищена докторская диссертация, посвященная этому важному и интересному классу объектов. Уравнения вида (1) возникают при математическом моделировании пробоя в полупроводниках. В частности, в этих моделях рассматривается отрицательная дифференциальная проводимость среды. Замечательным свойством весьма сложных математических объектов такого типа является существование некоторого энергетического функционала. Оценивая изменение со временем этой «обобщенной энергии», удается доказать, что решение соответствующего уравнения в частных производных существует конечное время.

Как правило, после того как для какой-то модели удастся выявить неустойчивость, приводящую к режиму с обострением, начинаются поиски объекта, для которого этот эффект мог бы быть исследован экспериментально. Для обсуждаемых уравнений псевдопараболического типа этот этап оказался уже пройден [5, 6]. В тесном сотрудничестве с экспериментаторами удалось показать, что полученные оценки для времен обострения соответствуют значениям, наблюдаемым при пробое реальных полупроводников.

В исследовании модели тепловых структур — классический объект теории режимов с обострением — вычислительный эксперимент стимулировал теорию. До получения строгих результатов и особенности нестационарных диссипативных структур, и эффекты локализации были поняты на основе многочисленных компьютерных расчетов. Любо-

пытно, что для модели (1) ситуация оказалась иной — теория намного опередила вычислительный эксперимент.

Другое традиционное направление связано с построением двух и трехмерных автомодельных решений вида

$$T(\mathbf{r}, t) = g(t) \cdot f(\mathbf{r}/\varphi(t)) \quad (3)$$

для модели тепловых структур

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k_0 T^\sigma \operatorname{grad} T) + q_0 T^\beta, \quad (4)$$

играющей ключевую роль в теории режимов с обострением. Эти решения описывают сходящиеся к центру симметрии тепловые волны растущей амплитуды. Функция $g(t)$ описывает закон роста амплитуды, $\varphi(t)$ — полуширины, $f(\xi)$ — форму решения.

Поиск таких решений связан с решением сложной нелинейной эллиптической задачи. Принципиальным шагом в решении этой задачи было применение техники продолжения решения по параметру (например, β или σ). Работа С. П. Курдюмова и Е. С. Куркиной, описывающая предложенный вычислительный алгоритм и ряд принципиальных результатов, связанных с его применением, представлена в настоящей книге.

С выяснением свойств таких автомодельных решений — так называемых *собственных функций нелинейной среды* — С. П. Курдюмов связывал *законы организации процессов в нелинейных средах*. Под законами организации понимаются правила, по которым простые структуры могут быть объединены в сложные. При таком взгляде объединение должно быть таким, чтобы разные части сложной структуры развивались в одном темпе, с одним моментом обострения.

Почему эта задача, которой занимались и продолжают заниматься более 30 лет, представляется столь важной? Одним из триумфов современной науки в целом и математической физики, в частности, представляется квантовая механика. Собственные функции, определяющие решения уравнения Шрёдингера, позволяют найти уровни энергии атомов, описать и до некоторой степени понять дискретность, возникающую при исследовании объектов микромира.

Однако уравнение Шрёдингера — линейный объект, что многократно упрощает его математическое исследование. В то же время в современной физике все большую роль начинают играть нелинейные теории. И для их успешного развития было бы очень важно знать свойства хотя бы простейших нелинейных сред. Представление о них и дает модель (4).

И здесь встает еще один глубокий вопрос, связанный с определением того уровня организации, на котором появляются диссипативные свойства материи, появляется необратимость. Традиционный взгляд теоретической физики связан с представлением о том, что законы микромира обратимы, поэтому фундаментальные уравнения должны быть

гамильтоновыми. При этом необратимость возникает, как показывает классическая статистическая физика, на макроуровне.

Но есть и другая точка зрения. Ее придерживался Сергей Павлович. По его мнению, фундаментальные уравнения должны описываться диссипативными системами, где уже определено направление движения времени. А тому, в такой интерпретации должна была бы соответствовать некоторая диссипативная структура в нелинейной горячей среде. Любопытно, что линеаризованное уравнение для собственных функций нелинейной среды для определенного класса сред сводится к стационарному уравнению Шрёдингера.

Этот подход не раз обсуждался на семинарах в Институте прикладной математики. Оппонентом Сергея Павловича часто выступал академик Яков Борисович Зельдович, считавший, что гамильтонова структура уравнений принципиальна и что квантовая механика слишком хороша для радикальных изменений.

С другой стороны, существует необратимость в самом процессе наблюдения объектов микромира. Наблюдение за микрообъектом, процедура измерения связана с тем, что из вероятностного мира мы каким-то образом начинаем влиять на макроскопический объект, который *необратимо* меняет свое состояние. Но макрообъект также должен подчиняться законам квантовой механики. Откуда же берется необратимость?

Это — фундаментальный вопрос, на который у современной науки пока нет хорошего ответа.

Поэтому особенно интересны поиски ответа на него, которые ведутся на основе представлений нелинейной динамики и синергетики. Как показывает опыт исследований многих модельных систем, накопленный синергетикой, для последних характерна *чувствительность по отношению к начальным данным и чувствительность по отношению к параметрам*. Первая приводит к тому, что во многих задачах возникает *горизонт прогноза* — принципиальное ограничение для предсказания будущей динамики, а также теряет смысл отдельная траектория. Второе свойство делает измерение вероятностным. Параметрическая неустойчивость заставляет мерить характеристики системы не точно при данном значении параметра, а в некоторой окрестности этого значения. Появляется необходимость осреднять, а с ней и необратимость. Такой взгляд на необратимость развивает профессор Д. С. Чернавский в динамической теории информации [2].

По мнению одного из создателей синергетики, нобелевского лауреата И. Р. Пригожина, диссипативные члены должны присутствовать непосредственно в уравнениях микроскопической динамики. Свои надежды на создание соответствующего математического аппарата исследователь возлагал на теорию линейных несамосопряженных операторов [7]. Работы в этом направлении он и представители его научной школы более 10 лет вели совместно с учеными Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

В последние годы развивались и намного более радикальные концепции, претендующие на объяснение процесса редукции волнового пакета. Выдающийся английский математик Роджер Пенроуз выдвинул тезис о неполноте квантовой механики. Он выдвинул гипотезу о так называемой «объективной редукции» (в противовес «субъективной», связанной с процессом наблюдения) [8]. Объективная редукция, по его мнению, должна иметь место в ансамбле взаимодействующих квантовых объектов, если энергия всей системы достаточно велика, либо если «ее слишком долго не наблюдали». В этом случае становятся существенными такие эффекты, которые должна была бы рассматривать теория квантовой гравитации. Они в конце концов приводят к тому, что происходит редукция — квантовая система оказывается в некотором «классическом состоянии». По мнению Р. Пенроуза именно объективная редукция играет ключевую роль в феномене сознания. В настоящее время началась работа по экспериментальной проверке выдвинутого подхода.

Другой радикальный подход связан с попыткой объяснить, почему микрочастица, будучи описываема волновым пакетом, регистрируется *в одном* а не в нескольких детекторах. Этот подход, связанный с представлением о *скрытом времени*, развивает сотрудник отдела нелинейных процессов и синергетики ИПМ им. М. В. Келдыша РАН П. В. Куракин [9]. По его теории, в «скрытом времени» разворачивается процесс выбора между различными детекторами, которые могут зарегистрировать микрочастицу. И только затем начинается движение микрообъекта в реальном времени.

В последнее десятилетие происходит широкое обсуждение научным сообществом классического квантово-механического парадокса Эйнштейна–Подольского–Розена, возрождается интерес к основам квантовой механики. Во многом это стимулируется развитием теории квантовых вычислений, идеей квантового компьютера, проектами квантовой криптографии [10].

Сергей Павлович считал, что одним из рубежей современной науки должно стать *понимание* квантовой механики. Он надеялся, что развитие синергетики, теории нелинейных систем сыграет здесь принципиальную роль. Хотелось бы, чтобы эти надежды оправдались.

В науках же и искусствах... все должно шуметь новыми работами и дальнейшим продвижением вперед.

Ф. Бэкон

Новые направления. Режимы с обострением с самого начала их активного исследования рассматривались прежде всего как *промежуточная асимптотика*, дающая приближенное описание реальных процессов в некотором интервале масштабов. Позже выяснилось, что

именно такая асимптотика характерна для широкого класса систем с сильной положительной обратной связью.

Поэтому, с точки зрения теории режимов с обострением, большое значение имеют экспериментальные данные, демонстрирующие такую асимптотику. Они показывают возможные направления развития теории.

Такие данные появились в последние годы в теории управления риском [11, 12, 13]. Их характерные примеры представлены на рис. 1.

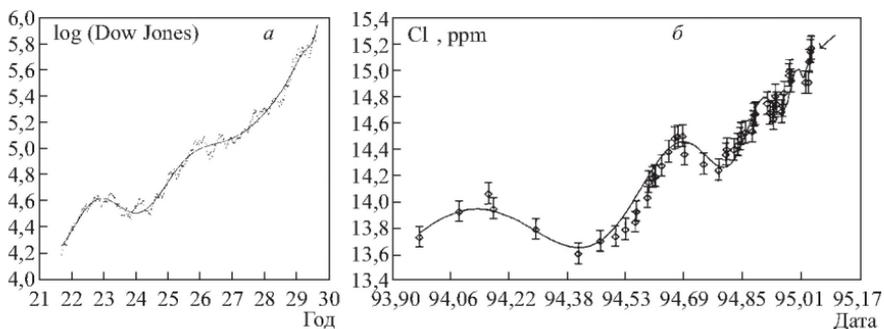


Рис. 1. Характерный вид зависимости, возникающей перед катастрофами в сложных системах. *а*) Зависимость логарифма индекса Доу-Джонса (этот индекс определяется ценой самого эффективного пакета акций 30 ведущих компаний Соединенных Штатов) от времени перед Великой депрессией с 1921 по 1930 год. Точки — это точные данные, а сплошная кривая — сглаженная зависимость, построенная по ним. Иллюстрация взята из работы [12]. *б*) Зависимость от времени логарифма концентрации ионов хлора перед катастрофическим землетрясением в Кобе в 1995 г. (указано в годах). Иллюстрация взята из работы [11]

Эти графики показывают, что разные катастрофические события могут развиваться по одним законам. В обоих случаях представлены характеристики, описывающие две сложно организованные иерархические системы: фондовый рынок и тектонический разлом — незадолго перед катастрофой.

В обоих случаях наблюдается быстрый катастрофический рост, на который накладываются ускоряющиеся колебания. Сглаженная кривая отлично описывается формулой

$$I(t) = A + B(t_f - t)^{-\alpha} [1 + c \cos(\omega \log(t_f - t) - \varphi)]. \quad (5)$$

Очевидно, последняя формула также соответствует режиму с обострением.

В этой связи возникают две новые проблемы. Во-первых, важно было бы понять системные механизмы возникновения такой положительной обратной связи и предложить соответствующие динамические модели. Во-вторых, в отличие от традиционных, ранее изучавшихся

моделей, описывающих режимы с обострением, в обсуждаемых случаях наблюдаются колебания. Частота этих колебаний меняется и это изменение частоты может рассматриваться как важный индикатор надвигающейся катастрофы. Поэтому представляется важным понять природу колебаний, наблюдающихся в сложных иерархических системах при приближении к моменту катастрофы. Видимо, с ответами на эти вопросы будет связано еще одно из направлений развития теории.

В связи с задачами теории режимов с обострением возникает несколько общих вопросов принципиального плана.

- **Откуда берется момент обострения?** Иными словами, как в задачах, в постановку которых время вообще не входит, возникает выделенный момент времени?
- **Что обеспечивает возможность ускоряющегося взрывного роста?** В задачах горения среды это оказывается запасенная в среде энергия, а в демографических задачах — особенности процесса технологического роста. И важно уметь описывать с единых позиций не только сам процесс развития в режиме с обострением, но и его причины.
- **Почему прекращается развитие в режиме с обострением?** По всей видимости, ответы на этот вопрос уже носят частный характер. Прекращение развития может происходить как по причине разрушения системы, так и по причине исчерпания ресурсов развития.
- **Что будет после момента обострения?**

Именно с этим вопросом, который более 20 лет назад задал академик Андрей Николаевич Тихонов на защите кандидатской диссертации Е. С. Куркиной, связаны многие практические направления развития теории. Вопрос этот, несмотря на его вторичность по отношению к первым трем, оказывается очень глубоким. Действительно, очень важно и интересно понять, с точки зрения математики, что должно сменить асимптотику, соответствующую режиму с обострением, при описании реальной системы. С точки зрения предметной области — будь то физика, экология или демография — важно было бы выяснить, какие механизмы в конце концов стабилизируют взрывную неустойчивость.

Фундаментальность этой проблемы можно проиллюстрировать следующим примером. Простейшей моделью теории нелинейных волн является уравнение

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0, & -\infty < x < \infty, \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned} \tag{6}$$

Это уравнение возникает во множестве задач физики, гидродинамики, при описании движения потока автомобилей на дороге. Его решения для широкого класса начальных данных развиваются в режиме с обострением $|u_x(x, t)| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_f$, или, как говорят, происходит *градиентная катастрофа*.

Попытка расширить область применения модели, «заглянуть за момент обострения» может быть связана с учетом других физических процессов, стабилизирующих неустойчивость, расширение может идти разными путями. Один из них — введение диссипативного члена

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx} \quad (7)$$

— приводит к уравнению Бюргерса, играющему важную роль во многих прикладных задачах и в математической физике в целом (в гидродинамике, к примеру, этот член описывает вязкость, $\nu = 1/\text{Re}$, где Re — число Рейнольдса).

Другой путь связан с обобщением понятия решения, с введением условий на разрыве. В газовой динамике это соответствует ударным волнам.

И с этой точки зрения ключевое значение приобретает исследование явления *жесткой турбулентности* и анализ простейшего модельного уравнения, описывающего его:

$$\begin{aligned} W_t &= W + (1 + ic_1) W_{xx} - (1 + ic_2) |W|^4 W, \\ W(x, t) &= u(x, t) + iv(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \\ W(x, 0) &= W_0(x), \\ W_x(0, t) &= W_x(L, t) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

(в литературе его называют QTDGL — *quintic time-dependent Ginzburg-Landau equation*).

Это явление состоит в редком возникновении гигантских пиков на турбулентном фоне. При этом для роста каждого пика при росте на много порядков асимптотику функции $|W(x, t)|$ определяет режим с обострением.

Исследование, проведенное А. Б. Потаповым и С. В. Ершовым, позволило выявить и механизмы возникновения сильной положительной обратной связи (необходимой для режима с обострением), ограничивающие факторы, и механизм «распада пика». С этой точки зрения, очень интересным представляется трехмерное дискретное отображение, описывающее сходную динамику, предложенное С. В. Ершовым [14, 13].

Исследование задачи (8) — нового объекта в теории режимов с обострением, представляется важным еще по двум причинам. Во-первых, в теории управления риском при описании различных процессов в нелинейных средах очень важно выделить предвестников катастрофических процессов, которые могли бы быть использованы при мониторинге опасных процессов. Модельное уравнение (8) показывает, какие предвестники в данном конкретном случае оказываются наиболее информативными и просто вычисляемыми. С другой стороны, существует ряд классических результатов, касающихся режимов с обострением в уравнениях шрёдингеровского типа. Их отличие от класса проблем, рассматривавшихся ранее в научной школе С. П. Курдюмова, состоит в наличии нескольких интегралов, сохраняющихся в течение всей эво-

люции решения. Уравнение (8) близко к таким системам при $|c_1| \gg 1$ и $|c_2| \gg 1$. Поэтому оно представляет своеобразный «мост» между двумя интересными и активно развивающимися областями нелинейной математической физики.

Кроме того, изучение модели (8) позволило развить в последние годы еще один подход, получивший название *теории русел и джокеров* [14, 15]. В асимптотическом анализе типично априорное выделение малых и больших параметров, областей медленной и быстрой динамики. Вместе с тем анализ странных аттракторов достаточно большой размерности показывает типичность иной ситуации.

Несмотря на отсутствие в явном виде соответствующих малых и больших параметров, поведение исследуемой системы принципиально отличается в разных частях фазового пространства. В одних частях динамика хорошо описывается с помощью проекции исходной системы на подпространство небольшой размерности (зачастую двумерное или трехмерное). Такие области фазового пространства были названы *руслами*, в пределах этих областей горизонт прогноза поведения исследуемой системы может быть достаточно большим.

Однако существуют и области фазового пространства, где динамика «многомерна» — много различных переменных реально определяют поведение системы, имеют место быстрые процессы и горизонт прогноза поведения исследуемого объекта оказывается мал. Такие области были названы *областями джокеров* (от карточного термина «джокер»). Джокер — карта, которой может присвоено значение любой другой карты. Наличие джокера резко повышает степень неопределенности, что используется во многих карточных играх). Более того, для русел и джокеров во многих ситуациях уместно различное описание. Для русел естественно детерминированное с помощью динамической системы небольшой размерности. Для области джокеров — вероятностное.

При этом в ряде случаев режим с обострением можно рассматривать как асимптотику соответствующего русла (именно так, к примеру, обстоит дело при анализе задачи (8)).

Очень важной для развития теории режимов с обострением Сергей Павлович считал совместную работу с демографами и изучение глобальных демографических процессов. Анализ демографических, палеодемографических и антропологических данных, проведенный профессором С. П. Капицей, позволил установить принципиальный факт [16]. Известный математик, экономист, монах Мальтус, считавший, что численность населения Земли растет в геометрической прогрессии (по экспоненциальному закону), был неправ. В действительности, на протяжении почти всей истории человечества закон был иным

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N^2,$$

т. е. скорость роста народонаселения не была постоянной, а все время увеличивалась.

Это простейшая модель теории режимов с обострением. Она описывает гиперболический рост

$$N \sim \frac{1}{t_f - t},$$

где момент обострения t_f приходится примерно на 2025 год. Если бы этот закон все время имел место, то к этому времени население Земли должно было бы стать неограниченно большим. Однако в течение последних нескольких десятилетий — на наших глазах — этот закон ломается. Происходит *глобальный демографический переход* — скорость роста числа людей уменьшается. Многие модели предсказывают *стабилизацию* населения мира в XXI в. на уровне $10 \div 12$ млрд. чел.

Иными словами, сейчас происходит крутой поворот, не имевший аналогов в мировой истории: человечество именно сейчас «заглядывает за момент обострения», создавая и осваивая новые алгоритмы развития цивилизации. В самом деле, нынешнее жизнеобеспечивающие технологии в состоянии поддерживать развитие человечества только десятилетия, а хотелось бы рассчитывать, по крайней мере, на века. Это — вызов науке, равному которому в истории еще не было. Эту задачу Сергей Павлович считал центральной. Он полагал, что именно синергетика должна стать основой для стратегического прогноза и проектирования будущего.

С чем же связан демографический переход? Какие факторы смогли переломить тенденцию, определявшую всю мировую историю? С чем связана квадратичная нелинейность — один из признаков, отличающих человека от всех других видов.

Первый ответ на этот важный вопрос дала теория С. П. Капицы и связанное с ней представление о *демографическом императиве*. В соответствии с ним, единственным параметром порядка в мировой динамике, к которому подстраиваются все остальные переменные, является переменная N — число людей на планете. Квадратичный закон роста в теории С. П. Капицы объясняется *информационным взаимодействием* (откуда ясен и квадратичный характер зависимости — число потенциальных связей между людьми пропорционально N^2).

Ранее на ключевую роль информационного взаимодействия в демографии обращал внимание сотрудник Института философии РАН В. Г. Буданов [17].

В соответствии с демографическим императивом, мир развивается как *целостная система*. Целостность эта обеспечивается информацией, которой располагает человечество и которую передает от поколения к поколению. Именно эта информация позволяет нашему виду не просто осваивать ресурсы, имеющиеся в нашей экологической нише (как другим видам), а постоянно расширять ее. В рамках теории С. П. Капицы демографический спад объясняется тем, что когда характерное время роста информационного взаимодействия становится порядка времени смены поколений, информационное взаимодействие

уже не успевает подстраиваться под происходящие изменения. Человечество уже не успевает развиваться в столь быстром режиме.

Сергей Павлович высоко ценил теорию С. П. Капицы. Однако в последние годы в рамках научной школы С. П. Курдюмова получили развитие два альтернативных подхода. Оба они, как и теория С. П. Капицы, исходят из представления о целостном, системном характере мировой динамики, из возможности рассматривать мир в целом как самоорганизующуюся систему.

Первая альтернатива, предложенная сотрудником ИПМ им. М. В. Келдыша РАН А. В. Подлазовым, исходит из *технологического императива*. В рамках этого подхода во главу угла ставятся *жизнесперегающие технологии*, обеспечивающие продление срока жизни людей, уменьшающие их смертность. На Земле живет столько людей, сколько может быть востребовано существующими жизнесперегающими технологиями. Развитие последних, измеряемых как уменьшение коэффициента смертности, имеет биологические ограничения. Соответственно, демографический переход обусловлен насыщением жизнесперегающих технологий. Развитие человечества по-прежнему продолжается, но оно оказывается все менее и менее биологически обусловлено.

Другая альтернатива была предложена сотрудником Института Африки РАН А. В. Кортаевым, сотрудницей Российской академии государственной службы при Президенте РФ Д. А. Халтуриной и сотрудником ИПМ им. М. В. Келдыша РАН А. С. Малковы [18]. Ее можно назвать *культурным императивом*. В рамках этого подхода считается, что параметрами порядка глобального развития являются три переменные: численность населения N , уровень развития экономики и технологий S и уровень грамотности L . Эти переменные связаны системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= aS(1 - L)N, \\ \frac{dS}{dt} &= bLN, \\ \frac{dL}{dt} &= cS(1 - L)L.\end{aligned}\tag{9}$$

Достоинством этой модели является то, что динамика каждой переменной может быть довольно точно восстановлена по имеющимся сейчас историческим данным. В частности, L здесь — доля грамотного населения, S — «избыточный» продукт, производимый на данном уровне технологического развития человечества.

Все три упомянутые модели дают один и тот же прогноз на XXI век, на то, что ждет человечество за точкой обострения. Это — стабилизация численности населения и прекращение экстенсивного, количественного экономического роста. Понятно, насколько масштабные и

принципиально важные задачи встают в этой связи и перед наукой в целом, и перед синергетикой в частности.

Имея в виду теорию режимов с обострением и, более широко, теорию самоорганизации, следует подчеркнуть, что они всегда были тесно связаны с конкретными физическими задачами, в частности, с проблемами физики плазмы. При этом синергетика, зачастую, позволяла привнести новые модели, методы анализа и, что еще более важно, новые понятия в актуальную область.

Поэтому очень важным и значимым представляется награждение в 2005 г. молодых сотрудников ИПМ им. М. В. Келдыша РАН — А. Л. Бондаревой, Н. В. Ёлкиной и А. В. Подлазова — медалями Президиума РАН за работы в области математики. Этой высокой награды удостоен цикл работ «Новые типы самоорганизации в нелинейных средах» [19]. Все сотрудники представляют Отдел нелинейных процессов и синергетики, которым в течение многих лет руководил член-корр. РАН С. П. Курдюмов.

В этом цикле рассмотрено формирование диссипативных структур и новых типов неустойчивостей в различных нелинейных средах, рассматриваемых в связи с актуальными физическими проблемами. Работы цикла начинают новые направления теории режимов с обострением. Поэтому кратко остановимся на них.

Одной из важнейших проблем астрофизики является вопрос о механизме нагрева солнечной короны. Корона — внешняя часть солнечной атмосферы. Корона состоит из очень горячей и разреженной плазмы. Она простирается до расстояний в несколько десятков радиусов Солнца. Ее температура, составляющая $1 \div 2$ млн. К, намного больше, чем у расположенных ниже фотосферы (ее толщина составляет $200 \div 300$ км, а средняя температура 5800 К) и хромосферы (толщина последней — $7 \div 8$ тыс. км, температура — $5 \div 10$ тыс. К).

Доставка энергии в более горячие внешние слои солнечной атмосферы не может осуществляться посредством какого-либо вида передачи тепла, поскольку тепло не распространяется от менее нагретых тел к более нагретым. Передачу энергии из глубинных областей Солнца (где ее источником служат реакции термоядерного синтеза) в хромосферу осуществляет магнитное поле. Нагрев верхних слоев солнечной атмосферы происходит через *вспышечные* (эруптивные) *события* в хромосфере. Последние могут варьироваться по размеру и энергии в диапазоне многих порядков величины.

Главной особенностью эруптивных процессов в солнечной плазме является отсутствие у вспышек собственных характерных размеров. Статистически это выражается в *степенном характере* их распределения по энергии

$$u(E) \sim E^{(-1+\alpha)}, \quad (10)$$

где $\alpha \approx 0,45$. С помощью уравнений магнитной гидродинамики и других традиционных подходов затруднительно предложить единое

описание событий настолько сильно различающихся между собой. Да и вопрос тут ставится иной, связанный прежде всего с объяснением степенной зависимости (10) и теоретическим получением показателя α .

И здесь возникает важная общая черта многих катастрофических событий, одну из фаз развития которых отлично описывают модели, допускающие режимы с обострением. Эта черта — степенной характер возникающих зависимостей. Иными словами, получив возможность «заглянуть за момент обострения». Здесь важно подчеркнуть два смысла этого термина. Говоря физическим языком, сама катастрофа развивается в быстром времени a , заглядывая за нее, мы можем иметь в виду временные масштабы того же порядка. Однако не менее важно посмотреть на происходящее в медленном времени, сравнимом со временем, проходящим от одной катастрофы до другой. И тут ключевую роль начинает играть статистика, и перейдя от динамики катастроф, мы сплошь и рядом сталкиваемся со степенными зависимостями. Степенные зависимости характерны для самых разных катастроф: от землетрясений и наводнений до биржевых крахов и аварий в атомной энергетике. Общность такого поведения многих сложных систем наглядно показывает рис. 2. По существу, само наличие такой зависимости выступает как признак целостной самоорганизующейся иерархической системы. Отметим, что статистика для гигантских пиков в модели (8) также является степенной.

Объяснение возникновения редких катастрофических событий и характерной для них степенной статистики дает активно развивающееся в настоящее время направление синергетики — *теория самоорганизованной критичности* [20, 14, 21, 35]. В соответствии с этой теорией катастрофы обусловлены тем, что рассматриваемые системы находятся на кромке хаоса или, говоря языком теории динамическим систем, в точке бифуркации. В этой точке малые случайные воздействия могут приводить к большим последствиям. Принципиальная новизна этой теории состоит в том, что в ней удалось очень просто описать системные механизмы, приводящие систему в критическое состояние (в точку бифуркации) без искусственной подстройки параметров.

Развитие этой теории не только позволило ввести в синергетику новые модели, понятия, представления, позволяющие говорить о редких катастрофических событиях, но и предложить достаточно простой и гибкий язык для описания и объяснения катастрофических явлений.

Принципиальной особенностью систем, находящихся в критической точке, является масштабная инвариантность происходящих в них процессов. Иными словами, эти процессы протекают одинаково на всех масштабах. В результате поведение критических систем не зависит от особенностей их устройства на микроуровне. Это дает возможность выбирать наиболее простой способ описания без ущерба для его точности. В частности, при компьютерном моделировании используются не непрерывные модели в виде дифференциальных уравнений, а дискретные или полудискретные — в виде клеточных автоматов или решеток

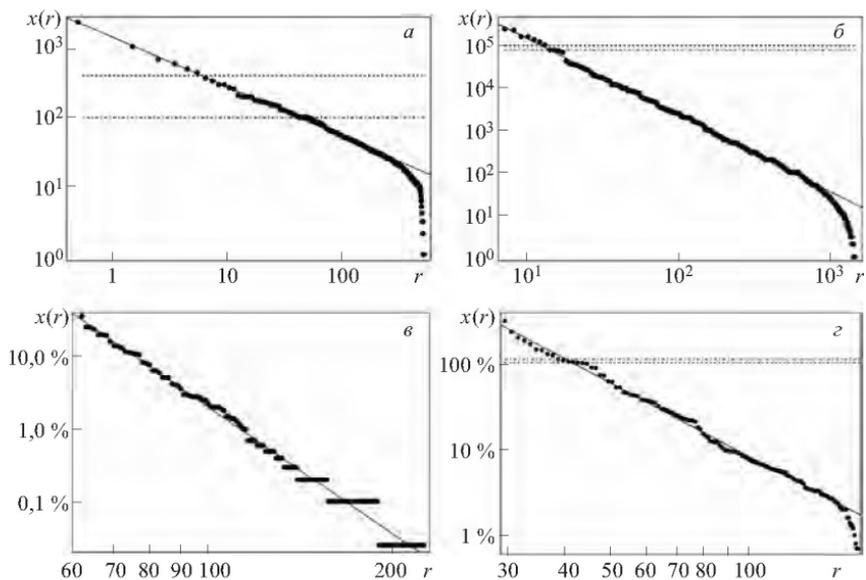


Рис. 2. Распределения бедствий различной природы. Ранжировка аварий на производстве по количеству погибших в их результате (а) и стихийных бедствий по количеству людей, получивших ранения (б) (данные начиная с 1975 г.). в) Ранжировка 164 стран по доле ВИЧ-инфицированного населения в возрастах от 15 до 49 лет по состоянию на конец 1999 г. з) Ранжировка наиболее распространенных компьютерных вирусов по интегральному проценту пораженных компьютеров (ежемесячные данные за период с 01.1998 по 11.2002). В двойном логарифмическом масштабе все зависимости имеют линейный вид, что говорит о степенном характере соответствующих распределений вероятностей

связанных отображений. При этом все факторы, которые не могут проявиться на макроуровне, подлежат исключению из правил модели.

На основе учета общих представлений физики Солнца А.Р.Осокиным и А.В.Подлазовым была построена дискретная модель солнечных вспышек [19, 24]. Основным понятием модели является *магнитный элемент*, соответствующий микротрубке вмороженного в плазму магнитного поля. Именно в таких микротрубках заключена поступающая в хромосферу энергия. Благодаря тому, что в нижней части хромосферы поле направлено радиально, задачу можно считать двумерной, характеризуя положение магнитного элемента местом выхода микротрубки в хромосферу. Энергия поля, заключенного в микротрубке, описывается величиной соответствующего ей магнитного элемента, а направление поля — его знаком.

Величины элементов и их положения полагаются дискретными. Если в одной точке оказываются магнитные элементы разных знаков, то происходит их частичная *аннигиляция*, сопровождающаяся умень-

шением величины элементов и выделением энергии. Это вызывает волну возмущения в плазме, которая может привести к контакту разнонаправленных трубок поля по соседству.

Тем самым вспышка представляется как лавинообразный процесс аннигиляции магнитных элементов. Построенная на основе таких достаточно простых правил модель для распределения энергии дает показатель $\alpha = 1/2$, хорошо согласующийся с данными наблюдений.

В физических системах традиционно рассматривают самоорганизацию, происходящую в обычном пространстве и связанную с возникновением самоподдерживающихся структур в различных пространственных областях. Однако в физике плазмы, в астрофизике, в физике твердого тела, в теории турбулентности имеют место многочисленные неустойчивости, развитие которых приводит к *самоорганизации в пространстве скоростей* частиц, составляющих систему. Здесь также могут иметь место взрывные процессы, которые могут рассматриваться в рамках теории режимов с обострением. Для исследования самоорганизации и в пространстве скоростей, и в обычном физическом пространстве приходится строить *кинетические модели* и оперировать с *функциями распределения* частиц по координатам и скоростям.

Огромный вклад в исследование самоорганизации, возможной на этом, кинетическом уровне, внес выдающийся ученый, сотрудник ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, профессор Московского физико-технического института Юрий Сергеевич Сигов.

В течение многих лет Юрий Сергеевич работал на кафедре прикладной математики МФТИ, которой руководил С. П. Курдюмов. В последние годы сектор кинетических моделей, созданный Ю. С. Сиговым, работал в Отделе нелинейных процессов и синергетики, которым заведовал Сергей Павлович, высоко ценивший это направление в синергетике.

Сотрудники ИПМ им. М. В. Келдыша РАН Н. В. Ёлкина и А. Л. Бондарева представляют научную школу Ю. С. Сигова. Исследования Н. В. Ёлкиной связаны с изучением магнитных диссипативных структур в лазерной плазме. Такие структуры имеют принципиальное значение для концепции быстрого поджига в лазерном термоядерном синтезе (ЛТС). Именно проекты ЛТС в течение нескольких десятилетий стимулировали развитие теории режимов с обострением.

Н. В. Ёлкина под руководством заведующим сектором кинетических моделей ИПМ им. М. В. Келдыша РАН В. Д. Левченко исследовала *филаментационную неустойчивость* при взаимодействии мощного лазерного импульса со сверхкритической плазменной мишенью. Филаментационная неустойчивость пучка быстрых электронов в плазме выражается в расщеплении пучка на узкие филаменты. При этом магнитное поле филаментов может достигать десятков мегагауссов.

Сергей Павлович не раз подчеркивал, что для развития теории режимов с обострением и синергетики в России в целом огромное

значение имело изучение различных структур в плазме. Открытие в вычислительном эксперименте Т-слоев в начале семидесятых годов в ИПМ АН СССР привело к возникновению многих глубоких физических и математических идей, к развитию важных научных направлений. Можно ожидать, что и на новом уровне глубокое изучение плазменных неустойчивостей, находящееся на переднем крае современных возможностей эксперимента, будет очень полезно.

Филаментационная неустойчивость описывается решениями самосогласованной системы уравнений Власова–Максвелла в бесстолкновительном приближении с помощью метода частиц. Решение этих уравнений позволило проследить эволюцию функций распределения ионной f_i и электронной компонент плазмы, зависящие от шести координат фазового пространства (\mathbf{r}, \mathbf{p}) и времени.

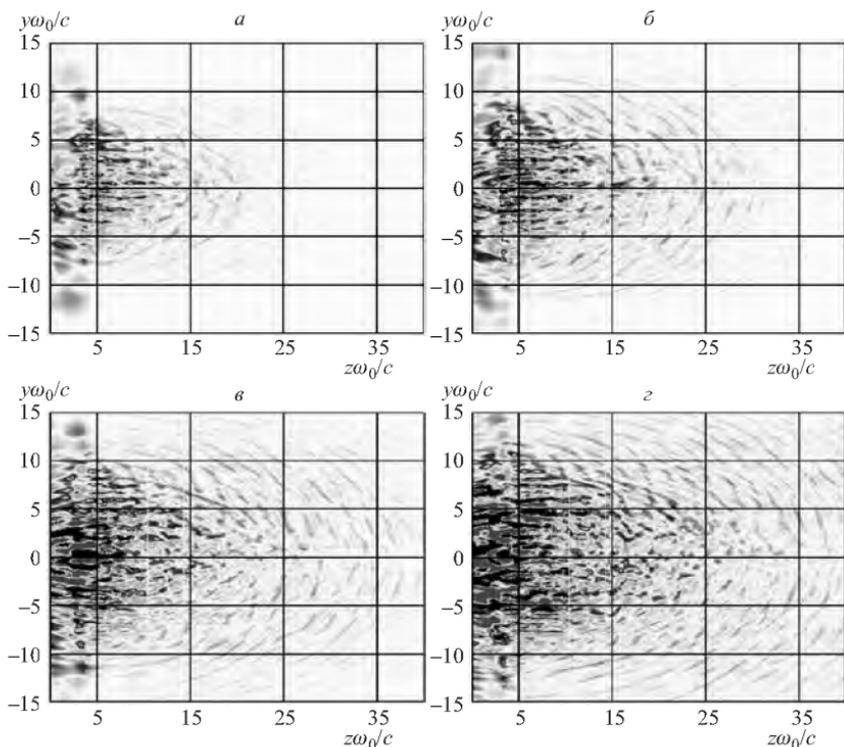


Рис. 3. Распределение магнитного поля в моменты $t\omega_0 = 90, 100, 110, 120$, $N_e = = 6n_{cr}$. Видна ярко выраженная филаментация. Здесь ω_0 — частота импульса, n_{cr} — критическая плотность плазмы

Типичное распределение магнитного поля в последовательные моменты времени представлено на рис. 3. Расчеты позволяют проследить сценарий развития филаментационной неустойчивости при различных

параметрах лазерного пучка и плазмы. Типичным для этого процесса является возникновение древовидной, фрактальной структуры. Огромный интервал масштабов, в котором развивается неустойчивость и на которых надо описывать процесс, предъявляет очень высокие требования и к используемым алгоритмам. К примеру, типичные расчеты требовали использования $10^6 \div 10^9$ узлов сетки и $10^8 \div 10^{10}$ микро-частиц. Эти расчеты потребовали использования многопроцессорного вычислительного комплекса, созданного в ИПМ им. М. В. Келдыша РАН [27, 28].

Отдельной проблемой при анализе данных такого объема стала визуализация информации. В нелинейной динамике при решении задач мониторинга и прогноза многих процессов, при исследовании сигналов сложной структуры в последние годы все шире используется вейвлет-анализ. При этом сигналу $f(t)$ сопоставляется вейвлет-спектр

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int f(t) \cdot \varphi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt,$$

где функция φ выбирается исходя из математических соображений, развитых в теории вейвлет-анализа и специфики задачи. В задачах о филаментационной неустойчивости в качестве φ удобно взять плоскую волну, промодулированную гауссианом.

Типичный пример вейвлет-спектра, полученного в расчетах филаментационной неустойчивости, показан на рис. 4. Здесь представлен спектр профиля продольного импульса в одном из сечений $z = \text{const}$. Видно образование древовидной структуры филаментов. Может быть эта неустойчивость, как ожидают сейчас многие специалисты, сыграет принципиальную роль в нескольких крупных научных и технологических проектах.

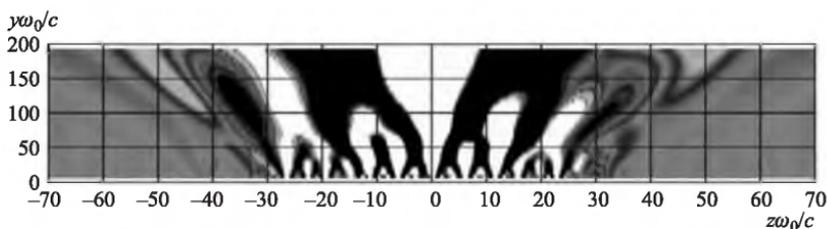


Рис. 4. Образование древовидной структуры масштабов филаментов. Вейвлет-спектр $W(a, b)$ профиля продольного импульса P_z в сечении $z = 8c/\omega_0$

В настоящее время одним из наиболее перспективных направлений науки в целом и теории самоорганизации в частности является исследование процессов, протекающих в нанометровом диапазоне ($1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}$) масштабов. С этими процессами связывают перспективы ожидаемого в ближайшее десятилетия технологического рывка в медицине, электронике, в создании новых материалов [29].

Нынешние технологические возможности позволяют строить наноструктуры «сверху вниз», собирая с помощью туннельного микроскопа. Однако это весьма сложно и дорого, поэтому желанной целью является создание структуры «снизу вверх», используя процессы самоорганизации и самоформирования. Используя идеи и представления синергетики, сотрудницам ИПМ им. М. В. Келдыша РАН Г. И. Змиевской и А. Л. Бондаревой удалось значительно продвинуться в понимании самоорганизации на наноуровне. Эти исследования были связаны с фундаментальными задачами изучения свойств наномодифицированных материалов и пленок, а также с возникновением дефектов материалов, планируемых для использования в установках управляемого термоядерного синтеза.

Процессы возникновения таких объектов требуют кинетического описания и решения интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. Эти уравнения удалось заменить *стохастическими аналогами*, представляющими стохастические дифференциальные уравнения. При этом приходится решать уравнения для функции распределения зародышей возникающих структур в пространстве параметров $f_r(g, t)$ (где g — число атомов в кластере) и функции распределения зародышей на поверхности или кристаллической решетке $f_g(\mathbf{r}, t)$.

Несмотря на всю сложность этого подхода и необходимость учета множества физических деталей, на этом пути удастся решить ряд глубоких содержательных задач. Одна из них связана с накоплением гелия в различных материалах, с образованием газовых пузырей-блистеров. По существующим оценкам, значительное количество гелия накапливается практически во всех конструкционных материалах активной зоны атомных реакторов, облучению α -частицами подвергаются поверхности солнечных батарей и зеркала в космосе.

Другая связана с возникновением островков тонких пленок на кристаллической подложке. В частности, рассматривались температура образования островков жидкого никеля на вольфрамовой подложке при температуре 2500 К.

В развитии теории обычно есть два противоположенных процесса. С одной стороны, простейшие модели исследуемых процессов «обрастают деталями», необходимыми для их сопоставления с экспериментом. С другой стороны, в рамках больших сложных проблем возникают простейшие базовые модели, дающие глубокое понимание исследуемых явлений (именно так из анализа уравнений магнитной гидродинамики в конце концов возникла модель тепловых структур (4)). И сейчас, оглядываясь на происходящее в теории режимов с обострением, и более широко — в теории самоорганизации, можно с удовлетворением убедиться, что активно и плодотворно идут оба процесса.

Качественные особенности систем, развивающихся в режиме с обострением, исследованные в научной школе С. П. Курдюмова, все чаще упоминаются философами, экономистами, специалистами по управлению рисками и политологами. На ключевое значение этих представ-

лений в современном естествознании регулярно обращает внимание академик В. С. Стёпин — один из ведущих специалистов по философии науки в мире [34]. По его мнению, именно синергетика окажется в центре всей научной картины в XXI в.

Принципиальное значение таких понятий, как «режимы с обострением», «момент обострения», в теории риска и безопасности регулярно подчеркивает один из ведущих российских специалистов в этой области — сотрудник Института машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, член-корр. РАН Н. А. Махутов.

В синергетике известен введенный Германом Хакеном «принцип подчинения». В соответствии с ним в процессе самоорганизации медленные, долгоживущие моды подчиняют себе быстрые, короткоживущие, начинают определять их динамику [32].

В простейших случаях конечномерных систем и простейших аттракторов это утверждение доказывается в классической теореме А. Н. Тихонова [33]. Именно после доказательства этой теоремы в связи с математическими моделями химической кинетики началось активное изучение «тихоновских систем», сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений, имеющих малые параметры при старших производных.

Вместе с тем совершенно ясно, что в случае сильной нелинейности, сверхбыстрых, взрывных процессах именно самые быстрые переменные будут играть ключевую роль. Именно они будут определять динамику системы и подчинять себе остальные моды. И в этих случаях требуется альтернатива хаковскому принципу подчинения. Ее предложил, рассматривая методологию и принципы синергетики, физик-теоретик и сотрудник Института философии РАН В. Г. Буданов. Он выделяет несколько иерархических уровней — микро, мезо и макро, анализирует их взаимосвязи и разные сценарии самоорганизации. И с этой точки зрения, «курдюмовский принцип» самоорганизации, связанный с подчинением динамики системы самым быстрым модам на некоторой стадии развития, является не менее значимым и общим, чем хаковский.

Сергей Павлович считал, что теория режимов с обострением сыграет свою роль в науке, в управлении, в технологиях, если ее идеи станут частью культуры, если будут установлены связи с научной и философской традицией, с изменением взгляда на реальность в целом, которого требует будущее. Он вкладывал в это большие усилия, выступая на многочисленных конференциях, взаимодействуя с философами. И это дало свои результаты.

Большую роль в этом сыграла многолетняя плодотворная совместная работа Сергея Павловича с его ученицей — доктором философских наук, сотрудником Института философии РАН, профессором Российской академии государственной службы при президенте РФ Е. Н. Князевой. Они являются соавторами более 50 работ, среди которых важное место занимает недавно вышедшая книга «Основания синергетики. Синергетическое мировидение». Она была выпущена

в 2005 г. в серии «Синергетика: от прошлого к будущему». Эта книга решает принципиальную задачу — раскрывает, как теория режимов с обострением меняет мировидение, мировоззрение, взгляд на природу, общество, на будущее человечества. И, судя по успеху этой книги и популярности ее предыдущих версий, решает успешно.

Наука во многом представляет собой диалог. Диалог между различными группами исследователей, между различными подходами, между поколениями. Поэтому очень большое внимание Сергей Павлович придавал привлечению молодежи в прикладную математику и в теорию режимов с обострением. В 2004 и 2005 годах в Институте прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН состоялись школы для молодых исследователей «Будущее прикладной математики». Ведущие ученые Института рассказывали молодых сотрудникам ИПМ, аспирантам и студентам ведущих вузов Москвы о перспективах развития своих научных направлений. По материалам школы была выпущена книга в издательстве УРСС [35] и DVD-диск — в ИПМ. В 2006 г. вышли два сборника научных статей «младшего поколения» научной школы Сергея Павловича [36, 37]. Состоялись первые (в 2005 г.) и вторые (в 2006 г.) Курдюмовские чтения в городе Твери, организованные Тверским государственным университетом. Огромным вниманием пользуется сайт Сергея Павловича <http://spkurdyumov.narod.ru>. На нем сейчас размещено более 300 статей и книг по теории режимов с обострением и по синергетике в целом.

Настоящее издание осуществляется с помощью финансовой поддержки Российским фондом фундаментальных исследований (грант №06-01-14114).

Можно сказать, что сейчас в теории режимов с обострением видны новые горизонты, что есть новые поколения исследователей, готовые к этим горизонтам идти.

Список литературы

1. Режимы с обострением. Эволюция идеи: Законы коэволюции сложных структур // Кибернетика: неограниченные возможности и возможные ограничения: Сб. статей / Ред. Г. Г. Малинецкий. — М.: Наука, 1998. — 255 с.
2. *Чернавский Д. С.* Синергетика и информация: Динамическая теория информации // Синергетика: от прошлого к будущему / Послесл. Г. Г. Малинецкого. 2-е изд., испр. и доп. — М.: Эдиториал УРСС, 2004. — 288 с.
3. *Корпусов М. О., Свешников А. Г.* О разрушении за конечное время решения начально-краевой задачи для полулинейного уравнения составного типа // ЖВМ и МФ. — 2000. — Т. 40, № 11. — С. 1716–1724.
4. *Корпусов М. О., Свешников А. Г.* О разрушении решений абстрактных задач Коши для нелинейных операторно-дифференциальных уравнений // Докл. РАН. — 2005. — Т. 401, № 1. — С. 1–3.
5. *Корпусов М. О.* Пробой полупроводников // Радиотехника и электроника. — 2004. — Т. 50, № 2. — С. 252–255.

6. Корпусов М. О., Свешников А. Г. Разрушение нелинейных волн Россби в полупроводниках // Радиотехника. — 2005. — № 1.
7. Пригожин И. От существующего к возникающему: Время и сложность в физических науках. 2-е изд. — М.: Комкнига, 2002. — 288 с.
8. Пенроуз Р. Новый ум короля. О компьютерах, мышлении и законах физики // Синергетика: от прошлого к будущему / Пер. с англ. 2-е изд. — М.: УРСС, 2005. — 400 с.
9. Куракин П. В. Скрытые параметры и скрытое время в квантовой теории. — ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. — 2004. — Препринт № 33. http://www.keldysh.ru/papers/2004/prep33/prep2004_33.html
10. Бауместер Д., Экерт А. Физика квантовой информации. — М.: Постмаркет, 2002. — 376 с.
11. Johansen A., Sornette D. et al. Discrete scaling in earthquake precursory phenomena: Evidence in the Kobe earthquake, Japan // J. Phys. I (France). — 1996. — V. 6. — P. 1391–1402.
12. Sornette D., Johansen A. Large financial crashes // Physica A. — 1997. — V. 245, No. 3–4. — P. 411–422. <http://ru.arXiv.org/abs/cond-mat/9704127>
13. Владимиров В. А., Воробьев Ю. Л., Капустин М. А., Малинецкий Г. Г., Подлазов А. В., Посашков С. А. и др. Управление риском. Риск, устойчивое развитие, синергетика. — М.: Наука, 2000 — 432 с. <http://risk.keldysh.ru/risk/risk.htm>
14. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б., Подлазов А. В. Нелинейная динамика: подходы, результаты, надежды // Синергетика: от прошлого к будущему. — М.: Эдиториал УРСС, 2006. — 280 с.
15. Новое в синергетике: Взгляд в третье тысячелетие // Информатика: неограниченные возможности и возможные ограничения / Ред. Г. Г. Малинецкий, С. П. Курдюмов. — М.: Наука, 2002. — 480 с. <http://www.keldysh.ru/book/ns.html>
16. Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика и прогнозы будущего. 3-е изд. — М.: Эдиториал УРСС, 2003. — 288 с. <http://iph.ras.ru/~mifs/kkm/Vved.htm>
17. Буданов В. Г. Синергетические аспекты информационных кризисов и культуры. — М.: Ин-т философии РАН, 1996. — С. 46–53.
18. Коротаев А. В., Малков А. С., Халтурина Д. А. Законы истории. Математическое моделирование исторических макропроцессов. Демография, экономика, войны. — М.: Комкнига, 2005. — 344 с.
19. Бондарева А. Л., Ёлкина Н. В., Подлазов А. В. Новые типы самоорганизации в нелинейных средах. — ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. — 2005. — Препринт № 48.
20. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized Criticality // Phys. Rev. A. — 1988. — V. 38, No. 1. — P. 364–374.
21. Bak P. How nature works: The science of self-organized criticality. — New York: Springer-Verlag Inc., 1996.
22. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. — М.: Наука, 1992. — 544 с.

23. Подлазов А. В. Теория самоорганизованной критичности — наука о сложности // Будущее прикладной математики: Лекции для молодых исследователей / Под. ред. Г. Г. Малинецкого. — М.: Эдиториал УРСС, 2005. — С. 404–426.
24. Подлазов А. В., Осокин А. Р. Самоорганизованная критичность эруптивных процессов в солнечной плазме // Математическое моделирование. — 2002. — Т. 14, № 2. — С. 118–126.
25. Сигов Ю. С. Вычислительный эксперимент: Мост между прошлым и будущим. — М.: Физматлит, 2001. — 288 с.
26. Малинецкий Г. Г., Змиевская Г. И. Синергетика в России: пути развития // Наука в России. — 2006. — № 2 (март-апрель). — С. 18–22.
27. Ёлкина Н. В., Левченко В. Д. Генерация филаментационной неустойчивости структуры магнитного поля в лазер-плазменном взаимодействии // Прикладная физика. — 2003. — № 5. — С. 16–23.
28. Ёлкина Н. В., Левченко В. Д. Развитие филаментационной неустойчивости при взаимодействии мощного лазерного импульса со сверхкритической плазмой // Вопросы атомной науки и техники. — 2003. — № 4.
29. Нанотехнология в ближайшем десятилетии. Прогноз направления исследований / Под ред. М. К. Роко, Р. Уильямс, П. Аливисатос. — М.: Мир, 2002. — 292 с.
30. Бондарева А. Л., Змиевская Г. И. Исследование изменения свойств поверхности в результате высокотемпературного блистеринга методом стохастического моделирования // Изв. РАН. Сер. физ. — 2002. — Т. 66, № 7. — С. 994–997.
31. Бондарева А. Л., Змиевская Г. И. Моделирование флуктуационной стадии высокотемпературного блистеринга // Изв. РАН. Сер. физ. — 2004. — Т. 68, № 3. — С. 336–339.
32. Хакен Г. Информация и самоорганизация: Макроскопический подход к сложным системам // Синергетика: от прошлого к будущему / Пер. с англ. 2-е изд. — М.: Эдиториал УРСС, 2005. — 248 с.
33. Избранные труды А. Н. Тихонова. — М.: МАКС Пресс, 2001. — 480 с.
34. Стёпин В. С. Теоретическое знание. — М.: Прогресс-Традиция, 2000. — 744 с. <http://www.philosophy.ru/library/stepin>
35. Будущее прикладной математики // Лекции для молодых исследователей / Под. ред. Г. Г. Малинецкого. — М.: Эдиториал УРСС, 2005. — 512 с.
36. Новое в синергетике. Новая реальность, новые проблемы, новое поколение // Сб. статей. Часть 1 / Под ред. Г. Г. Малинецкого. — М.: Радиотехника, 2006. — 120 с.
37. Новое в синергетике. Новая реальность, новые проблемы, новое поколение // Сб. статей. Часть 2 / Под ред. Г. Г. Малинецкого. — М.: Радиотехника, 2006. — 96 с.

Из предисловия к первому изданию

Книга, которая перед Вами, посвящена идее, развиваемой научной школой, сложившейся в свое время в Институте прикладной математики АН СССР. Эта идея связана с попыткой выяснить общие, универсальные черты нелинейных систем с сильной положительной обратной связью. Среди них объекты, которые изучают физика плазмы и химическая кинетика, теория взрыва и астрофизика, демография и математическая психология, а также многие другие научные дисциплины. По-видимому, эта идея является центральной в научной судьбе С. П. Курдюмова и большинства других авторов этого сборника.

Стиль и организация науки в Советском Союзе во многом отличались от уклада европейской и американской научной жизни. В стране была возможность и необходимость привлечения выдающихся ученых и талантливую молодежь к стратегически важным научным проектам. В ходе работы над ними рождались блестящие научные коллективы, а вместе с ними — новые подходы и области исследований, выдвигались неформальные лидеры научных направлений. Вокруг таких лидеров и новых ярких идей возникали научные школы. Эти школы объединяли людей разного возраста, различных научных взглядов, дополняющих и поддерживающих друг друга. Их работа позволяла быстро продвигаться в решении крупных задач, придавала размах и междисциплинарность проводимым исследованиям, помогала увидеть общее и главное во многих конкретных проблемах. И сегодня научные школы определяют возможности и уровень российской науки.

Институт прикладной математики создавался для решения задач в области математической физики, вычислительной математики, математического моделирования, связанных со стратегической стабильностью и национальной безопасностью. Его коллективом был внесен большой вклад в программы создания и совершенствования ядерного оружия, атомной энергетики, обеспечения космических полетов, развития вычислительной техники. Долгие годы директором Института был академик М. В. Келдыш.

Большие дела, крупные задачи, атмосфера напряженных поисков способствовали появлению новых идей, методов, коллективов, научных школ. Из Института выделились такие крупные научные центры, пользующиеся международной известностью, как Институт космических исследований, Вычислительный центр Академии наук, Институт математического моделирования. В рамках научной школы академика А. Н. Тихонова, в которой были получены фундаментальные результаты в области математической физики, асимптотического анализа, теории некорректных задач, вычислительной математики, возникла научная школа академика А. А. Самарского. С ней связаны принципиальные результаты в математическом моделировании, в теории численных ме-



Рис. 1. Значки режимов с обострением. 1979 г.

На фотографии представлена часть научной школы Сергея Павловича Курдюмова, с работами которой во многом связано развитие теории режимов с обострением в нашей стране.

Несколько комментариев к этой старой фотографии. Сидит патриарх отечественной вычислительной математики, поддерживавший и благословлявший создание и развитие режимов с обострением, академик Александр Андреевич Самарский. В течение многих лет он руководил 3-м отделом Института прикладной математики им. М. В. Келдыша (ИПМ РАН). Впоследствии он стал создателем, директором, а затем и почетным директором Института математического моделирования РАН (ИММ РАН).

Стоят слева направо. Алексей Борисович Потапов. Он предложил первый сработавший алгоритм построения многомерных собственных функций нелинейных сред. Много лет работал в Институте прикладной математики, темой его докторской диссертации были количественные характеристики хаоса и методы их расчета. Ныне работает ведущим исследователем в университете Эдмонтона (Канада) и занимается математическими задачами экологии.

За ним наш учитель — Сергей Павлович Курдюмов, которому и посвящена эта книга.

Справа от него — Александр Петрович Михайлов, заведующий отделом ИММ РАН, профессор факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова (ВМК МГУ). В последние годы занимается математическим моделированием в социологии и руководит соответствующей лабораторией в МГУ.

Елена Сергеевна Куркина, любимая ученица Сергея Павловича, доктор физико-математических наук, научный сотрудник ВМК МГУ. В ее докторской были получены блестящие результаты и в области математической химии, и в теории режимов с обострением.

Николай Васильевич Змитренко. Заведующий отделом ИММ РАН, профессор Московского физико-технического института (МФТИ). Наиболее яркий физик среди учеников Сергея Павловича. Начиная с дипломной работы и по настоящее время тема его иссле-

дований — лазерный управляемый термоядерный синтез и то новое, что может привести в эту область теория режимов с обострением.

Георгий Георгиевич Еленин. Доктор физико-математических наук, профессор факультета ВМК МГУ. Он успешно работал во многих областях, от теории режимов с обострением до гидродинамики, от химической кинетики до нанотехнологий. Во многом благодаря ему на факультете ВМК МГУ была создана и вышла на мировой уровень лаборатория, в которой ведутся исследования по математической химии.

Владимир Анатольевич Дородницын. Доктор физико-математических наук, профессор Московского государственного областного университета и сотрудник ИПМ РАН. Один из ведущих в России специалистов по инвариантно-групповому анализу, симметриям нелинейных уравнений. Международное признание получили построенные им методы анализа инвариантно-групповых свойств разностных схем.

Малинецкий Георгий Геннадьевич. Ваш покорный слуга. Заместитель директора ИПМ РАН по науке, доктор физико-математических наук. Профессор МФТИ и Российской академии государственной службы при Президенте РФ. Основное направление исследований — развитие и приложение методов синергетики, в частности, в теории управления риском.

Крайний справа — Виктор Александрович Галактионов. Благодаря ему во многом был создан математический аппарат теории режимов с обострением. Более 15 лет работает за рубежом, в настоящее время в Англии, является профессором университета в городе Бат.

Несмотря на различные научные и человеческие судьбы, на разные подходы к научному творчеству в жизни каждого из людей, представленных на фотографии, теория режимов с обострением сыграла огромную роль.

Г. Г. Малинецкий

тодов, становление самой концепции вычислительного эксперимента. В этом коллективе родилась научная школа член-корреспондента РАН С. П. Курдюмова, идеи которой отражены в этой книге.

В эволюции научного направления, связанного с режимами с обострением, нестационарными диссипативными структурами, можно увидеть общие тенденции, характерные для всей науки конца XX в., развитие которых можно ожидать и в следующем веке.

Прежде всего это рождение фундаментальных научных идей в больших коллективах исследователей, работавших над крупными прикладными проектами. Это возрастание роли научной среды, семинаров, «коллективного бессознательного» научного сообщества. О нашем Институте речь уже шла. Другой пример дает исследовательский центр в Лос-Аламосе (США), созданный вначале для работы над ядерными проектами и ставший одним из ведущих центров нелинейной науки в мире.

Другая отличительная черта — возросший интерес к простейшим, базовым математическим моделям нелинейных процессов. Когда многие задачи можно посчитать с помощью компьютеров, наиболее важной становится проблема *понять* явление. Как правило, это требует новых идей, концепций, понятий, которые затем входят в общий контекст естественнонаучной культуры. Достаточно напомнить такие понятия как точка бифуркации, динамический хаос, аттракторы, режимы с обострением, которые сейчас употребляются не только математиками и «нелинейщиками», но и экономистами, психологами, политологами и другими специалистами.

Для современной науки все более характерным становится ее междисциплинарный характер. Во многих задачах из разных областей науки все чаще проявляются одни и те же математические структуры. Единство мира проявляется в том, что сравнительно небольшой набор базовых математических моделей эффективно описывает его разные грани. Поэтому изменение взгляда на реальность может привести к новым постановкам задач, экспериментам, открытиям. Кибернетика, с ее концепцией обратных связей, позволила по-новому взглянуть на задачи управления. Теория самоорганизации, или синергетика, открыла новый мир, связанный с динамическим хаосом, маломодовой турбулентностью, колебательными химическими реакциями. Важной частью синергетики является теория стационарных диссипативных или близких к ним структур. В основе их математического описания лежит принцип подчинения быстрых мод медленным. При этом медленные процессы выступают как наиболее важные, определяющие динамику всех остальных. Однако анализ сверхбыстрых, далеких от равновесия нестационарных процессов требует других подходов и новой математики. О них и идет речь в этой книге. И здесь есть свой парадоксальный необычный мир, заглянуть в который может оказаться полезно физикам и психологам, математикам и политикам, химикам и технологам. Наличие разных точек зрения, представленных в книге, разных ме-

тодов и подходов позволяет показать, насколько велик и интересен этот мир.

Во многих работах сборника эффективно используется компьютерный эксперимент. Широкое применение компьютеров в науке, в технологии, в быту привело к парадоксальному результату. Стала гораздо больше, чем раньше, ощущаться важность идей, концепций, парадигм, постановок задач. По мере совершенствования вычислительной техники происходит движение «от машины к человеку». Первые ЭВМ, динозавры компьютерной эры, занимали целые залы, их обслуживали десятки человек. Они были поразительно медленными по сегодняшним меркам. Но именно на них и были посчитаны многие ключевые для прогресса человечества задачи. Сейчас «вычислительные гиганты» размещаются на столах сотен тысяч научных сотрудников. Однако поставить глубокую интересную задачу так же трудно, как и раньше. Поэтому представить, какие и как задачи ставились и решались в нашей научной школе почти за три десятка лет, нам показалось важным.

Когда план этой книги обсуждался с рядом ее авторов, то часто возникал соблазн рассказать не только об объективном, об идеях, но и об их субъективном восприятии, о том личном, что связано с ними. Субъективный путь к объективной истине поразительно интересен. И все же от этого «исторического» и «личного» аспектов пришлось отказаться, оставив только одну фотографию, на которой запечатлено большинство авторов этого сборника в 1979 г. Это сборник «живых» работ. Некоторые из них вошли в учебники. Другие мы советуем читать студентам и аспирантам, чтобы они представляли пройденный путь и размышляли, куда двигаться дальше. Часть работ, вероятно, пока осталась не вполне понятой и оцененной научной общественностью. Поэтому в большинстве из них мы ограничились коротким комментарием одного из авторов, поясняющим место работы в контексте дальнейших исследований.

Точки над *i* ставить рано. Лучшие работы — впереди. Продолжение следует.

Осталось поблагодарить Л. Б. Горбачеву за помощь в подборе статей этого сборника, В. Г. Комарову и Т. А. Палееву за труд по его подготовке, И. В. Фельдштейна за редактирование того, что получилось.

Г. Малинецкий

I. РЕЖИМЫ С ОБОСТРЕНИЕМ, ИНЕРЦИЯ ТЕПЛА, НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ (РОЖДЕНИЕ ИДЕИ)

Нелинейный эффект образования самоподдерживающегося высокотемпературного электропроводного слоя газа в нестационарных процессах магнитной гидродинамики

*А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Л. А. Заглязьминский,
П. П. Волоевич, Л. М. Дегтярев, С. П. Курдюмов,
Ю. П. Попов, В. С. Соколов, А. П. Фаворский*

При исследовании нестационарных процессов взаимодействия сжимаемой электропроводной среды с магнитным полем было обнаружено существование самоподдерживающегося высокотемпературного электропроводного слоя (T -слоя), возникающего вследствие преимущественного выделения джоулева тепла в некоторой массе газа. Это явление по своей физической природе близко к известному скин-эффекту и к явлениям диссипативной неустойчивости в магнитной гидродинамике. Однако оно не сводится ни к одному из них и существенным образом от них отличается. В работе рассматриваются условия возникновения и развития явления T -слоя.

Обнаруженный эффект имеет общий физический характер. Однако мы приведем некоторые частные решения уравнений одномерной нестационарной магнитной гидродинамики, которые подтверждают факт существования этого явления и иллюстрируют его основные особенности.

Эффект образования T -слоя был обнаружен и в достаточно полной мере изучен не в физическом эксперименте, а на математической модели, учитывающей в существенных чертах нелинейные зависимости нестационарных процессов магнитной гидродинамики.

1. Автомодельная задача о расширении электропроводного газа в магнитном поле. Пусть нетеплопроводный газ, образующий бесконечно длинный цилиндр, сжат в радиальном направлении до нулевого

объема так, что на единицу длины приходится постоянная масса M_0 . Все пространство заполнено магнитным полем, силовые линии которого параллельны оси симметрии. Пусть в момент $t = 0$ в газе происходит мгновенное выделение энергии E_0 (на единицу длины). Возникающее при этом движение будет автомодельным с автомодельной переменной $\lambda = A_0 r/t$, если выполняются следующие условия:

а) электропроводность газа как функция температуры T , плотности ρ и времени определяется зависимостью $\sigma = \sigma_0 T^{k_0} \rho^{q_0} t^{n_*}$, где k_0 — произвольное число, а q_0 и n_* связаны соотношением $-2q_0 + n_* + 1 = 0$;

б) рассматривается газ с уравнениями состояния $P = R\rho T$, $\varepsilon = RT/(\gamma - 1)$, где P — материальное давление, ε — внутренняя энергия, R — газовая постоянная, γ — постоянное отношение удельных теплоемкостей;

в) краевые условия заданы на оси симметрии $r = 0$ в виде

$$v(0, t) = 0, \quad \partial H / \partial r = 0 \quad (1)$$

и на контактном разрыве $r = r_*$, ограничивающем газ массы M_0 ,

$$P(r_*, t) = P_0/t^2, \quad H(r_*, t) = H_0/t. \quad (2)$$

В указанных предположениях система уравнений одномерной нестационарной магнитной гидродинамики имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \left(P + \frac{H^2}{8\pi} \right) &= 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho v), \\ \frac{\partial P}{\partial t} + v \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\gamma P}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) - \frac{\gamma - 1}{4\pi\sigma} \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)^2 &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial t} + v \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{H}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\sigma} \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

и интегрируется в конечном виде. Приведем получаемые при этом зависимости для функций напряженности магнитного поля, электропроводности, температуры и скорости в случае $n_* = 0$ и $k_0 \neq 1/2$:

$$\begin{aligned} H &= h_0(c_0 + \lambda^2)/t[c + (c_0 + \lambda^2)^2]^{1/2}, \\ \sigma &= \sigma_0 \lambda^2/[c + (c_0 + \lambda^2)^2]^{2t}, \\ T &= T_0\{\lambda^2/[c + (c_0 + \lambda^2)^2]^{3/2}\}^{1/(k_0 - 0.5)}, \quad v = \lambda. \end{aligned} \quad (4)$$

Постоянные c и c_0 в формулах (4) определяются краевыми условиями (1) и (2).

Дифференцируя выражения для функции $T(\lambda)$, получаем после ряда преобразований

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda} = \frac{3}{k_0 - 0.5} \frac{T(\lambda)}{\lambda} \left(\frac{2}{3} - \sqrt{\text{Re}_m R_H} \right), \quad (5)$$

где через Re_m обозначено магнитное число Рейнольдса ($Re_m = \sigma r v$), а через R_H — отношение магнитного давления к газовому ($R_H = H^2/8\pi P$). При этом в данной задаче имеет место условие $Re_m R_H \leq 4$.

Фиксируя величину λ и тем самым определяя положение контактного разрыва, мы можем, варьируя величину параметра магнито-гидродинамического взаимодействия $Re_m R_H$, менять положение T_{\max} по отношению к контактному разрыву: T_{\max} будет находиться либо на контактном разрыве, либо внутри области, занимаемой газом массы M_0 . Отметим еще одно обстоятельство. Сравнение функций $T(\lambda)$ и $Q(\lambda) = (dH/d\lambda)^2/\sigma$ показывает, что T_{\max} лежит в области, близкой к Q_{\max} , однако их положения не совпадают. Это объясняется тем, что величина температуры зависит не только от джоулевой диссипации, но и от того, насколько газ расширился и соответственно охладился.

Полученное решение позволяет сделать следующие выводы:

1. Расширение сжимаемой электропроводной среды в магнитном поле приводит к появлению максимумов температуры и электропроводности, обусловленных неравномерным распределением джоулевой диссипации и степенью расширения газа.

2. Хотя соотношение (5) не имеет универсального характера в силу частного вида краевых условий (2), оно с определенностью показывает решающее влияние параметра $R_M = \sqrt{Re_m R_H}$ на характер процесса взаимодействия.

2. Расширение электропроводного газа в магнитном поле из некоторого начального состояния. Рассмотрим задачу, аналогичную предыдущей, однако не предполагая ее автомодельности. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ электропроводный газ образует бесконечно длинный цилиндр радиуса r_0 . Начальное давление в газе, температура и электропроводность постоянны, скорость газа равна нулю. Все пространство заполнено постоянным магнитным полем $H = H_0$, силовые линии которого параллельны оси цилиндра. Предположим также, что газ идеальный с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$, а зависимость электропроводности от температуры и плотности определяется формулой: $\sigma = \sigma_0 T^{3/2} \rho$. В точке $r = 0$ заданы условия симметрии (1), на внешней границе $r = r_0$ имеем $H = H_0$, $P = 0$.

Решение упомянутой выше задачи проводилось численно на ЭВМ методом конечных разностей. Система (3) рассматривалась в массовых лагранжевых переменных s , где $ds = \rho r dr$.

На рис. 1 представлены последовательные стадии развития процесса во времени на примере функций $T(s, t)$ и $H(s, t)$. Вначале внешняя граница газа, не испытывая сопротивления ($\text{rot } H = 0$, $P = 0$), сильно ускоряется, а прилегающие слои газа расширяются и охлаждаются. Возникающее движение газа приводит к появлению в нем индуцированных токов с возрастающей интенсивностью и к понижению напряженности магнитного поля в объеме, занятом газом. Максимальные

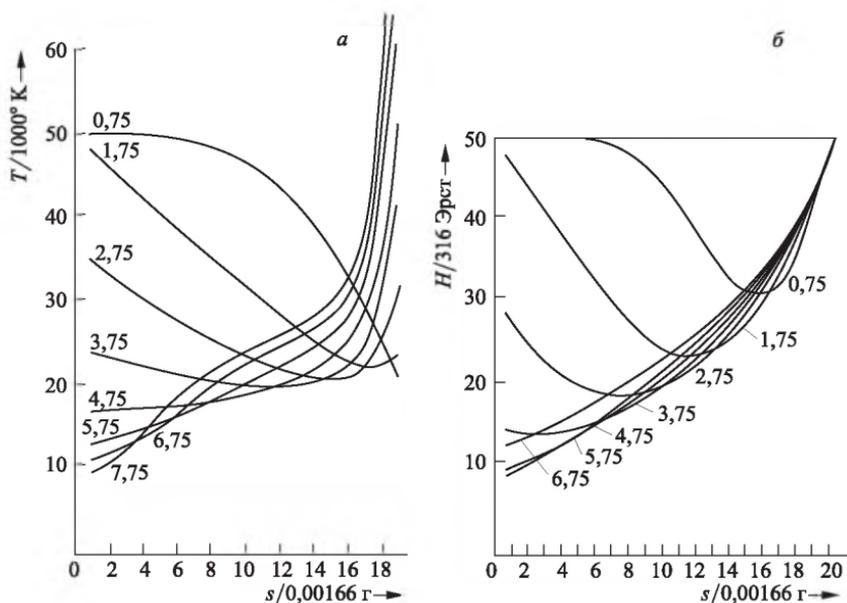


Рис. 1. Задача о расширении электропроводного газа в магнитном поле. Изменение температуры (а) и магнитного поля H (б) со временем. s — массовая координата, масштаб времени $t_0 = 0,01$ с. Цифры при кривых означают различные моменты времени

токи текут во внешних слоях газа; электропроводность внешних слоев этой части газа ниже, чем в остальной части газа из-за начального охлаждения. Это определяет наиболее интенсивное выделение джоулева тепла во внешних слоях газа, следствием чего является перестройка всего процесса. Начиная с некоторого момента $t = t_0$, понижение температуры граничной массы газа прекращается и постепенно начинается ее рост, в то время как температура основной массы газа продолжает уменьшаться. Разогрев наружного слоя и увеличение его электропроводности приводит к большей эффективности взаимодействия газа с магнитным полем.

В этом примере со всей очевидностью выступает основная особенность процесса — саморазвитие и самоподдержание высокотемпературной электропроводной зоны в газе, причем наиболее существенным в этом является зависимость $\sigma = \sigma(T, \rho)$, $(\partial\sigma/\partial T) > 0$ и сжимаемость среды. Видна здесь и другая особенность, обусловленная нелинейностью процесса и отличающая его от обычного линейного скин-эффекта: разогрев начинается не сразу, а по истечении некоторого критического времени.

3. Распад магнито-гидродинамического разрыва в среде с конечной проводимостью.

Предположим, что в пространстве, запол-

ненном газом с нулевыми температурой и давлением, движется с постоянной скоростью $v = v_0$ плоский поршень. Предположим далее, что возникающая вследствие движения поршня сильная ударная волна в момент времени $t = 0$ приходит в соприкосновение с однородным магнитным полем $H = H_0$, силовые линии которого параллельны плоскости ударной волны. Возникающая таким образом задача о распаде произвольного разрыва (или задача об отражении и прохождении ударной волны в магнитном поле) описывается системой уравнений одномерной нестационарной магнитной гидродинамики. Решение находилось численно методом конечных разностей. Дополнительно предполагалось, что поршень непроницаем для магнитного поля, что в момент «удара» волны о поле расстояние между ударной волной и поршнем было конечно и что электропроводность газа за ударной волной подчинялась закону $\sigma = \sigma_0 T^{3/2}$.

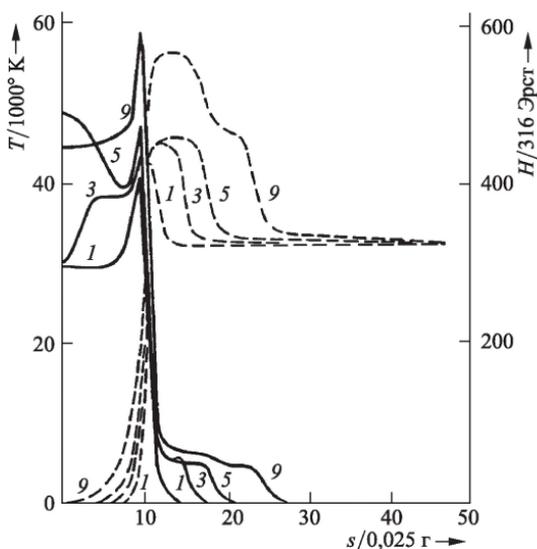


Рис. 2. Задача о распаде магнито-гидродинамического разрыва в среде с конечной проводимостью. Изменение температуры T (сплошные линии) и магнитного поля H (пунктирные линии) со временем. s — массовая координата, масштаб времени $t_0 = 0,25 \cdot 10^{-4} \text{ с}$

Рис. 2 показывает характер развития процесса. В месте соприкосновения ударной волны с магнитным полем образуется контактный разрыв, влево и вправо от него идут ударные волны, причем вправо — магнито-гидродинамическая, влево — газодинамическая (вследствие слабого проникновения магнитного поля). На самом контактном разрыве происходит резкое увеличение температуры из-за интенсивного джоулева тепловыделения, обусловленного большими градиентами магнитного поля.

Таким образом, и в этом процессе наблюдается локальное повышение температуры и образование высокотемпературного электропроводного слоя, причем здесь процесс разогрева начинается сразу.

Локальное повышение температуры в плазме наблюдалось также при численных расчетах задач магнитной гидродинамики [1, 2].

Однако характер рассмотренных в этих работах задач не позволяет выявить определяющие черты T -слоя как самостоятельного физического явления, отличного от скин-эффекта.

Выше рассмотрено несколько примеров, которые иллюстрируют факт существования и основные особенности явления T -слоя. Большое количество численных экспериментов, в частности, с учетом нелинейной теплопроводности и различных законов $\sigma = \sigma(T, \rho)$, а также рассмотрение дополнительных модельных задач дают основания сделать вывод, что явление самоподдерживающегося высокотемпературного электропроводного слоя имеет определенную физическую природу и что им можно управлять в достаточно широком диапазоне параметров.

Доклады Академии наук СССР.
1967. Т. 173. № 4

Поступила
20.12.1966

Список литературы

1. Имшенник В. С., Дьяченко В. Ф. К магнитогидродинамической теории пинч-эффекта в высокотемпературной плотной плазме. — М., 1965.
2. Kidder R. E. — Preprint No. 14349. — University of California, Radiation Laboratory, 1965.

О С. П. Курдюмове, T -слое и не только об этом

Летом 1963 г. в Новосибирском Академгородке на одной из конференций я познакомился с Сережей Курдюмовым, красивым, уверенным и доброжелательным кандидатом наук из ИПМ. К тому моменту мы в своем ИТПМ пришли к наглой постановке задачи о движении газовой смеси (уран, аргон, гелий и пр.), обладающей электропроводностью в канале сложнейшей формы при наличии электромагнитных полей. Одним словом, блестящая идея — как, минуя всякого рода традиционные турбоэлектрогенераторы, сразу же получать электричество. Естественно, самостоятельная попытка хоть как-то подступиться к этой сумасшедшей системе дифузов ни к чему не привела.

И вот это знакомство. Дальше — первая командировка в ИПМ и затем, можно сказать, безвылазная, в течение нескольких лет работа в уникальном коллективе, объединяющем титанов А. Н. Тихонова, А. А. Самарского и дипломников Л. М. Дегтярева, Ю. П. Попова, Е. И. Леванова и А. П. Фаворского. Душой коллектива был Сережа Курдюмов. Наша работа привела к установлению но-



**КОМИТЕТ
ПО ДЕЛАМ ИЗОБРЕТЕНИЙ
И ОТКРЫТИЙ
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ
СССР**





ДИПЛОМ НА ОТКРЫТИЕ

В соответствии с Положением об открытиях, изобретениях и рационализаторских предложениях Комитет по делам изобретений и открытий при Совете Министров СССР установил, что граждане Союза Советских Социалистических Республик:

КУРДЮМОВ Сергей Павлович
 ТИХОНОВ Андрей Николаевич
 САМАРСКИЙ Александр Андреевич
 ЗАКЛЯЗЬМИНСКИЙ Лев Алексеевич
 ВОЛОСЕВИЧ Петр Петрович
 ДЕГТЯРЕВ Лев Маркович
 ПОПОВ Юрий Петрович
 СОКОЛОВ Вениамин Сергеевич
 ФАВОРСКИЙ Антон Павлович

сделали открытие определяемое следующей формулой:

„Установлено ранее неизвестное явление образования самоподдерживающегося высокотемпературного электропроводного слоя (Т-слоя) при нестационарном движении в магнитном поле сжимаемой среды, электропроводность которой увеличивается с повышением температуры, приводящее к резкому увеличению эффективности взаимодействия среды с магнитным полем.“

Образование Т-слоя обусловлено существованием обратных нелинейных связей между электро-и газодинамическими величинами и происходит в тот момент и в том месте, где параметр гидромагнитного взаимодействия по порядку величины равен единице, и происходит наиболее интенсивно, когда магнитное число Рейнольдса также становится порядка единицы“.

Настоящее открытие зарегистрировано в Государственном реестре открытий СССР 27 февраля 1968 г. за № 55 с приоритетом ноябрь 1965 .

Председатель Комитета

Ю. Макарев

30
 " 30 " мая 1969 года



вого физического эффекта, явления T-слоя. В 1969 г. мы получили диплом на открытие за № 55. Двухлетние мытарства обусловлены были в меньшей степени бюрократами от науки, главным образом среди «своих» было мощное сопротивление — один из главных аргументов (вначале) — да они же не знают физики, прежде всего — второго закона термодинамики, а потом — так это же тривиально, какое тут открытие! И постоянно — мало ли что можно насчитать, кто видел подобное в эксперименте или в природе?! Должен сказать, что Я.Б. Зельдович сыграл решающую роль в признании этого эффекта на основе чисто теоретических исследований.

Но тем не менее вопрос об экспериментальном подтверждении T-слоя стоял весьма остро, тем более, что речь шла уже об инженерной реализации этого эффекта в МГД-генераторе. Экспериментальную задачу нам удалось решить в Новосибирске, в лаборатории, которую я тогда возглавлял. Мы знали, что надо искать, но главная сложность состояла в том, что в маломасштабной лабораторной установке было очень трудно достичь необходимых параметров потока плазмы. Приходилось мобилизовывать все интеллектуальные и инженерные ресурсы лаборатории и института. И, наконец, нам это удалось!

T-слой был открыт заново в эксперименте, полностью подтвердив всю физику численного эксперимента. Но при этом мы открыли еще одно качество этого явления — его потрясающую устойчивость как пространственного образования — даже специальные меры по его разрушению не давали никакого результата. Несколько позже при изучении многочисленных явлений и эффектов, относящихся к хромосферным вспышкам на Солнце, не укладывавшихся ни в одну сколь-либо приемлемую теорию, удалось увязать их в единое физическое явление, используя физику T-слоя.

Сергею, Сергею Павловичу Курдюмову 70 лет, но он по-прежнему активен, красив и доброжелателен. Сущность эффекта T-слоя — нелинейное, самоподдерживающееся, возникающее при вполне определенных условиях в диссипативной среде явление — он распространил на многие явления природы, в том числе на человеческое общество, внося тем самым огромный вклад в новую науку — синергетику.

В наше смутное время хотелось бы пожелать и юбиляру и всем нам — побыстрее и эффективнее реализовать возможности и результаты синергетики в коренном изменении проводимой в стране политики на благо России.

Академик РАО, д. ф-м. н., профессор,
засл. деятель науки России

В. С. Соколов

Примеры численного расчета температурных волн

А. А. Самарский, И. М. Соболев

§ 1. Введение. Настоящая работа посвящена численному решению квазилинейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(K_{\alpha}(u) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right) \quad (1.1)$$

для случаев $p = 1, 2, 3$. Как правило, всюду предполагается, что

$$K_{\alpha}(u) = \kappa_{\alpha} u^{\sigma_{\alpha}},$$

где $\sigma_{\alpha} \geq 1$, $\kappa_{\alpha} > 0$. Хотя уравнение (1.1) встречается в различных областях математической физики, мы, для определенности, будем называть функцию $u = u(t, x_1, \dots, x_p)$ температурой.

В работах [1, 2] показано, что уравнение (1.1) в случае $p = 1$ имеет решения, производные которых в точках, где $u(t, x)$ обращается в нуль, разрывны, а поток $K(u) \partial u / \partial x$ непрерывен, т.е. существует фронт температуры $u = 0$ (рис. 1), который распространяется с конечной скоростью (см. [3]). Классического решения уравнение в этом случае не имеет. Существование обобщенного решения задачи Коши и краевых задач доказано в [4]. В работах [5, 6] доказана сходимость одной явной разностной схемы для уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 F(u)}{\partial x^2} \quad (1.2)$$

в классе обобщенных решений (эти результаты, вероятно, могут быть распространены и на случай неявных схем). В статье [7] обобщенное решение уравнения вида (1.2) сосчитано методом интегральных соотношений А. А. Дородницына.

Для расчета таких обобщенных решений (которые мы будем ниже называть *температурными волнами*, или просто решениями) мы используем однородные разностные схемы сквозного счета, не предусматривающие явного выделения точек слабого разрыва. Теория таких схем разработана в статьях [8, 9, 10], в последней из которых приведена также библиография. Однако все доказательства сходимости предполагают, что $K_{\alpha}(u) \geq c > 0$, и, несмотря на большую общность этих теорем (допускающих даже разрывные функции $K_{\alpha} = K_{\alpha}(t, x, u)$), к случаю, когда $K_{\alpha}(u)$ обращается в нуль, они неприменимы.

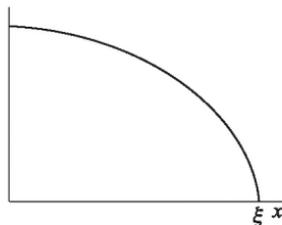


Рис. 1

Цель настоящей статьи — показать, что эти схемы пригодны и для расчета температурных волн. Такие схемы позволяют вести счет крупным шагом по времени, хорошо передают скорость распространения фронта, а при достаточно подробной сетке — и сам профиль фронта.

В случае нескольких пространственных переменных ($p > 1$) мы пользуемся локально-одномерным методом переменных направлений, изложенным в [11, 12]. Там имеется также библиография работ по этому вопросу (среди которых следует отметить работу [13]). Дадим краткую характеристику метода [11, 12] применительно к уравнению (1.1).

Шаг по времени $t^j \leq t \leq t^{j+1}$ разбивается на p слоев одинаковой толщины («дробных шагов»)

$$t^{j+(\alpha-1)/p} \leq t \leq t^{j+\alpha/p}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p.$$

В слое номер α решается одномерное уравнение

$$\frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(K_\alpha(u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right). \quad (1.3)$$

При этом все другие координаты x_β , отличные от x_α , играют роль параметров. На этом этапе в качестве краевых условий используются значения краевых функций в точках пересечения прямых, параллельных оси Ox_α , с границей области интегрирования, а в качестве начальных значений берутся значения, полученные при расчете предыдущего слоя. Фактически для решения всех уравнений (1.3) используется одна и та же одномерная программа (ОП), в которой уравнение (1.3) заменено неявной однородной разностной схемой (§ 2, п. 2).

По нашему мнению, в настоящее время нет практически более удобного метода для решения многомерных квазилинейных параболических уравнений. Этот метод применим к произвольным областям (а не только к параллелепипедам) и сохраняет порядок точности на неравномерных сетках [12]. Он годится для квазилинейных параболических уравнений общего вида даже при наличии в коэффициентах разрывов (I рода). При такой широкой области применения метод переменных направлений обладает еще целым рядом практических достоинств: простота программы; пониженные (по сравнению с большинством других схем) требования к объему оперативной памяти; устойчивость счета при очень крупных шагах по времени, позволяющая, в частности, быстро решать сложные задачи, где не требуется большая точность.

Вычисления по любой разностной схеме вместо точного профиля волны дают какой-то свой, разностный профиль (тем более точный, чем мельче сетка). Чтобы исследовать строение этого профиля при очень крупной сетке и оценить эффективную ширину фронта, в § 5 для случая $p = 1$ построена разностная бегущая волна — аналог известного решения вида $u = f(ct - x)$, называемого бегущей волной (постоянная c — скорость волны). Для разностных схем сквозного счета газодинамики с вязкостью разностная бегущая волна была построена в [14].

Необходимо подчеркнуть, что мы нигде не стремились выбирать наиболее благоприятные для данной задачи условия счета. Наоборот, в некоторых случаях выбирались заведомо плохие условия, чтобы расхождение было более заметным. Сетки по пространству в некоторых примерах грубые, в других — достаточно подробные. Шаг по времени всюду крупный.

Авторы выражают свою глубокую благодарность А. А. Думовой за составление программ и проведение расчетов.

§ 2. Одномерные задачи.

2.1. О скорости распространения температурного фронта.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad (2.1)$$

где $K(0) = \varphi(0) = 0$; $K(u) > 0$, $\varphi'(u) > 0$ при $u > 0$;

$$\lim_{u \rightarrow 0} [K(u)/\varphi'(u)] = 0.$$

Распространение фронта тепла в этом случае происходит с конечной скоростью. Обозначим положение фронта в момент t через $\xi(t)$ (рис. 1).

Дифференцируя тождество $\varphi(u(t, \xi(t))) \equiv 0$ и учитывая условие непрерывности потока на фронте

$$[K(u)\partial u/\partial x]_{x=\xi(t)} \equiv 0,$$

можно вывести следующее выражение для скорости фронта:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = - \lim_{x \rightarrow \xi} \left[K(u) \frac{\partial u}{\varphi(u)} \frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad (2.2)$$

Нижe, в примере 1, начальный профиль при $t_0 = 0,1$

$$u = \begin{cases} \sqrt{10(1-2x)}, & 0 \leq x \leq 0,5, \\ 0, & 0,5 \leq x < 1. \end{cases}$$

Очевидно, $\xi(t_0) = 0,5$ и по формуле (2.2) $d\xi/dt = 5$.

В примере 2 начальный профиль при $t_0 = 0,1$

$$u = \begin{cases} \sqrt{10}(1-2x), & 0 \leq x \leq 0,5, \\ 0, & 0,5 \leq x < 1. \end{cases}$$

И здесь $\xi(t_0) = 0,5$, однако по формуле (2.2) получим $d\xi/dt = 0$. Соот-

ветствующее решение в первом случае (рис. 2) представляет собой волну, распространяющуюся с постоянной скоростью, а во втором случае (рис. 3), несмотря на быстрый рост температуры, фронт не распространяется.

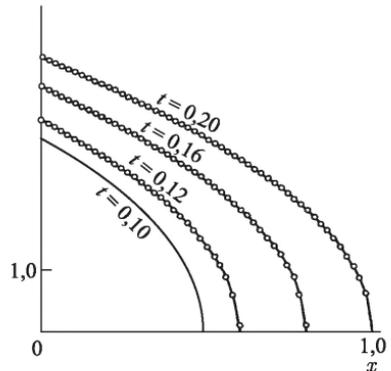


Рис. 2

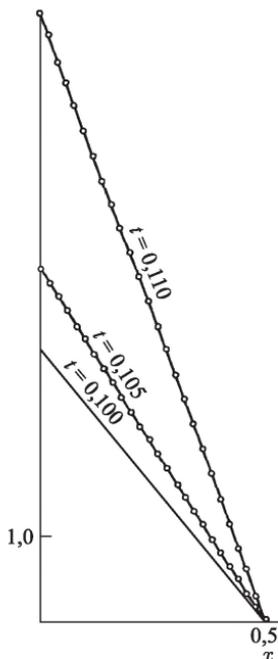


Рис. 3

2.2. Вычислительная схема.

Программа ОП составлена для решения уравнения (2.1), несколько более общего, чем уравнение (1.1) при $p = 1$, с краевыми условиями I рода:

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= \mu(t), \\ u(t, l) &= \bar{\mu}(t). \end{aligned}$$

Предполагается, что $\varphi(u) = u^r$, однако во всех приведенных ниже примерах $r = 1$.

Уравнение (2.1) заменяется однородной разностной схемой (см. [10]) с опережением:

$$\begin{aligned} \varphi(v_i) - \varphi(\check{v}_i) &= \\ &= A_{i+1}(v_{i+1} - v_i) - A_i(v_i - v_{i-1}), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$A_i = \frac{\tau}{h^2} K \left(\frac{v_{i-1} + v_i}{2} \right); \quad (2.4)$$

величины без «галок» считаются на шаге $j + 1$, а величина с «галкой» — на шаге j . Сетка предполагается равномерной: $x_i = ih$, $0 \leq i \leq N$; $t^j = j\tau$. Для такой схемы устойчивость имеет место при любом шаге τ .

Система уравнений (2.3) при $i = 1, 2, \dots, N - 1$ на каждом шаге $j + 1$ решается следующим методом итераций. Пусть s — номер итерации; полагая

$$\varphi(v_i^{(s+1)}) = \varphi(v_i^{(s)}) + (v_i^{(s+1)} - v_i^{(s)})\varphi'(v_i^{(s)}),$$

перепишем уравнение (2.3) в виде линейного уравнения относительно $v_i^{(s+1)}$, опуская для краткости индексы (s) над всеми остальными величинами:

$$A_{i+1}v_{i+1}^{(s+1)} - (A_{i+1} + A_i + B_i)v_i^{(s+1)} + A_iv_{i-1}^{(s+1)} + F_i = 0. \quad (2.5)$$

Здесь A_i , определяются формулой (2.4),

$$B_i = \varphi'(v_i), \quad F_i = \varphi(\check{v}_i) - \varphi(v_i) + v_i B_i.$$

Каждая итерация требует решения системы (2.5) при $i = 1, 2, \dots, N - 1$. Это осуществляется методом прогонки (см. [15]) по формулам:

$$\alpha_1 = 0; \quad \alpha_{i+1} = \frac{A_{i+1}}{A_{i+1} + A_i(1 - \alpha_i) + B_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1;$$

$$\beta_1 = v_0; \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i\beta_i + F_i}{A_{i+1} + A_i(1 - \alpha_i) + B_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1;$$

$$v_N^{(s+1)} = v_N; \quad v_i^{(s+1)} = \alpha_{i+1}v_{i+1}^{(s+1)} + \beta_{i+1}, \quad i = N - 1, N - 2, \dots, 1.$$

Значения v_0 и v_N заданы краевыми условиями:

$$v_0 = \mu(j\tau), \quad v_N = \bar{\mu}(j\tau).$$

В качестве нулевой итерации выбираются значения с предыдущего шага: $v_i^{(0)} = \check{v}_i$. Условие окончания итераций

$$\max_{1 \leq i \leq N-1} |v_i^{(s+1)} - v_i^{(s)}| < \varepsilon.$$

Во всех расчетах мы полагали $\varepsilon = 10^{-3}$ (ср. § 3, табл. 3).

Для каждого примера считается фактическое число итераций ν^j и так называемое «отношение Куранта»

$$\chi = \max [K(u)\tau/h^2],$$

характеризующее размер шага по времени.

2.3. Пример 1. Волна, распространяющаяся с постоянной скоростью.

Используется аналитическое решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (2.6)$$

представляющее собой бегущую волну:

$$u = \begin{cases} [\sigma c \kappa_0^{-1} (ct + x_1 - x)]^{1/\sigma} & \text{при } x \leq x_1 + ct, \\ 0 & \text{при } x_1 + ct \leq x. \end{cases} \quad (2.7)$$

Параметры расчета: $\sigma = 2$, $\kappa_0 = 0,5$, $c = 5$, $x_1 = 0$. Из решения (2.7) были выбраны начальные значения при $t_0 = 0,100$ и краевые условия

$$u(t, 0) = 10\sqrt{t}, \quad u(t, x_N) = 0.$$

Сетка достаточно мелкая: $h = 0,02$, $N = 50$. Расчет проводился до $t = 0,200$ шагом $\tau = 2 \cdot 10^{-4}$ ($\chi = 5,0$). Аналитическое решение и результаты расчета нанесены на рис. 2. Всюду, кроме нескольких ближайших к фронту узлов, отклонение сосчитанного решения от точного не превосходит 0,002. Число итераций $\nu \leq 3$.

2.4. Пример 2. Нераспространяющийся фронт.

Используется аналитическое решение уравнения (2.6) при $-\infty < t < c$:

$$u = \begin{cases} \left[\frac{\sigma(x_1 - x)^2}{2\kappa_0(\sigma + 2)(c - t)} \right]^{1/\sigma} & \text{при } x \leq x_1, \\ 0 & \text{при } x_1 \leq x. \end{cases} \quad (2.8)$$

Параметры расчета: $\sigma = 2$, $\kappa_0 = 0,5$, $x_1 = 0,5$, $c = 0,1125$. Шаг сетки $h = 0,02$, число узлов $N = 50$. Из решения (2.8) были взяты начальные

значения при $t_0 = 0,100$ и краевые условия

$$u(t, 0) = 1/\sqrt{0,9 - 8t}, \quad u(t, x_N) = 0.$$

Счет проводился до $t = 0,110$ шагом $\tau = 10^{-4}$ ($\chi = 6,2$). Аналитическое решение и результаты расчета нанесены на рис. 3.

Абсолютная погрешность при $t = 0,110$ не превосходит 0,03. Число итераций $\nu \leq 3$.

Обращаем внимание на то, что начальные и краевые условия в примерах 1 и 2 весьма схожи. И условия расчетов одинаковые.

2.5. *Пример 3. Волна, распространяющаяся с переменной скоростью.*

Используется автомодельное решение уравнение (2.6), представленное в виде ряда

$$u = \begin{cases} c(t + c_1)^n (1 - s)^{1/\sigma} \frac{1 + a_1(1 - s) + a_2(1 - s)^2 + \dots}{1 + a_1 + a_2 + \dots} & \text{при } 0 \leq x \leq \xi, \\ 0 & \text{при } \xi \leq x, \end{cases} \quad (2.9)$$

где $s = x/\xi$, $\xi = D(t + c_1)^m$,

а постоянные

$$m = \frac{n\sigma + 1}{2}, \quad D^2 = \frac{\varkappa_0 c^\sigma}{m\sigma(1 + a_1 + a_2 + \dots)},$$

$$a_1 = \frac{n\sigma - m}{2m\sigma(\sigma + 1)}, \quad a_2 = -a_1 \frac{1 + 0,5a_1[(2\sigma + 1)(3\sigma + 1) - 4(\sigma + 1)]}{3(2\sigma + 1)}.$$

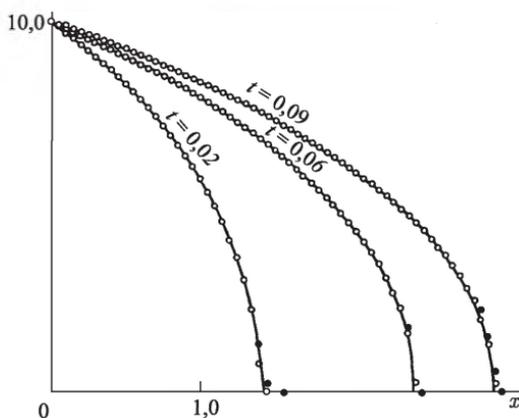


Рис. 4

Параметры расчета: $\sigma = 2$, $n = 0$, $c = 10$, $c_1 = 0$, $\varkappa_0 = (1 + a_1 + a_2)^2$. Шаг сетки $h = 0,05$, число узлов $N = 80$. Начальный профиль был

сосчитан по выписанным членам решения (2.9) при $t_0 = 0,010$. Краевые условия:

$$u(t, 0) = 10, \quad u(t, 4) = 0.$$

Счет проводился до $t = 0,090$: а) шагом $\tau = 2 \cdot 10^{-4}$ ($\chi = 6,7$) и б) шагом $\tau = 10^{-3}$ ($\chi = 33,6$). Разница между результатами обоих расчетов не превосходит 0,02 всюду, кроме нескольких ближайших к фронту узлов.

Поэтому на рис. 4 нанесены все точки, полученные в варианте а), и лишь несколько крестиков, соответствующих результатам варианта б). Сплошная кривая вычислена по выписанным в (2.9) членам.

Количества итераций ν указаны в табл. 1.

Таблица 1

t	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
а)	4	4	4	3	3	3	3	3
б)	8	7	6	6	6	6	5	5

Очевидно, увеличение шага в 5 раз сопровождается увеличением количества итераций всего в 2 раза. Поэтому *счет крупным шагом выгоднее, если только он обеспечивает достаточную точность.*

2.6. Пример 4. «Распад разрыва» и счет на установление.

При заданных краевых условиях

$$u(t, 0) = u_0, \quad u(t, l) = 0$$

уравнение (2.6) имеет стационарное решение

$$u = u_0(l - x)^{1/(\sigma+1)}, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (2.10)$$

Выберем параметры для расчета: $\sigma = 2$, $u_0 = 3$, $u_0 = 10$, $l = 1$. Шаг сетки $h = 0,02$, число узлов $N = 50$. Начальный профиль при $t = 0$ зададим, как в [7]:

$$u(0, x) = \begin{cases} 10, & 0 \leq x < 0,5, \\ 0, & 0,5 < x < 1. \end{cases}$$

Краевые условия:

$$u(t, 0) = 10, \quad u(t, 1) = 0.$$

Используя теорему сравнения [3], можно оценить момент t^* , когда фронт достигнет точки $x = 1$. Для этого надо построить два аналитических решения уравнения (2.6) при $\sigma = 2$ и $u_0 = 3$ так, чтобы

$$u_1(0, x) \leq u(0, x) \leq u_2(0, x)$$

и

$$u_1(t, 0) \leq u(t, 0) \leq u_2(t, 0),$$

найти соответствующие моменты t_1^* и t_2^* .

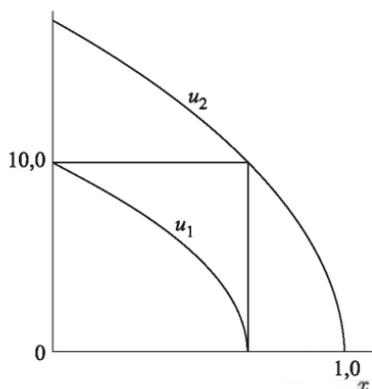


Рис. 5

Расчет а) проводился шагом $\tau = 10^{-5}$ ($\chi = 7,5$) до $t = 5 \cdot 10^{-3}$; момент t^* оказался несколько меньшим, чем $1,5 \cdot 10^{-3}$ (результаты выдавались через 50 шагов). К моменту $t = 5 \cdot 10^{-3}$ профиль еще не установился. Число итераций:

$10^4 t$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
ν	4	4	3	2	2	2	1	1	1	1

Результаты нанесены на рис. 6.

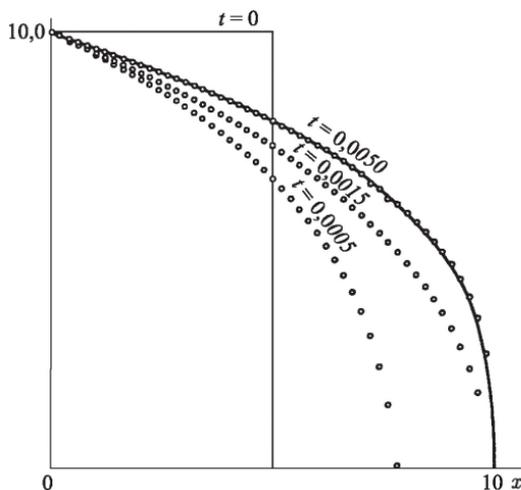


Рис. 6

В § 5 п. 5 доказано, что в этом примере устанавливающийся профиль не зависит от шага по времени. Поэтому выгоднее более крупный шаг. Расчет б) проводился шагом $\tau = 2 \cdot 10^{-4}$ ($\chi = 150$) до $t = 2 \cdot 10^{-2}$.

В качестве u_1 можно выбрать решение вида (2.9) при $n = 0$, определив произвольные постоянные c и c_1 из условий $u_1(0,0) = 10$, $\xi_1(0) = 0,5$ (рис. 5). Получим $t_1^* = 2,1 \cdot 10^{-3}$. В качестве u_2 выберем решение типа (2.7), где параметры c и x_1 определим из условия $u\left(0, \frac{1}{2}\right) = 10$ и $t^* = \max$. Получим $u_2 = 20\sqrt{600t - x} + 0,75$ (рис. 5) и $t_2^* = 0,4 \cdot 10^{-3}$. Итак, оценка

$$0,4 \cdot 10^{-3} < t^* < 2,1 \cdot 10^{-3}.$$

Профиль установился¹⁾ уже при $t = 10^{-2}$. Для всех t , начиная с $5 \cdot 10^{-3}$, число итераций $\nu = 1$.

§ 3. Двумерная задача.

3.1. Вычислительная схема.

Программа составлена для решения уравнения (1.1) при $p = 2$ с краевыми условиями

$$\begin{aligned} u(t, 0, y) &= \mu_1(t, y), & u(t, x, 0) &= \mu_2(t, x), \\ u(t, l_1, y) &= \bar{\mu}_1(t, y), & u(t, x, l_2) &= \bar{\mu}_2(t, x), \end{aligned}$$

для простоты вместо независимых переменных x_1, x_2 будем употреблять x, y .

Сетка предполагается равномерной: $x_i = ih_1$, $0 \leq i \leq N_1$; $y_k = kh_2$, $0 \leq k \leq N_2$; $t^j = j\tau$.

В начальный момент $t_0 = 0$ задана матрица начальных значений (v_{ik}^0) . Переход от матрицы (v_{ik}^j) на шаге t^j к матрице (v_{ik}^{j+1}) осуществляется в два этапа:

1) вычисляется матрица $(v_{ik}^{j+1/2})$. Для ее вычисления используется та же одномерная программа ОП (§ 2, п. 2), в которой полагаем $N=N_1$,

$$\begin{aligned} A_i &= \tau h_1^{-2} K_1 [0,5(v_{i-1} + v_i)], \\ v_0 &= \mu_1 \left(\left(j + \frac{1}{2} \right) \tau, kh_2 \right), \\ v_{N_1} &= \bar{\mu}_1 \left(\left(j + \frac{1}{2} \right) \tau, kh_2 \right); \end{aligned}$$

эта программа по каждой строке v_{ik}^j вычисляет строчку $v_{ik}^{j+1/2}$ — поочередно для всех $k = 1, 2, \dots, N_2 - 1$;

2) в ОП полагаем $N = N_2$,

$$\begin{aligned} A_k &= \tau h_2^{-2} K_2 [0,5(v_{k-1} + v_k)], \\ v_0 &= \mu_2 ((j+1)\tau, ih_1), \\ v_{N_2} &= \bar{\mu}_2 ((j+1)\tau, ih_1), \end{aligned}$$

и с помощью этой программы по каждому столбцу $v_{ik}^{j+1/2}$ вычисляем столбец v_{ik}^{j+1} — поочередно для всех $i = 1, 2, \dots, N_1 - 1$.

Таким образом, ОП играет роль подпрограммы, которая «перерабатывает» строчки (v_{ik}^j) в строчки $(v_{ik}^{j+1/2})$, а потом столбцы $(v_{ik}^{j+1/2})$ в столбцы (v_{ik}^{j+1}) . Всего на каждом шаге ОП работает $(N_2 - 1) + (N_1 - 1)$ раз²⁾.

¹⁾ Дальнейшие изменения значений v_i не превосходят одной единицы в шестой значащей цифре.

²⁾ Краевые условия на первом этапе можно было бы брать и в любой другой момент t' , заключенный между t^j и t^{j+1} .

Для характеристики размера шага вычислены величины

$$\chi_1 = \max [K_1(u)\tau/h_1^2] \quad \text{и} \quad \chi_2 = \max [K_2(u)\tau/h_2^2].$$

Чтобы облегчить наблюдение за ходом счета, на каждом шаге вычислялась величина

$$\delta^j = \left\{ \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{k=1}^{N_2-1} [v_{ik}^j - u(j\tau, ih_1, kh_2)]^2 h_1 h_2 \right\}^{1/2},$$

в какой-то мере характеризующая отклонение от точного решения.

3.2. Выбор аналитического решения.

Решение уравнения (1.1) можно искать в виде плоской бегущей волны $u = f(\omega)$, где

$$\omega = t - \sum_{a=1}^p \lambda_a x_a,$$

а $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ — постоянные. Подставив предполагаемое решение в уравнение (1.1), получим обыкновенное дифференциальное уравнение, интеграл которого имеет вид

$$\omega = C_1 + \sum_{a=1}^p \kappa_a \lambda_a^2 \int \frac{u^{\sigma_a} du}{u - C};$$

здесь C и C_1 — постоянные интегрирования.

Особенно просто выглядит семейство решений, соответствующих $C = 0$:

$$\omega = C_1 + \sum_{a=1}^p (\kappa_a / \sigma_a) \lambda_a^2 u^{\sigma_a}. \quad (3.1)$$

3.3. Пример 5. Анизотропная плоская волна.

Рассмотрим двумерное уравнение (1.1) с параметрами

$$\sigma_1 = 4, \quad \kappa_1 = 4; \quad \sigma_2 = 2, \quad \kappa_2 = 0,25,$$

и для расчета используем решение (3.1) с заданными постоянными $C_1 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Соответствующее решение:

$$u = \begin{cases} 0,5 \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 16(t - x - 2y)}} & \text{при } t \geq x + 2y, \\ 0 & \text{при } t \leq x + 2y. \end{cases} \quad (3.2)$$

Сетка грубая: $h_1 = h_2 = 1$; число узлов $N_1 \cdot N_2 = 30 \cdot 20 = 600$. Из решения (3.2) взяты начальные значения, т. е. $u(0, x, y) \equiv 0$, и краевые условия на прямых $x = 0$, $x = 30$, $y = 0$ и $y = 20$. Расчеты проводились до $t = 50$: а) шагом $\tau = 0,2$ ($\chi_1 = 37,2$, $\chi_2 = 0,34$); б) шагом $\tau = 1,0$ ($\chi_1 = 186$, $\chi_2 = 1,7$); в) шагом $\tau = 2,0$ ($\chi_1 = 372$, $\chi_2 = 3,4$). Некоторые

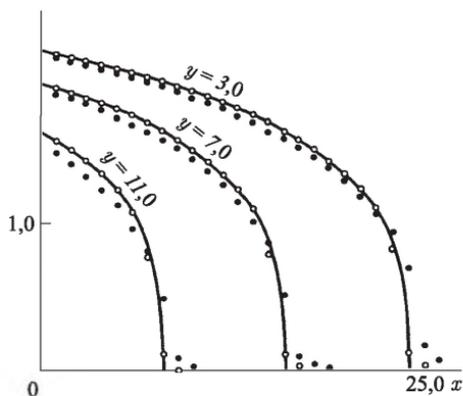


Рис. 7

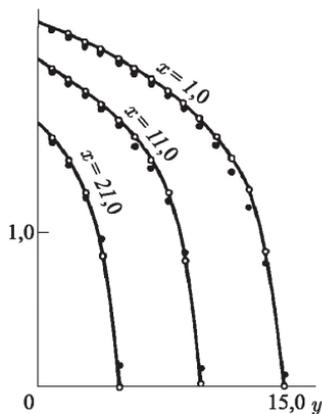


Рис. 8

результаты при $t = 30$ нанесены на рисунки 7 и 8, где крестиками обозначены результаты варианта в), точками — варианта а); сплошные кривые — это аналитическое решение.

Уменьшение отклонения при $t = 50$ объясняется тем, что волна уже захватила почти весь прямоугольник, а процесс выравнивания температуры считается лучше, чем процесс распространения.

Таблица 2

t		10	20	30	50
δ^j	а)	0,290	0,438	0,543	0,457
	б)	0,538	0,935	1,270	1,019
	в)	0,825	1,55	2,13	1,85

Таблица 3

ε	t				
	5	10	15	20	25
10	0,356	0,963	1,477	1,89	2,27
10^{-3}	0,217	0,290	0,392	0,438	0,509
10^{-6}	0,217	0,290	0,392	0,438	0,509

Таблица 4

Счет	а)	б)	в)
По x	5	10	15
По y	2	3	4

Чтобы исключить возможность «недоитерирования», часть варианта а) считалась с тремя различными значениями ε (см. § 2, п. 2).

Соответствующие значения δ^j указаны в табл. 3¹⁾. Отклонения от точного решения указаны в табл. 2.

Максимальные числа итераций ν_{\max} приведены в табл. 4²⁾. Замечание, сделанное в конце п. 5, § 2, остается в силе.

3.4. Некоторые замечания.

Так как при счете по x использовались краевые значения, взятые при $t = t^{j+1/2}$, то профили $v(t^{j+1}, x, y_k)$ хуже примыкают к краевым условиям при $x = 0$, чем профили $v(t^{j+1}, x_i, y)$ — к краевым значениям при $y = 0$.

На первый взгляд кажется, что все значения $v(t^{j+1}, x, y)$ на линии $x + 2y = \text{const}$ должны быть заключены между соответствующими значениями $u(t^{j+1/2}, x, y)$ и $u(t^j, x, y)$. Однако на втором этапе в процессе счета по y некоторые значения, главным образом в окрестности фронта, могут опуститься ниже, чем значения $u(t^{j+1/2}, x, y)$. В принципе это явление может привести к возникновению немонотонностей в счете. В нашем примере даже при крупном шаге немонотонности весьма малы, а в варианте а) не превосходят двух-трех тысячных.

Наконец, заметим, что в анизотропной задаче изменение порядка счета направлений — сперва по y , затем по x — вообще говоря, влияет на точность результата.

§ 4. Трехмерная задача.

4.1. Вычислительная схема.

Программа составлена для решения уравнения (1.1) при $p = 3$ в кубе: $0 \leq x \leq l_1$, $0 \leq y \leq l_2$, $0 \leq z \leq l_3$ (вместо x_1, x_2, x_3 будем писать x, y, z), на поверхности которого заданы значения искомой функции.

Сетка равномерная: $x_i = ih_1$, $0 \leq i \leq N_1$; $y_k = kh_2$, $0 \leq k \leq N_2$, $z_m = mh_3$, $0 \leq m \leq N_3$; $t^j = j\tau$.

В начальный момент $t_0 = 0$ задана начальная таблица (v_{ikm}^0) . Переход от (v_{ikm}^j) к (v_{ikm}^{j+1}) осуществляется в три этапа:

1) сначала подпрограмма ОП преобразует «строчки» $0 \leq i \leq N_1$ таблицы (v_{ikm}^j) в «строчки» $(v_{ikm}^{j+1/3})$, используя краевые значения $u(t^{j+1/3}, 0, y_k, z_m)$ и $u(t^{j+1/3}, l_1, y_k, z_m)$; на этом этапе $N = N_1$ и

$$A_i = \tau h_1^{-2} K_1 [0, 5(v_{i-1} + v_i)];$$

2) «столбцы» $0 \leq k \leq N_2$ таблицы $(v_{ikm}^{j+1/3})$ преобразуются программой ОП в «столбцы» $(v_{ikm}^{j+2/3})$ с помощью краевых значений

¹⁾ При $\varepsilon = 10$ считается всего одна итерация на каждом шаге.

²⁾ При всех t , для которых есть выдачи, значения ν равны 1 для тех строк (столбцов), до которых волна еще не дошла, и равны ν_{\max} для большинства других строк (столбцов).

$u(t^{j+2/3}, x_i, 0, z_m)$ и $u(t^{j+2/3}, x_i, l_2, z_m)$; на этом этапе $N = N_2$ и

$$A_k = \tau h_2^{-2} K_2[0,5(v_{k-1} + v_k)];$$

3) «высоты» $0 \leq m \leq N_3$ таблицы $(v_{ikm}^{j+2/3})$ преобразуются в «высоты» (v_{ikm}^{j+1}) с использованием значений $u(t^{j+1}, x_i, y_k, 0)$ и $u(t^{j+1}, x_i, y_k, l_3)$ в предположении, что в ОП число узлов $N = N_3$ и

$$A_m = \tau h_3^{-2} K_3[0,5(v_{m-1} + v_m)].$$

Всего на каждом шаге подпрограмма ОП работает $(N_2 - 1) \times (N_3 - 1) + (N_1 - 1)(N_3 - 1) + (N_1 - 1)(N_2 - 1)$ раз.

4.2. Пример 6. Изотропная плоская волна в пространстве.

Рассмотрим трехмерное уравнение (1.1) с параметрами

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 2, \quad \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0,06$$

и для расчета используем решение (3.1) с заданными постоянными $C_1 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Соответствующее решение:

$$u = \begin{cases} (10/3)\sqrt{t - x - y - z} & \text{при } t \geq x + y + z, \\ 0 & \text{при } t \leq x + y + z. \end{cases} \quad (4.1)$$

Сетка грубая: $h_1 = h_2 = h_3 = 1$; число узлов $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 = 10^3$. Из решения (4.1) взяты начальные значения, т. е. $u(0, x, y, z) \equiv 0$, и краевые условия на плоскостях $x = 0$, $x = 10$, $y = 0$, $y = 10$, $z = 0$ и $z = 10$.

Расчет проводился от $t_0 = 0$ до $t = 9,0$ ¹⁾: а) шагом $\tau = 0,2$ ($\chi = 1,2$) и б) шагом $\tau = 1,0$ ($\chi = 6,0$).

Таблица 5

i	1	2	3	4	5	6	7	
u	7,4536	6,6667	5,7735	4,7140	3,3333	0	0	
v_{i21}	а)	7,4541	6,6673	5,7740	4,7154	3,3587	0,735	0,001
	б)	7,4547	6,6710	5,7832	4,7352	3,3901	1,119	0,002

Результаты расцениваются нами как хорошие: на расстоянии двух счетных интервалов от фронта счетные значения уже весьма близки к точным. Для примера приводим в табл. 5 значения v_{i21} (т. е. значения функции в узлах, расположенных на прямой $y = 2$, $z = 1$) в момент $t = 9$.

¹⁾ Волна за это время не успевает дойти до плоскости $x + y + z = 10$, что позволяет на гранях $x = 10$, $y = 10$ и $z = 10$ использовать нулевые краевые условия.

Чтобы показать, насколько хорошо передается скорость распространения волны, приводим в табл. 6 значения функции v во всех внутренних узлах, расположенных в плоскости $x + y + z = 5$ при $t = 8$ и в плоскости $x + y + z = 6$ при $t = 9$ (вариант а).

Таблица 6

$t = 8$	5,7743			$t = 9$		
	5,7742		5,7744		5,7742	
	5,7741	5,7739	5,7743	5,7742	5,7742	
	5,7741	5,7739	5,7740	5,7740	5,7740	5,7740

Числа расположены в таблицах так, как видны соответствующие узлы из точки $(0; 0; 0)$. Значение точного решения u на этих плоскостях равно 5,7735. (Здесь уместно напомнить, что итерации считались с точностью до $\varepsilon = 0,001$.)

Максимальные количества итераций ν_{\max} равны 3–4 в варианте а) и 4–6 в варианте б).

4.3. Сравнение с расчетом по явной схеме.

Та же задача считалась по «схеме Эйлера»:

$$\begin{aligned}
 v_{ikm}^{j+1} = & v_{ikm} + A_{i+1km}^{(1)}(v_{i+1km} - v_{ikm}) - A_{ikm}^{(1)}(v_{ikm} - v_{i-1km}) + \\
 & + A_{ik+1m}^{(2)}(v_{ik+1m} - v_{ikm}) - A_{ikm}^{(2)}(v_{ikm} - v_{ik-1m}) + \\
 & + A_{ikm+1}^{(3)}(v_{ikm+1} - v_{ikm}) - A_{ikm}^{(3)}(v_{ikm} - v_{ikm-1}),
 \end{aligned}$$

где

$$A_{ikm}^{(1)} = \tau h_1^{-2} K_1 [0,5(v_{i-1km} + v_{ikm})],$$

$$A_{ikm}^{(2)} = \tau h_2^{-2} K_2 [0,5(v_{ik-1m} + v_{ikm})],$$

$$A_{ikm}^{(3)} = \tau h_3^{-2} K_3 [0,5(v_{ikm-1} + v_{ikm})].$$

Все входящие в правую часть величины вычисляются на шаге j . Сетка и краевые условия — те же, что в п. 2. Чтобы получить примерно ту же точность, что в методе переменных направлений, пришлось уменьшить шаг в 20 раз ($\tau = 0,01$ и $\tau = 0,05$). Время счета по явной схеме оказалось почти в 4 раза большим¹⁾.

¹⁾ Как известно, явная схема теряет устойчивость при увеличении χ . Необходимость вести счет мелким шагом может обойтись гораздо дороже (чем в 4 раза) в случае, когда уравнение теплопроводности входит в состав системы дифференциальных уравнений.

§ 5. Разностная бегущая волна.

5.1. Определение.

Построим решение уравнения (2.3), удовлетворяющее условию

$$v_i^j = v_{i-\beta}^{j-1}, \quad (5.1)$$

где $\beta \geq 1$ — целое число. Очевидно, такое решение сохраняет свой профиль от шага к шагу (по j), смещаясь при этом на β счетных интервалов вправо. Таким образом, скорость движения всех точек профиля постоянна и равна $c = \beta h/\tau$.

Подставив (5.1) в (2.3), получим уравнение

$$\varphi(v_i) - \varphi(v_{i+\beta}) = A_{i+1}(v_{i+1} - v_i) - A_i(v_i - v_{i-1}),$$

в которое входят все величины на одном шаге. Это уравнение допускает «первый интеграл»:

$$A_{i+1}(v_{i+1} - v_i) + \sum_{k=1}^{\beta} \varphi(v_{i+k}) = C_1. \quad (5.2)$$

Разностными бегущими волнами мы называем все решения уравнения (5.2).

Такие решения могут оказаться очень полезными для исследования различных способов интерполяции (т.е. различных способов вычисления A_i).

Дальше будем полагать $\varphi(v) \equiv v$.

5.2. Разностная бегущая волна, распространяющаяся по нулевому фону.

Решение уравнения (5.2), представляющее собой волну, движущуюся по нулевому фону (рис. 9), можно выделить следующим образом. Пусть $\xi_0 = x_{i_0+1}$ — положение разностного фронта. Будем считать, что

$$v_{i_0+1} = v_{i_0+2} = \dots = v_{i_0+\beta} = 0,$$

а значение $v_{i_0} \neq 0$. Определим это значение с помощью формулы (2.2), допустив, что равенство

$$-\frac{K(u)}{u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\beta h}{\tau}$$

справедливо в фиктивной точке $x_{i_0+1/2}$:

$$-\frac{(h/\tau)A_{i_0+1}(v_{i_0+1} - v_{i_0})}{0,5(v_{i_0+1} + v_{i_0})} = \frac{\beta h}{\tau}.$$

Отсюда получаем условие для нахождения v_{i_0} :

$$A_{i_0+1} = 0,5\beta. \quad (5.3)$$

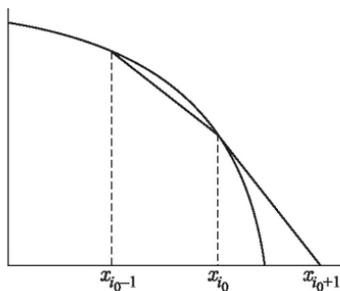


Рис. 9

Все значения v_i при $i < i_0$ будем находить из уравнения

$$A_{i+1}(v_{i+1} - v_i) + \sum_{k=1}^{\beta} v_{i+k} = C_1, \quad (5.4)$$

где, очевидно, $C_1 = -0,5\beta v_{i_0}$.

В случае $K(u) = \varkappa_0 u^\sigma$ из (5.3) следует, что

$$v_{i_0} = 2(hc/2\varkappa_0)^{1/\sigma},$$

где $c = \beta h/\tau$ — скорость. Нетрудно проверить, что это значение отличается от соответствующего значения на аналитической бегущей волне (см. (2.7)) множителем $0,5(2\sigma)^{1/\sigma}$. В частности, при $\sigma = 1$ (уравнение Буссинеска), а также при $\sigma = 2$ профиль построенной нами волны (5.3), (5.4) очень близок к профилю волны (2.7).

5.3. Разностный фронт в случае схемы сквозного счета.

Однако при сквозном счете волны, распространяющейся по нулевому фону, мы имеем дело не с решением (5.3), (5.4), а с решением, удовлетворяющим, строго говоря, условию на бесконечности:

$$u_i \rightarrow 0, \quad \text{когда } i \rightarrow \infty.$$

Появление фронта связано с появлением «машинного нуля», или, иначе говоря, определяется допустимой точностью вычислений. Значит, чтобы исследовать схему сквозного счета (п. 2, § 2), нужно рассмотреть решения уравнения

$$A_{i+1}(v_{i+1} - v_i) + \sum_{k=1}^{\beta} v_{i+k} = 0. \quad (5.5)$$

Легко доказать, что все положительные решения уравнения (5.5) монотонны, стремятся к нулю, когда $i \rightarrow \infty$, и стремятся к ∞ при $i \rightarrow -\infty$.

Введем новые переменные

$$w_i = \varkappa_0^{1/\sigma} v_i,$$

где $\varkappa_0 = \varkappa_0 \tau h^{-2}$. В новых переменных вместо (5.5) получим уравнение

$$[0,5(w_{i+1} + w_i)]^\sigma (w_{i+1} - w_i) + \sum_{k=1}^{\beta} w_{i+k} = 0. \quad (5.6)$$

Следовательно, профили искомых решений зависят главным образом от нелинейности (σ) и от скорости (β), а не от сетки или \varkappa_0 .

Обозначим через η наименьшее допустимое в счете число (иначе говоря, всякое число, меньшее η , считается нулем). Если $w_{i+1} = \eta$, то из (5.6) следует, что

$$w_i = (2^\sigma \eta)^{1/(\sigma+1)} - \frac{\sigma-1}{\sigma+1} \eta + o(\eta).$$

Поэтому, обозначив через i_0 номер последнего отличного от нуля числа w_i , можно утверждать, что в счете возможны только значения ¹⁾

$$\eta < w_{i_0} < (2^\sigma \eta)^{1/(\sigma+1)} - \frac{\sigma-1}{\sigma+1} \eta.$$

В самом деле, если бы w_{i_0} было меньше η , то последний номер ненулевых w_i был бы меньше i_0 , а если бы w_{i_0} было больше правой части, то мы имели бы $w_{i_0+1} \geq \eta$ и последний номер был бы больше i_0 .

Таблица 7

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\beta = 1$	3,359	3,062	2,736	2,372	1,955	1,454	0,820	0,158	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-10}$	0
$\beta = 2$	4,253	3,814	3,333	2,801	2,205	1,530	0,822	0,158	$1,0 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-10}$	0

В табл. 7 приведены значения w_i , соответствующие случаю $\sigma = 2$, $\eta = 2,5 \cdot 10^{-10}$ при $\beta = 1$ и $\beta = 2$; номер $i_0 = 10$.

5.4. Численный пример.

Задача, рассмотренная в примере 1 (§ 2), считалась по очень грубой сетке: $N = 50$, $h = 0,25$, от $t_0 = 0,10$ до $t = 2,00$ шагом $\tau = 0,05$ ($\chi = 80$) и шагом $\tau = 0,10$ ($\chi = 160$).

Эти параметры удовлетворяют условию $\sigma\tau/h = \beta$ при $\beta = 1$ и $\beta = 2$, так что при специальном выборе краевых условий решение могло бы оказаться бегущей разностной волной.

В нашем примере через несколько шагов счетный профиль становится весьма близким к разностной бегущей волне. В дальнейшем этот профиль перемещается со скоростью, близкой к c , незначительно перестраиваясь, так что $|v_i^j - v_{i-\beta}^{j-1}| \rightarrow 0$ с ростом j . На рис. 10 в крупном масштабе нанесены аналитическое решение (2.7) в окрестности фронта в момент $t = 2,00$ (сплошная кривая) и результаты, полученные в счете (темные точки — при $\tau = 0,05$, светлые точки — при $\tau = 0,10$); пунктирные

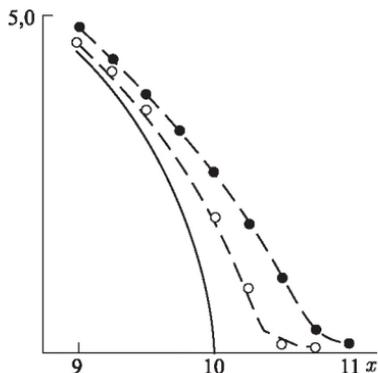


Рис. 10

¹⁾ Для простоты это рассуждение проведено для w_i , а не для v_i .

кривые — это профили разностных бегущих волн, сосчитанные по таблице, помещенной в конце п. 3, по формуле $v_i = w_i/\sqrt{\lambda_0}$.

Так как фронт «размазывается» по очень грубой сетке, то ошибка в окрестности фронта довольно заметная. При удалении от фронта она быстро уменьшается.

Для первого из этих вариантов число итераций на каждом шаге $\nu = 9$, а для второго $\nu = 12$ (ср. конец п. 5, § 2).

5.5. Разностное стационарное решение.

Стационарное решение уравнения (2.3), определяющееся условием

$$v_i^j = v_i^{j-1}, \quad (5.7)$$

можно рассматривать как частный случай разностной бегущей волны при $\beta = 0$, когда скорость профиля равна нулю. Разностные стационарные решения удовлетворяют уравнению

$$A_{i+1}(v_{i+1} - v_i) = C_1, \quad (5.8)$$

вполне аналогичному (5.2), где C_1 — произвольная постоянная.

В примере 4 устанавливается стационарное решение, удовлетворяющее крайевым условиям: v_0 — задано, $v_N = 0$. Нетрудно проверить, что это решение не зависит от шага по времени τ (это свойство однородных разностных схем).

В самом деле, так как в рассматриваемом примере $\sigma = 2$, то уравнение (5.8) (принимая во внимание (2.4)) можем переписать в виде

$$(v_{i+1} + v_i)^2(v_{i+1} - v_i) = -C^3,$$

где $C = -\sqrt[3]{4C_1 h^2 / \lambda_0 \tau}$ — снова произвольная постоянная. Сделаем замену $v_i = C w_i$. Для определения w_i получим уравнение

$$(w_{i+1} + w_i)^2(w_i - w_{i+1}) = 1.$$

Зная $w_N = 0$, можно определить все w_i , $i = N - 1, N - 2, \dots, 0$. Затем надо выбрать значение произвольной постоянной $\bar{C} = v_0/w_0$ и найти искомые значения $v_i = \bar{C} w_i$. Очевидно, это решение зависит лишь от N , т. е. от размера сетки по пространству.

Таблица 8

x_i	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,98	
$u(x_i)$	9,283	8,434	7,368	5,848	4,642	2,714	
v_i	$N = 50$	9,289	8,447	7,393	5,900	4,733	2,981
	$N = 10$	9,308	8,495	7,486	6,091	5,052	—
	$N = 5$	9,332	8,551	7,592	6,298	—	—

При счете на установление примера 4 (б) получены значения, совпадающие с таким образом сосчитанным стационарным решением с точностью до 0,000 000 1.

В табл. 8 приведены значения аналитического и разностных стационарных решений для этой задачи при $N = 50$, $N = 10$, $N = 5$.

Журнал вычислительной математики
и математической физики. 1963. Т. 3, № 4

Поступила
6.04.1963

Список литературы

1. *Зельдович Я. Б., Компанец А. С.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // К семидесятилетиею академика А. Ф. Иоффе: Сб. — М.: Изд-во АН СССР, 1950. — С. 61–71.
2. *Баренблатт Г. И.* О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // Прикладная математика и механика. — 1952. — Т. 16, № 1. — С. 67–78.
3. *Баренблатт Г. И., Вишик И. М.* О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа // Прикладная математика и механика. — 1956. — Т. 20, № 3. — С. 411–417.
4. *Олейник О. А., Калашиников А. С., Чжоу Юй-линь.* Уравнения типа нестационарной фильтрации // Изв. АН СССР. — 1958. — Т. 22, № 5. — С. 667–704.
5. *Баклановская В. Ф.* Численное решение одномерной задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 1961. — Т. 1, № 3. — С. 461–469.
6. *Баклановская В. Ф.* Численное решение второй краевой задачи для одномерного уравнения нестационарной фильтрации // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 1961. — Т. 1, № 6. — С. 1129–1133.
7. *Таиров М. Л.* Решение одной задачи нестационарной фильтрации методом интегральных соотношений // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 1962. — Т. 2, № 5. — С. 938–942.
8. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Однородные разностные схемы // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 1961. — Т. 1, № 1. — С. 4–63.
9. *Самарский А. А.* Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами и разностные методы их решения // Тр. Всесоюз. совещ. по дифф. уравнениям (Ереван, ноябрь 1958 г.). — Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1960. — С. 148–160.
10. *Самарский А. А.* Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для параболических уравнений // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 1963. — Т. 3, № 2. — С. 266–298.
11. *Самарский А. А.* Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 1962. — Т. 2, № 5. — С. 787–811.
12. *Самарский А. А.* Локально-одномерные схемы на неравномерной сетке для многомерных параболических уравнений // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 1963. — Т. 3, № 3. — С. 431–466.

13. Яненко Н.Н. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности // ДАН СССР. — 1959. — Т. 125, № 6. — С. 1207–1210.
14. Самарский А.А., Арсенин В.Я. О численном решении уравнений газодинамики с различными типами вязкости // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 1961. — Т. 1, № 2. — С. 357–360.
15. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. — М.: Физматгиз, 1960. — Т. 2.

36 лет назад Александр Андреевич Самарский и я готовили к печати статью о численном решении квазилинейного уравнения теплопроводности с помощью однородных разностных схем и метода переменных направлений. В ходе работы мы обнаружили необычное решение: конец стержня нагревается, температура неограниченно возрастает, однако длина нагретого участка не меняется, и фронт тепла стоит на месте (конечно, предполагается, что существует стержень, теплопроводность которого подчиняется указанному нелинейному закону).

Помню, как подробно обсудив это решение, Александр Андреевич спросил меня:

— Вы можете указать реальную задачу, описываемую таким решением?

Я признался, что нет.

— Вот и я не могу, — сказал он, — нельзя такое решение публиковать. Однако позднее мы придумали, что можно использовать это решение в качестве теста: два набора начальных и краевых условий (примеры 1 и 2) выглядят совершенно сходно, однако в первом примере фронт тепла перемещается с постоянной скоростью, а во втором — стоит неподвижно. И наша разностная схема сквозного счета (то есть, без выделения фронта) вполне адекватно передает обе эти ситуации.

В дальнейшем решения такого типа получили название «режимов с обострением», а описываемую ситуацию часто называют «локализацией тепла».

Кто бы мог подумать, что это «странное» решение окажется отправной точкой для многочисленных исследований! Далеко идущие обобщения, новые теоремы, оригинальные математические модели, разнообразные приложения — все это можно рассматривать как новое направление не только в уравнениях с частными производными, но и вообще в математике.

И. М. Соболев
Москва, 10.04.1998

Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла

А. А. Самарский, Н. В. Змитренко, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов

В работе изучаются условия возникновения и характер развития тепловых неоднородностей (структур) в неподвижной среде с коэффициентом теплопроводности и объемными источниками тепла, зависящими степенным образом от температуры. Установлено, что в такой среде существует пространственный масштаб (фундаментальная длина), определяющий размер области, в которой имеет место метастабильная локализация тепла и на асимптотической стадии процесса происходит образование тепловых структур. Ряд особенностей нелинейной теплопроводности и тепловых структур исследовались в работах [1–15].

1. Рассматривается одномерная нестационарная задача об иницировании процесса горения возмущением температуры, внесенным в конечный участок длины Δr_0 первоначально холодной среды (задача (а)), а также задача о неустойчивости гомотермического горения среды, равномерно нагретой в начальный момент (задача (б)). Исследование проводится при помощи анализа автомодельных и аналитических решений, а также при помощи прямого численного решения соответствующих уравнений в частных производных.

Рассмотрим задачу Коши в области $-\infty < r < \infty$ для уравнения с источниками (задачу о горении)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(k_0 T^\sigma \frac{\partial T}{\partial r} \right) + q_0 T^\beta, \quad t > t_0, \quad T(t_0, r) = T_0(r), \quad (1)$$

где $k_0 > 0$, $q_0 > 0$, $\sigma > 0$, $\beta > 0$.

Это уравнение имеет автомодельное решение (а. р.)

$$\begin{aligned} T(h, t) &= (q_1 t)^n f(\xi), \\ \xi &= -ir q_1^{-m_1} t^{-m} k_0^{-1/2} = ir (q_1 t)^{-m_1} (k_0 t)^{-1/2}, \quad i^2 = -1, \end{aligned} \quad (2)$$

где $n = (1 - \beta)^{-1}$, $m_1 = n\sigma/2$, $m = m_1 + 1/2$, $q_1 = -q_0 < 0$, а $f(\xi)$ — решение уравнения

$$-nf + m\xi f' = (f^\sigma f')' + f^\beta, \quad f' \equiv df/d\xi. \quad (3)$$

Ограничимся здесь случаем $\beta > 1$, для которого ξ — вещественная переменная при $t < 0$; так как $n < 0$, то из (2) следует, что $T(r, t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow -0$.

Формула (2) дает решение задачи Коши (1) при $t_0 \leq t < 0$ и специальном задании $T_0(r) = (q_1 t_0)^n f(\xi_0)$, где $\xi_0 = \xi(r, t_0)$. При $t \rightarrow -\infty$

эта функция стремится к нулю и поэтому (2) можно трактовать как решение задачи (а) с бесконечно малыми начальными данными при $t = -\infty$.

2. В случае задачи (а) будем искать решение, отличное от нуля в конечной (или бесконечной) области $-\xi_\Phi \leq \xi \leq \xi_\Phi$ и удовлетворяющее условиям холодного фона $f = 0$, $f^\sigma f' = 0$ при $\xi = \pm \xi_\Phi$, а также условию симметрии $f'|_{\xi=0} = 0$.

Из формулы (2) видно, что возможны три различных режима горения:

- 1) HS-режим (при $1 < \beta < \sigma + 1$), когда полуширина области горения $\Delta r_* = r(\xi_*, t) - r(-\xi_*, t)(f(\xi_*)/f_0 = 1/2)$ возрастает с ростом t (при $t \rightarrow -0$);
- 2) S-режим (при $\beta = \sigma + 1$), когда Δr_* неизменно во времени;
- 3) LS-режим (при $\beta > \sigma + 1$), когда полуширина области горения сокращается (ср. [4]).

3. Указанные режимы являются асимптотическими при задании произвольного возмущения $T(r, t_0) = T_0(r)$ в конечный момент времени $t = t_0$; они могут установиться на стадии, когда выделяется тепла гораздо больше, чем имелось при начальном подогреве в момент $t = t_0$. Из-за неавтомоделности начальных данных решение задачи (а) обращается в бесконечность не в момент $t = 0$, а в некоторый момент $t = t_f$ (такие решения называют обычно режимами с «обострением», см. [3, 4, 14]). Очевидно, что $t_f = t_1 + t_2$, где t_1 — время установления профиля, близкого к автомоделному, а t_2 — время, оставшееся до момента фокусировки. В случае S-режима находим (см. п. 4) $t_2 = 2(\sigma + 1)[\sigma(\sigma + 2)T^\sigma(0, t_1)q_0]^{-1}$.

Для исследования удобно формально перейти от переменной $t \in (-\infty, 0)$ к переменной $-(t_f - t)$, где $0 < t < t_f$; при этом $\xi = k_0^{-1/2} q_0^{-m} r(t_f - t)^{-m}$, а $q_1 t$ заменяется на $q_0(t_f - t) > 0$.

На рис. 1 приведены профили температуры $T(r)$ для различных моментов времени в случае S-, HS- и LS-режима. Для S-режима они получены (рис. 1, а) численным решением задачи (1) при $k_0 = 1$, $q_0 = 1$, $\sigma = 2$. Для S- ($\beta = 3$) и HS-режима ($\beta = 5/3$) решения выходят на автомоделное решение в соответствии с (2) (рис. 1, б). Аналогичные расчеты для LS-режима при $\beta > \sigma + 1$ (рис. 1, в) показали, что в случае конечных начальных возмущений выхода нет, однако профиль $T(r, t)$ внутри области горения близок к а. р. и сильно искажается на границе области.

4. В случае S-режима существует аналитическое решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $f^\alpha f' = 0$ при $f = 0$:

$$T(r, t) = (\bar{q}_0(t_f - f))^{-1/\sigma} (\sin^2 \alpha (c_1 - r))^{1/\sigma}, \quad (4)$$

где c_1 — произвольная постоянная, $\bar{q}_0 = q_0 \sigma (\sigma + 2) / 2(\sigma + 1)$, $\alpha = [\sigma^2 q_0 / 4 k_0 (\sigma + 1)]^{1/2}$.

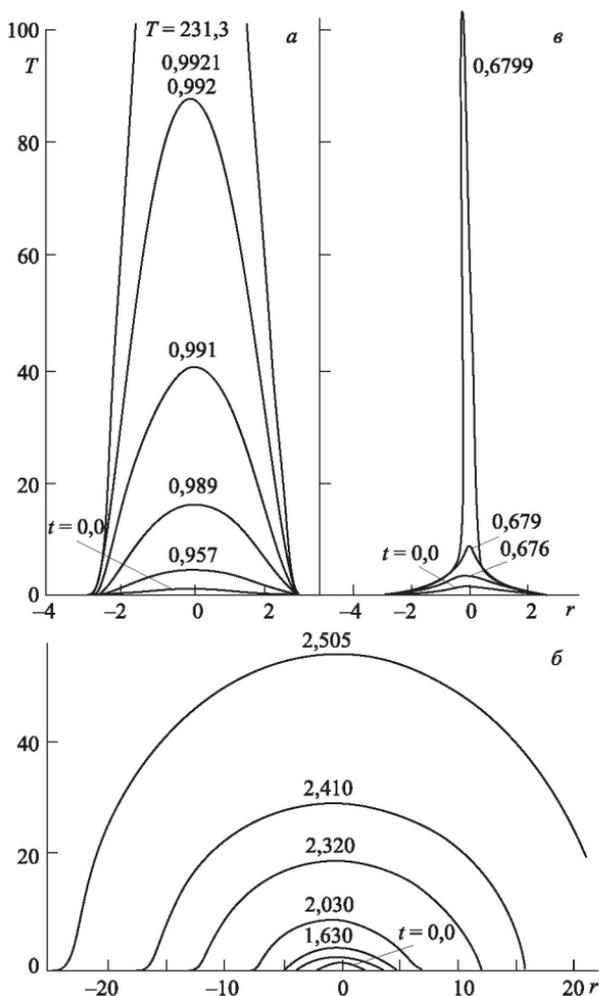


Рис. 1. Профили температуры T для различных моментов времени (числа у кривых) в случае S-режима (а), HS-режима (б), LS-режима (в)

Решение (5) является периодической функцией r с периодом

$$L_T = \pi/\alpha = 2\pi[(\sigma + 1)k_0/\sigma^2 q_0]^{1/2}. \quad (5)$$

Эту величину мы называем фундаментальной длиной (ф.д.). Из (4) видно, что в точках $r_k = c_1 + kL_T$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, потоки равны нулю. Имеет место самоподдерживающаяся в течение конечного времени, зависящего от начального возмущения, тепловая изоляция соседних слоев (r_{k-1}, r_k) и (r_k, r_{k+1}) длины L_T .

В случае задачи (а) при $\sigma = \beta - 1$, независимо от условий $\Delta r_0 < L_T$ или $\Delta r_0 > L_T$, решение уравнений (1) асимптотически выходит на

один период решения (4), иными словами, горение происходит «на ф. д.» в окрестности (имеющей диаметр L_T) точки с максимальной температурой $T_0(r)$. При специальном выборе начальных данных можно получить одновременное горение нескольких структур (4), каждая из которых имеет длину L_T .

5. Рассмотрим теперь задачу (6) о гомотермическом горении с $T_0(r) = T(0) = \text{const}$; ее решение имеет вид

$$\begin{aligned} T(r, t) = T(t) &= ((\beta - 1)q_0(t_f - t))^{1/(1-\beta)}, \\ 0 < t < t_f &= (q_0(\beta - 1)T^{\beta-1}(0))^{-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Проведено исследование устойчивости решения (6) относительно малых возмущений $\delta T = A(t) \exp i(\omega t - kr)$ и показано, что в HS-режиме (при $\beta < \sigma + 1$) решение (6) устойчиво для возмущений всех длин волн, а в LS-режиме (при $\beta > \sigma + 1$) неустойчиво для возмущений любых длин волн; при этом возмущения растут по закону $(t_f - t)^{\beta n}$. Гомотермическое горение в S-режиме (при $\beta = \sigma + 1$) неустойчиво для возмущений с длиной волны больше критической: $\lambda > \lambda_c = 2\pi[k_0/q_0(\sigma + 1)]^{1/2}$, при этом возмущения растут по закону $(t_f - t)^{n_1}$, $n_1 = \beta(1 - (\lambda_c/\lambda)^2)/(1 - \beta)$, при $\sigma > 0$ и по экспоненте с инкрементом $(1 - (\lambda_c/\lambda)^2)q_0$, при $\sigma = 0$.

Численные расчеты показывают, что в случае $\Delta r_0 < L_T$ область горения растет, пока ее диаметр не достигает ф. д. L_T , после чего скорость горения возрастает на несколько порядков (явление вспышки «на ф. д.»). Вспышка аналогична цепной реакции в размножающей среде с линейной диффузией (если $\sigma = 0$ ($\beta = 1$), то λ_c совпадает с критическим размером, а $L_T = \infty$; если $\sigma \gg 1$, то $\lambda_c/L_T = \sigma/(\sigma + 1) \approx 1$).

6. В случае $\beta = \sigma + 1$, вводя $x = f^{\sigma+1}$, запишем (3) в виде уравнения движения консервативной системы:

$$x'' = ((\sigma + 1)/\sigma)x^{1/(\sigma+1)} - (\sigma + 1)x, \quad x' = dx/d\tau, \quad \tau = \xi. \quad (7)$$

Потенциал поля сил $V(x)$ имеет минимум $V_0 = -(\sigma + 1)/2(\sigma + 2)\sigma^{1+1/\sigma}$ в точке $x = x_0 = \sigma^{-1-1/\sigma}$ (гомотермическое решение) и обращается в нуль при $x = x_1 = 0$ и $x = x_2 = (2(\sigma + 1)/\sigma(\sigma + 2))^{1+1/\sigma}$. Уравнение (7) имеет интеграл энергии $1/2(x')^2 + V(x) = E_0$. Периодическое решение (7) для $x > 0$ ($f > 0$) имеет место при $E_0 \leq 0$. При $E_0 = 0$ имеет место периодическое решение (4) с предельно большим периодом колебаний $\Delta\tau = 2\pi\sqrt{\sigma + 1}/\sigma$. При $V_0 < E_0 < 0$ существуют периодические решения с $x > 0$ (колебания около гомотермического фона $x = x_0$). По мере стремления E_0 к V_0 их период уменьшается, а амплитуда стремится к нулю. При $E_0 = V_0$ имеет место гармоническое периодическое движение с периодом $\Delta\tau = 2\pi\sqrt{\sigma}$.

Таким образом, неустойчивость гомотермического горения на развитой стадии S-режима обуславливает непрерывный спектр длин структур в диапазоне $L_T = 2\pi[(\sigma + 1)k_0/\sigma^2 q_0]^{1/2} \geq \Delta r \geq 2\pi(k_0/\sigma q_0)^{1/2}$. Однако из-за горения в режиме обострения выделение тепла в структуре происходит так быстро, что при $t \rightarrow t_f$ любой температурный фон (даже гомотермический, но с большим t_f) оказывается бесконечно малым по сравнению с температурой в структуре и задача (б) сводится к задаче (а), а спектр длин структур, как подтверждают численные расчеты, вырождается в L_T .

7. При горении в LS-режиме (задача (а)) тепло метастабильно локализуется в области длины $\sim L_T^{(LS)}$. Ф. д. $L_T^{(LS)}$ оценивается через L_T мажорирующего S-режима по формуле

$$L_T^{(LS)} = (2\pi\sqrt{\sigma + 1}/\sigma)\sqrt{k_0/q_0^*} = \pi\sqrt{2k_0(\beta + \sigma + 1)/q_0\sigma(\beta - 1)}T_{0m}^{(\sigma+1-\beta)/2}. \quad (8)$$

Эквивалентная q_0^* мажорирующего S-режима определяется из условия равенства температур и $t_f S$ и исследуемого LS-режима в начальный момент времени. Таким образом, ф. д. в LS-режиме зависит не только от свойств среды (σ , β , k_0 , q_0), но и от величины максимальной температуры $T_{0m} = \max T_0(r)$. Если $T_{0m} \rightarrow 0$, то $L_T^{(LS)} \rightarrow \infty$ и реализуется а. р. (2). При $T_{0m} \neq 0$ а. р. всегда искажено, осуществляется лишь часть решения внутри ф. д. (8). Оценка (8) для ф. д. $L_T^{(LS)}$ подтверждается в результате численного решения задачи (1). Она справедлива для Δr_0 , ненамного отличающейся от $L_T^{(LS)}$ (например, в два раза), так как вывод (8) не учитывал разницы между t_2 и t_f .

Задача (б) в LS-режиме на асимптотической стадии сводится к задаче (а), как и в случае S-режима (см. п. 6).

Учет ряда физических факторов (выгорания среды, изменения закона скорости горения с ростом температуры и др.) приводит к переходу LS- и S-режимов в HS-режимы при конечных температурах, уменьшая время локализации тепла. При $\beta \leq 1$ горение осуществляется всегда в HS-режиме. В сжимаемой движущейся среде аналогом ф. д. является фундаментальная масса [3, 14].

Авторы благодарят Г. Г. Еленина за обсуждение работы.

Доклады Академии наук СССР.
1976. Т. 227. № 2

Поступила
11.11.1975

Список литературы

1. Мартинсон Л. К., Павлов К. Б. // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 1972. — Т. 12, № 4. — С. 1048.
2. Калашников А. С. // Там же. — 1974. — Т. 14. № 4. — С. 891.
3. Курдюмов С. П. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1975. — № 18.
4. Самарский А. А., Змитренко Н. В. и др. // ДАН СССР. — 1975. — Т. 223, № 6. — С. 1344.

5. Зельдович Я.Б., Компанеец А.С. // Сб., посвящ. 70-летию акад. А.Ф. Иоффе. — Изд-во АН СССР, 1950.
6. Баренблатт Г.И. // ПММ. — 1952. — Т. 16, № 1. — С. 67.
7. Баренблатт Г.И., Вишик И.М. // ПММ. — 1956. — Т. 20, № 3. — С. 411.
8. Самарский А.Л., Соболев И.М. // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 1963. — Т. 3, № 4. — С. 702.
9. Самарский А.А., Курдюмов С.П., Волоосевич П.П. // Там же. — 1965. — Т. 5, № 2. — С. 199.
10. Курдюмов С.П. // Препринты ИПМ АН СССР. — 1971. — № 45. — Деп. № 337-74; 1971. — № 55. — Деп. № 339-74; 1971. — № 56. — Деп. № 338-74.
11. Кадомцев Б.Б. // Вопросы теории плазмы: Сб. — Вып. 2. М.: Госатомиздат, 1963.
12. Саночкин Ю.В. Магнитная гидродинамика. — 1965. — № 3. — С. 61.
13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. и др. // ДАН СССР. — 1967. — Т. 173, № 4.
14. Змитренко Н.В., Курдюмов С.П. // Препринты ИПМ АН СССР. — 1973. — № 16; 1974. — № 19; ДАН СССР. — Т. 218, № 6. — С. 1306; Т. 219, № 3. — С. 578.
15. Самарский А.Л., Дородницын В.А. и др. // ДАН СССР. — 1974. — Т. 216, № 6. — С. 1254.

В этой статье подведены итоги одного из самых первых исследований развития режимов с обострением в нелинейной среде. Сейчас это понятие — «нелинейная среда» — стало общеупотребимым в том смысле, какой вкладывали в него А.А. Самарский и С.П. Курдюмов в начале этих работ. Под названным термином в первую очередь подразумевается определенная математическая модель, в данном случае — описание с помощью уравнения нелинейной теплопроводности с объемным источником энергии, учитывающего процессы выделения и диффузии тепла.

Сергей Павлович первым обратил внимание на необычное поведение процессов диффузии при развитии режимов с обострением: если температура на границе среды с коэффициентом теплопроводности, растущим с температурой, увеличивалась, стремясь к бесконечности при приближении к конечному моменту времени, то имело место отсутствие распространения тепла в глубь среды в течение всего промежутка времени до указанного момента. Пример «стоячей» волны прогрева в случае степенного характера роста температуры на границе и степенной же зависимости коэффициента теплопроводности от температуры был построен А.А. Самарским и И.М. Соболевым еще в 1961 г.! В дальнейшем А.А. Самарским, С.П. Курдюмовым, А.П. Михайловым, В.Л. Галактионовым и учениками Сергея Павловича были найдены гораздо более общие си-

туации, в которых проявляется этот эффект «метастабильной локализации тепла».

Когда в 1973 г. под руководством А. А. Самарского и С. П. Курдюмова началось систематическое изучение свойств режимов с обострением в нелинейных средах, Сергеем Павловичем было высказано предположение, что такие режимы могут порождаться самой средой (а не навязываться в виде условий на границе). Для этого в среде должен действовать нелинейным образом зависящий от температуры (!) источник тепла. В этом случае конкуренция процессов выделения (источник) и распространения (диффузия) энергии приведет к появлению новой характеристики среды: минимального размера области, на котором эти процессы «уравновешивают» друг друга. Источник тепла порождает режим с обострением, а развитие этого режима приводит к локализации тепла на определенном размере, названном в аннотируемой статье «фундаментальной длиной». Предлагаемая статья интересна также тем, что в ней впервые опубликовано точное решение, описывающее случай локализации энерговыведения на неизменном со временем размере.

Дальнейшее развитие сформулированных в данной работе идей привело к изучению сложных структур нелинейной среды, к своеобразному «нелинейному гармоническому анализу», когда вместо традиционных, но не имеющих отношения к нелинейной задаче гармоник, анализу подвергаются так называемые собственные функции нелинейной среды, т. е. частные точные решения соответствующих нелинейных задач.

Высказанные в середине 70-х годов прошлого века Сергеем Павловичем эти идеи казались слишком необычными, но уже с современных позиций они представляются вполне естественными. Еще в начале работ, примером которых является предлагаемая статья, А. А. Самарский и С. П. Курдюмов говорили, что нелинейность — не экзотика, а неотъемлемое свойство природы, и математический язык ее описания должен быть адекватен этой ее сущности.

Многочисленные явления природы (перегретная и ионизационная неустойчивости в плазме, гидродинамические неустойчивости в газах и жидкостях и т. п.) требуют изучения нелинейных математических моделей. Нелинейность приводит к новым (не экспоненциальным, как в линейном анализе) законам роста неустойчивости, а наличие механизма «разравнивания» (типа диффузии) — к возникновению структур. Общий и адекватный язык описания таких процессов формировался в работах А. А. Самарского, С. П. Курдюмова и их учеников во многом на основе пионерских идей Сергея Павловича. Одним из примеров такого подхода является предлагаемая вниманию читателя статья.

Н. В. Змитренко

Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью

Н. В. Змитренко, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, А. А. Самарский

В рамках плоской геометрии и модели среды, учитывающей электронную теплопроводность и локальное поглощение α -частиц, рассмотрены особенности зажигания термоядерного горения (ТГ) в D + T-плазме. Показано, что этот процесс может сопровождаться локализацией горения на определенных участках среды в течение конечного промежутка времени, а его возбуждение носит резонансный характер и зависит от амплитуды и размера начального возмущения температуры.

1. Распространение волны ТГ изучалось в [1–3]. В данной работе рассмотрена начальная стадия горения, вызванного возмущением температуры конечной амплитуды. В мишенях, используемых в лазерном термоядерном синтезе (ЛТС), это возмущение создается, как показывают расчеты на ЭВМ, первоначальной ударной волной и дальнейшим нагревом вещества при его почти адиабатическом сжатии [1, 4, 5].

Будем пренебрегать выгоранием DT-материала и процессами переноса излучения и рассматривать плазму как однотемпературную, идеальную и неподвижную среду. Справедливость допущений будет проверена ниже.

Для сечения реакции $\langle\sigma v\rangle_{DT}$ используется выражение из [6], справедливое в диапазоне $1 \lesssim T \lesssim 30$ кэВ. Тогда для полностью ионизованной плазмы с равными концентрациями D и T процесс зажигания описывается уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_0 \frac{\partial}{\partial r} \left(T^\sigma \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{q_0 T^\beta}{1 + BT^b}, \quad (1)$$

где T (кэВ) — температура; $k_0 T^\sigma$ — коэффициент электронной температуропроводности; $k_0 = 8,1 \cdot 10^3 \rho^{-1} \text{ см}^2 \text{ с}^{-1} \text{ кэВ}^{-2,5}$, $\sigma = 2,5$; $q_0 = 4,7 \cdot 10^5 \rho \text{ с}^{-1} \text{ кэВ}^{-4,2}$; $\beta = 5,2$; $B = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ кэВ}^{-3,6}$; $h = 3,6$; ρ (г/см³) — плотность.

2. Решения уравнения (1) с $B \equiv 0$ изучались в [7] и более подробно в [8]. Эти исследования привели к формулировке понятий «режима с обострением» и «вспышки». Первое обусловлено видом источника: если $\beta > 1$, то у уравнения (1) существуют решения, в которых температура возмущения нарастает так быстро, что обращается в бесконечность за конечный промежуток времени. Второе связано с наличием конкуренции между процессами выделения тепла за счет источника и его растеканием за счет теплопроводности. Если для возмущения данного размера Δr_0 и данной амплитуды T_m растекание тепла не

компенсируется источником, то его температура падает. Возбуждение горения в среде имеет место, когда $\Delta r_0 \geq \Delta r_*$,

$$r_* = \pi \sqrt{\frac{2(\beta + \sigma + 1)}{\sigma(\beta - 1)}} \sqrt{\frac{k_0}{q_0}} T^{\frac{\sigma+1-\beta}{2}}, \quad (2)$$

где Δr_* — резонансная длина (РД), аналогичная критическому размеру в линейных размножающих средах [7, 8]. В этом случае сразу развивается вспышка горения, сопровождающаяся ростом температуры в «режиме с обострением». На стадии вспышки, в так называемых S- и LS-режимах горения ($\beta \geq \sigma + 1$) формируется «вогнутый» профиль температуры и, вследствие этого, горение оказывается локализованным на РД в течение конечного времени $\Delta t_* \approx (q_0 T_m^{\beta-1})^{-1}$ [7, 8]. В LS-режиме полуширина области горения сокращается со временем. В HS-режиме ($1 < \beta < \sigma + 1$) профиль температуры «выпуклый» и размер области горения растет [7, 8]. В S-режиме ($\beta = \sigma + 1$) этот размер постоянен, а РД, в отличие от LS-режима, зависит только от свойств среды и не зависит от величины начального возмущения.

3. В диапазоне температур 1–3 кэВ источник в (1) близок к выражению $q_0 T^\beta$. Так как $\beta = 5,2 > 3,5 = \sigma + 1$, то этот источник может приводить, в соответствии с [7, 8], к локализации горения на определенной длине. При больших температурах учет члена BT^σ в знаменателе выражения для $q(T)$ в (1) приводит к изменению эффективного значения β_{eff} в записи $q(T) = q_{\text{eff}} T^{\beta_{\text{eff}}}$. Так, при $T \approx 5$ кэВ $q(T) \approx q_S T^{\sigma+1}$ с $q_S \approx 5,1 \cdot 10^6 \rho \text{ с}^{-1} \text{ кэВ}^{-2,5}$. При $T \gtrsim 5$ кэВ $\beta_{\text{eff}} < \sigma + 1$.

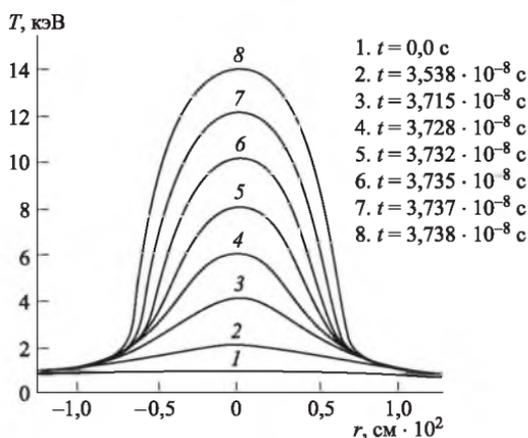


Рис. 1. Профили температуры даны на следующие моменты времени

Эти аппроксимации позволяют, пользуясь результатами [7, 8], получить основные характеристики ТГ в диапазоне 1–10 кэВ, если оно возбуждается возмущением с $\Delta r_0 \geq \Delta r_*$. Размер области локализации

ТГ $\Delta r_{я}$ дается формулой (2): $\Delta r_{я} \approx 0,5/(\rho T_m^{0,85})$ см (при изменении начальной амплитуды в диапазоне $T_m \sim 1-3$ кэВ). Горение локализовано в течение времени $\Delta t_{я} \frac{10^{-6}}{\rho T_m^{4,3}}$ с. При достижении в процессе горения температур ~ 5 кэВ размер и время локализации области горения определяются «S-режимом»: $\Delta r_{я}^{(s)} \approx \frac{0,2}{\rho}$ см и $\Delta t_{я}^{(s)} \approx \frac{8 \cdot 10^{-8}}{\rho T_m^{2,5}}$ с. При дальнейшем росте температуры профиль ее внутри области локализации начинает перестраиваться на выпуклый и при $T > 10$ кэВ начинается увеличение области горения.

На рис. 1 приведены результаты численного решения уравнения (1), описывающего развитие начального возмущения, заданного на длине $\approx 0,1$ см и имевшего амплитуду $T_m = 1$ кэВ. Плотность $\rho = 20$ г/см³. Область вспышки имеет размер $\sim 2,5 \cdot 10^{-2}$ см. Время существования структуры ТГ $\sim 4 \cdot 10^{-8}$ с, что тоже соответствует приведенным формулам. Заметим, что, поскольку $\rho = \text{const}$, в (1) можно сделать замену независимых переменных $t' = \rho t$ и $r' = \rho r$. Тем самым решения (1) будут одинаковыми для любых плотностей, если при увеличении сжатия в K раз уменьшить масштабы длины и времени тоже в K раз.

4. Оценим влияние процессов, не учтенных в предлагаемой модели. Сравнивая величины времени релаксации ионной и электронной температур Δt_{ei} [9] и длины пробега α частиц Δr_a [10] с $\Delta t_{я}$ и $\Delta r_{я}$ получаем, что одностепенное приближение и модель локального поглощения α -частиц справедливы для $T \lesssim 7$ кэВ. Вклад нейтронов можно не учитывать, так как длина их пробега Δr_n [11] велика по сравнению с $\Delta r_{я}$. Используя полученное в [6] решение, найдем, что половина термоядерного горючего выгорит за время $\Delta t_{0,5} \approx \frac{8,4 \cdot 10^{-24}}{\rho \langle \sigma v \rangle_{DT}}$ с.

Из сравнения этого выражения с $\Delta t_{я}$ следует, что развитие горящего образования можно рассматривать без учета выгорания. Все эти оценки не зависят от плотности, потому что Δt_{ei} и $\Delta t_{0,5}$, Δr_a и Δr_n , так же как и $\Delta t_{я}$ и $\Delta r_{я}$ пропорциональны ρ^{-1} .

Учет объемного излучения необходим, если длина пробега γ -квантов Δr_{γ} [9] больше размера горячей области. Вычисление показывает, что в разумных диапазонах температур (не ниже 1 кэВ) и плотностей сжатия (не больше, чем в 10^4 раз) горящее образование прозрачно. Высвечивание эквивалентно добавлению в (1) стока $g(T) = g_0 T^{0,5}$, где $g_0 = 2,2 \cdot 10^8 \rho$ с⁻¹кэВ^{0,5} [9]. Для $T \gtrsim 3,7$ кэВ $g(T) < q(T)$ независимо от плотности, так как и q , и g пропорциональны ρ . Если структура ТГ начинает образовываться при температурах 4 кэВ, то объемное излучение уже не сможет ее загасить. На рис. 2 приведены результаты расчета с учетом потерь на объемное излучение. Начальная амплитуда возмущения ≈ 4 кэВ, $\Delta r_0 = 0,1$ см, $\rho = 20$ г/см³.

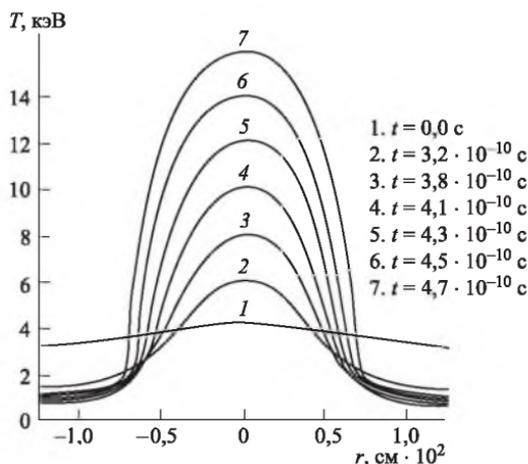


Рис. 2. Профили температуры на следующие моменты времени

С другой стороны, существует диапазон плотностей, при которых горящая область является оптически плотной, а лучистая теплопроводность мала по сравнению с электронной. При $T \lesssim 7$ кэВ это соответствует сжатиям в $\sim 10^6$ раз по отношению к плотности ДТ-льда. В этом случае объемного высвечивания нет.

Время разлета горячей области можно оценить как $\Delta t_s \approx \Delta r_{\text{я}}/c_s$, где $c_s \approx 2 \cdot 10^7 T^{0,5}$ см/с. На стадии образования структуры ТГ выполнено $\Delta t_s > \Delta t_{\text{я}}$, если $T_m \gtrsim 3$ кэВ.

Учет гидродинамического движения к центру может компенсировать потери на объемное излучение в оптически прозрачной плазме при $T < 4$ кэВ.

5. Проведенное исследование показывает, что условие зажигания зависит от величины и размера начального возмущения, в частности, от соотношения между размерами сжатой области в ДТ-мишенях и области локализации ТТ.

Расчеты, аналогичные [7, 8], показывают, что для сферического случая РД примерно в полтора раза больше. Тогда критерий $\rho \Delta r_{\text{я}}$ в сферическом случае будет иметь значение $\sim 0,3-0,4$ г/см².

Письма в ЖЭТФ.
1978. Т. 26, вып. 9

Поступила
3.10.1977

Список литературы

1. Проблемы лазерного термоядерного синтеза: Сб. статей / Пер. под ред. А. А. Филюкова. — М.: Атомиздат, 1976.
2. Настоящий А. Ф., Шевченко Л. П. // Атомная энергетика. — 1972. — Т. 451, № 32.
3. Alikhanov S. G., Konkashbaev I. K. // Nuclear Fusion. — 1972. — V. 11. — P. 119.

4. Волосевич П. П., Дегтярев Л. М. и др. // Физика плазмы. — 1976. — Т. 2. С. 883.
5. Афанасьев Ю. В., Басов Н. Г., Волосевич П. П., Гамалий Е. Г., Крохин О. Н., Курдюмов С. П., Леванов Е. И., Розанов В. Б., Самарский А. А., Тихонов А. Н. // Письма в ЖЭТФ. — 1975. — Т. 21. — С. 150.
6. Афанасьев Ю. В., Басов Н. Г. и др. // Препринт ФИАН № 66. — М., 1972.
7. Самарский А. А., Змитренко Н. В. и др. // ДАН СССР. — 1976. — Т. 227. — С. 321.
8. Самарский А. А., Змитренко Н. В. и др. // Препринт ИПМ № 74; 109. — М., 1976.
9. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1966.
10. Крохин О. Н., Розанов В. Б. // Квантовая электроника. — 1972. — № 4, вып. 10. — С. 118.
11. Мухин К. Н. Введение в ядерную физику. — М.: Атомиздат, 1965.

Сразу после обнаружения в математических моделях эффекта локализации горения на «фундаментальной длине», Сергей Павлович предложил применить полученные результаты к реальным ситуациям в плазме. Нахождению соответствующих «фундаментальных длин» в установках управляемого термоядерного синтеза и посвящена предлагаемая статья.

Оказалось, что процесс зажигания термоядерной реакции в мишенях инерционного синтеза вполне адекватно описывается этой моделью. Впоследствии полученные критерии были подтверждены как аналитическими, так и численными исследованиями более полных моделей, учитывающих двухтемпературность, перенос излучения и α -частиц, газодинамическое движение и т. п.

Н. В. Змитренко

Локализация процессов диффузии в средах с постоянными свойствами

А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов

Изучаются необычные свойства процессов диффузии на примере задачи о распространении тепла в среде с постоянной теплопроводностью в условиях, когда на границе среды температура или поток тепла растут в так называемом режиме с обострением, т. е. обращаются в бесконечность за конечное время обострения.

Процессы с обострением, возникающие в среде либо под действием граничных режимов [1–7], либо из-за наличия в ней объемных источников тепла [8–10] и приводящие к метастабильной локализации

(«инерции») тепла и горения, ранее подробно изучались при теплопроводности, зависящей от температуры.

В настоящей работе показано, что эффект «инерции» тепла имеет место и в среде с постоянными теплофизическими свойствами, что значительно расширяет возможности его экспериментального исследования и применения.

Выделен класс граничных режимов с обострением (S- и LS-режимов), приводящих к эффективной локализации процесса диффузии тепла в течение времени обострения в области конечных размеров. Это означает, что несмотря на неограниченное возрастание температуры в зоне локализации и количества поступающей в нее энергии, вне зоны локализации температура и количество тепла ограничены в течение всего процесса.

Показано, что при более быстром, чем в S- и LS-режимах, нарастании температуры на границе (в так называемом HS-режиме) температура в любой точке среды неограниченно увеличивается и локализация тепла, так же как и в случае режимов без обострения, отсутствует.

1. Диффузия тепла в полупространство описывается уравнением

$$T_f = k_0 T_{rr}, \quad 0 < r < \infty, \quad -\infty < t_0 \leq t < 0. \quad (1)$$

Температура на границе растет в режиме с обострением

$$T(0, t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow 0; \quad (2)$$

здесь $T(r, t)$ — температура; $k_0 = \text{const} > 0$ — коэффициент теплопроводности. Не ограничивая общности, положим

$$T(r, t_0) = 0, \quad 0 < r < \infty. \quad (3)$$

В задаче (1)–(3) имеет место метастабильная локализация тепла, если найдется $r_\phi = \text{const} < \infty$ такое, что для всех $r > r_\phi$ выполнено

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_r^\infty T(\eta, t) d\eta < \infty. \quad (4)$$

Областью локализации называется часть пространства $0 \leq r \leq r_\phi$, в которой $T(r, t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$ (за исключением, быть может, точки $r = r_\phi$).

2. Классификация граничных законов (2), соответствующих S-, LS- и HS-режимам распространения тепла, проводится с помощью интеграла, дающего решение задачи (1)–(3):

$$T(r, t) = \frac{r}{2\sqrt{k_0\pi}} \int_{t_0}^t \exp \left[-\frac{r^2}{4k_0(t-\tau)} \right] (t-\tau)^{-3/2} T(0, \tau) d\tau. \quad (5)$$

а) Если

$$T(0, t) = T_0(-t)^\nu \exp[R_0(-t)^{-1}], \quad (6)$$

где $T_0 > 0$, $R > 0$, ν — константы, то осуществляется локализация тепла в S-режиме.

Из (5) следует, что неравенство (4) выполняется при всех $r > r_\Phi = 2(k_0 R_0)^{1/2}$. Внутри зоны локализации $0 \leq r \leq r_\Phi$ температура при $t \rightarrow 0$ неограниченно возрастает (при $\nu \leq 1/2$ еще и в точке $r = r_\Phi$). Вне указанной области температура ограничена предельным распределением

$$T(r, 0) = \frac{T_0 r^{2\nu}}{2^{2\nu} \sqrt{\pi} k_0} \left[1 - \left(\frac{r_\Phi}{r} \right)^2 \right]^{\nu-1/2} \int_x^\infty \exp(-u) u^{-\nu-1/2} du, \quad x = \frac{r^2 - r_\Phi^2}{4k_0(-t_0)}.$$

б) В силу теорем сравнения любой граничный закон, мажорируемый S-режимом (6) от момента $t = t_0$ до $t = 0$, также приводит к локализации тепла в области не большей, чем $0 \leq r \leq r_\Phi$.

Например, если $T(0, t) \leq T_0(-t)^\nu \exp[R_0(-t)^n]$, $-1 < n < 0$ (ср. с (6)), то (4) справедливо при всех $r > 0$ (LS-режим). Особенностью LS-режима является обращение температуры в бесконечность при $t = 0$ в граничной точке $r = 0$. Температура среды ограничена в течение всего процесса предельным распределением

$$T(r, 0) = \frac{T_0 r^{2\nu}}{2^{2\nu} \sqrt{\pi} k_0'} \int_y^\infty \exp \left[-u + \frac{R_0 r^{2n}}{(4k_0)^n} u^{-n} \right] - u^{-\nu-1/2} du, \quad y = \frac{r^2}{4k_0(-t_0)}. \quad (7)$$

в) Если $T(0, t) \geq T_0(-t)^\nu \exp[R_0(-t)^n]$, $n < -1$ (ср. с (6)), то $T(r, t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$ для любых $r > 0$ (HS-режим), и локализация тепла отсутствует.

3. Граничный S-режим (6), разделяющий LS- и HS-режимы, является экспоненциальной функцией времени, поэтому задача (1), (3) с граничным условием

$$T(0, t) = T_0 \{ \exp[R_0(-t)^n] - 1 \}, \quad n < 0, \quad (8)$$

рассматривается более подробно.

Заменой $V(r, t) = T_0 \ln[1 + T(r, t)/T_0]$ задача (1), (3), (8) преобразуется к виду

$$V_t = k_0 V_{rr} + (k_0/T_0) V_r^2, \quad 0 < r < \infty, \quad t_0 \leq t < 0; \quad (9)$$

$$V(0, t) = T_0 R_0 (-t)^n, \quad t_0 \leq t < 0, \quad V(r, t_0) = 0, \quad 0 < r < \infty, \quad (10)$$

где граничное условие (10) является степенной функцией времени. Асимптотическая (при $t \rightarrow 0$) стадия процесса распространения тепла

в задаче (9), (10) описывается автомодельным решением вырожденной задачи

$$u_t = (k_0/T_0)u_r^2, \quad 0 < r < \infty, \quad -\infty \leq t < 0; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= T_0 R_0 (-t)^n, \quad -\infty \leq t < 0, \\ u(r, -\infty) &= 0, \quad 0 < r < \infty, \end{aligned} \quad (12)$$

где $u(r, t) = T_0 R_0 (-t)^n f(\xi)$, $\xi = r/[k_0 R_0 (-t)^{n+1}]^{1/2}$, а $f(\xi)$ определяется из алгебраического уравнения

$$[P(f, \xi) - (n+1)/4]^{(n+1)/2} [P(f, \xi) - (n-1)/4]^{-(n-1)/2} = (-n)^{1/2} \xi^{-1} \quad (13)$$

при $P(f, \xi) = \{[(n+1)/4]^2 - n f \xi^{-2}\}^{1/2}$, $0 \leq \xi < \infty$.

Из уравнения для разности $V(r, t) - u(r, t)$ с помощью принципа максимума установлено, что при всех $t > t_1$

$$|\theta(\xi, t) - f(\xi)| < R_0^{-1} C_0 (-t)^{-n} \ln(t_0/t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \quad (14)$$

где $\theta(\xi, t) = (T_0 R_0)^{-1} (-t)^{-n} V[\xi(k_0 R_0)^{1/2} (-t)^{(n+1)/2}, t]$ и $C_0 = \max|f''(\xi)| < \infty$, $t_1 = t_0 \exp[-R_0 C_0^{-1} (-t_0)^n]$.

Из (14) следует, что поведение температуры $T(r, t)$ с улучшающейся при $t \rightarrow 0$ относительной точностью описывается функцией $U(r, t) = T_0 \{\exp[u(r, t)/T_0] - 1\}$:

а) при $n = -1$ (S-режим) уравнение (13) имеет аналитическое решение

$$T(r, t) \sim U(r, t) = T_0 \{\exp[R_0 (-t)^{-1} (1 - r/r_\Phi)^2] - 1\}, \quad 0 \leq r \leq r_\Phi,$$

где глубина локализации $r_\Phi = 2(k_0 R_0)^{1/2}$ совпадает с вычисленной из (5);

б) при $-1 < n < 0$ (LS-режим) температура ограничена предельным распределением, совпадающим с (7) при $r \rightarrow 0$

$$T(r, t) \rightarrow T_0 \left\{ \exp \left[C(n) (R_0 r^{2n} / k_0^n)^{1/(n+1)} \right] - 1 \right\}, \quad t \rightarrow 0,$$

где $C(n) = -[(n+1)/2n] 2^{-2n/(n+1)} (-n)^{1/(n+1)}$;

в) при $n < -1$ (HS-режим) температура в области $0 \leq r < [k_0 \times R_0 (-t)^{n+1}]^{1/2} 2(-n)^{n/2} (-n-1)^{-(n+1)/2}$ изменяется по закону

$$T(r, t) \sim T(0, t) \exp \left[-r(-nR_0/k_0)^{1/2} (-t)^{(n-1)/2} \right], \quad t \rightarrow 0.$$

Эффективная глубина (полуширина) проникновения тепла $r_{\text{эф}}$ ($T[r_{\text{эф}}(t), t]/T(0, t) = 1/2$) во всех трех режимах сокращается по закону

$$r_{\text{эф}}(t) = (-t)^{(1-n)/2} \ln 2 \left[\frac{k_0}{R_0(-n)} \right]^{1/2} + o \left[(-t)^{(1-n)/2} \right], \quad t \rightarrow 0.$$

Отметим, что «вырождение» в смысле (10) уравнения (5) в нелинейное уравнение первого порядка (7) имеет место в ряде других задач (например, в задачах горения), что облегчает их исследование.

4. Эффект локализации тепла существует и в многомерном случае, причем справедливы основные результаты, полученные в одномерной геометрии (зависимость от времени граничного S-режима, температуры, полуширины). Так же как в [3], строятся области локализации с границами, составленными из плоских поверхностей (граней). В зависимости от граничных условий область локализации имеет весьма разнообразную форму (установлено, что ее границей может быть любая из поверхностей второго порядка). Например, граничный режим $T(0, x_2, t) = \exp \left[\frac{(x_2^2 + 2x_2)}{4(-t)} \right]$, $0 \leq x_2 \leq 1$, $T(0, x_2, t) = 0$, $x_2 < 0$, $x_2 > 1$; $t_0 \leq t < 0$, заданный на границе $x_1 = 0$ полупространства $E_2 \{0 < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty\}$, локализован в области $x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 3$. Принцип суперпозиции позволяет объединять области локализации, соответствующие различным граничным режимам, и получать, в частности, области с негладкими границами.

5. В отличие от задачи со степенными граничными режимами, действующими на нелинейную среду с коэффициентом теплопроводности

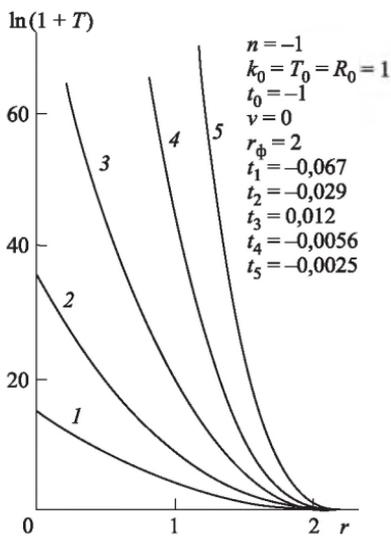


Рис. 1

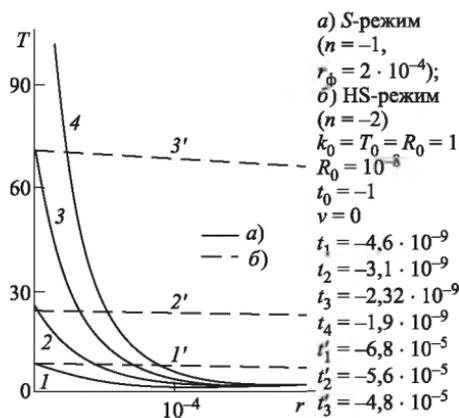


Рис. 2

$k(T) = k_0(T)^\sigma$, $\sigma > 0$ (см. [1–4]), в рассматриваемом случае $k(T) = k_0$, а граничные режимы — экспоненциальные (п. 3, $T(0, t) \sim \exp [(-t)^n]$). Поэтому задача не допускает точной автоматической постановки. Показано, что обычно применяемая оценка эффективной глубины проникновения тепловой волны $r_{\text{эф}}(t) \sim [k_0(-t)]^{1/2}$ неправильно описывает

асимптотическую стадию процесса, ее реальное значение при $t \rightarrow 0$ имеет вид $r_{эф}(t) \sim (-t)^{(1-n)/2}$ и определяется из анализа автомодельных решений вырожденной задачи.

На рис. 1 даны результаты численного расчета задачи о проникновении тепла в S-режиме. Установление автомодельных закономерностей в S-режиме происходит при росте температуры на границе в 10^4 раз (в нелинейной среде требуется рост в 10 раз). При дальнейшем росте температуры на границе численное решение исходной задачи (9), (10) практически совпадает с аналитическим решением вырожденной задачи (11), (12).

Численное сравнение HS- и S-режимов в зависимости от безразмерного параметра $\alpha = R_0(-t_0)^n$ показывает, что при $\alpha = 1$ различия между ними не существенны при росте граничной температуры в 10^2 раз за равное время. При $\alpha = 10^{-8}$ и том же росте температуры на границе глубины проникновения тепла различаются на порядок (см. рис. 2).

Глубина локализации в меди для S-режима при $\alpha = 1$ и $|t_0| = 1$ с равна 10 см, при $\alpha = 10^{-8}$ и том же $|t_0|$ — порядка 10^{-3} см.

Доклады Академии наук СССР.
1979. Т. 247, № 2

Поступила
20.11.1979

Список литературы

1. Самарский А. А., Змитренко Н. В. и др. // ДАН СССР. — 1975. — Т. 223, № 6. — С. 1344.
2. Курдюмов С. П. Проблемы теории плазмы. — Киев: Наукова думка, 1976. — С. 278.
3. Курдюмов С. П., Михайлов А. П. и др. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1977. — № 22.
4. Михайлов А. П. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1977. — № 64.
5. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. и др. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1977. — № 103.
6. Самарский А. А., Соболев И. М. // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 1963. — Т. 3, № 4. — С. 702.
7. Курдюмов С. П., Змитренко Н. В. // Журн. прикл. механики и техн. физики. — 1977. — № 1, вып. 3.
8. Самарский А. А., Змитренко Н. В. и др. // ДАН СССР. — 1976. — Т. 227, № 2. — С. 321.
9. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. и др. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1976. — № 74.
10. Самарский А. А., Еленин Г. Г. и др. // ДАН СССР. — 1977. — Т. 237, № 6. — С. 1330.
11. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. и др. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1978. — № 77.

Первоначально данная статья замышлялась как ответ на вопрос: какую роль в эффекте локализации тепла играет нелинейность среды, а какую — режим с обострением? Наиболее естествен-

ный способ ответа — изучить воздействие граничных режимов с обострением на вещество, распространение тепла в котором описывается классическим (линейным) уравнением теплопроводности. Простой анализ с помощью представления решения в интегральной форме (доступный студенту третьего курса) показал — в эффективном смысле локализация реализуется и в средах с постоянными теплофизическими свойствами, причем, как и в нелинейном случае, в зависимости от темпа роста температуры на границе осуществляется S-, LS- или HS-режим нагрева.

Однако значение этой работы выходит за рамки описанного результата. Сформулированное в ней понятие эффективной локализации тепла существенно расширяет сферу применимости изучаемых эффектов. Например, в дальнейшем было установлено, что они не зависят от начального состояния среды и от ряда деталей поведения ее теплофизических характеристик. Кроме того, в данной статье для анализа временной динамики процесса впервые было применено построение так называемых приближенных автомодельных решений — прием, развитие которого позволило разработать один из весьма конструктивных методов исследования решений квазилинейных параболических уравнений. И, наконец, данная работа стимулировала постановку исследований структур горения в средах с постоянной теплопроводностью. Было установлено, что в подобных средах, в отличие от нелинейных, могут существовать лишь простые структуры. Тем самым справедлив важный вывод: если локализация не связана непосредственно с нелинейностью как таковой, то образование сложных структур и эффекты самоорганизации — явная «прерогатива» нелинейных сред.

А. П. Михайлов

Об одном подходе к сравнению решений параболических уравнений

В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, А. А. Самарский

Предложен метод сравнения решений параболических уравнений второго порядка, основанный на поточечных оценках старшей производной решения через младшие.

§1. Введение.

Для квазилинейного вырождающегося параболического уравнения

$$u_t = \mathcal{L}(u) = [k(u)u_x]_x \quad (1.1)$$

рассматривается в $Q_T = \{(t, x) : 0 < t \leq T, x \in \Omega\}$, $\Omega = \{x : 0 < x < \infty\}$ первая краевая задача с условиями

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad u(t, 0) = u_1(t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2)$$

где $u_0(x)$ и $u_1(t)$ — непрерывные функции своих аргументов, $0 \leq u_1 \leq M < \infty$, $i = 0, 1$, $u_0(0) = u_1(0)$. Функция $k(u)$ определена для $u \geq 0$, $k(u) > 0$ при $u > 0$, $k(0) = 0$.

Уравнение (1.1) описывает, в частности, процесс распространения тепла в среде с коэффициентом теплопроводности $k(u)$, зависящим от температуры среды u .

В [1–5] введено понятие метастабильной локализации тепла и для случая $k(u) = u^\sigma$, $\sigma > 0$, определены условия существования локализации или ее отсутствия в краевых задачах и в задаче Коши для уравнения (1.1). При анализе использовались автомодельные решения, построенные в [6, 7], и теоремы сравнения по краевым условиям [8].

Для нестепенной функции $k(u)$ в классе инвариантно-групповых решений уравнения (1.1) (см. [9]) нет решений, обладающих свойством локализации тепла. Поэтому возникла необходимость найти подход к сравнению решений таких уравнений.

В настоящей работе показано, что решения задач (1.1), (1.2) с различными $k(u)$ можно сравнивать в Q_T , если наложить на коэффициенты некоторые условия сравнения. При этом краевые условия (1.2) должны удовлетворять определенным требованиям, которые обеспечивают выполнение в Q_T поточечной оценки старшей производной одного из решений через младшие. Предложенный метод сравнения решений распространяет эффект локализации тепла на более широкий класс коэффициентов.

В § 2 определяются условия существования специальных поточечных оценок старшей производной (условия критичности краевых данных), в § 3 доказывается теорема сравнения, в § 4 обсуждаются некоторые обобщения предложенного метода сравнения, наконец, в § 5 с помощью теоремы сравнения из § 3 выделяются классы коэффициентов $k(u)$, допускающих в зависимости от вида краевых условий локализацию тепла или ее отсутствие.

Сформулированный подход позволяет сравнивать решения, отвечающие различным параболическим операторам $\mathcal{L}(u)$. В качестве одного из них может быть взят, например, оператор достаточно простого вида, которому соответствуют решения с уже известными свойствами.

Будем предполагать, что функции k, u_0, u_1 удовлетворяют предположениям теоремы существования обобщенного решения задачи (1.1), (1.2) в смысле работы [8]. Введем обозначения: $Q_T^0 = \{(t, x) : (t, x) \in \in Q_T, u(t, x) > 0\}$, где $u(t, x)$ — обобщенное решение задачи, $S_T = \overline{Q_T^0} \setminus Q_T^0$, $P_T = Q_T \setminus S_T$. В работе [8] установлено, что $u(t, x)$ в P_T удовлетворяет уравнению (1.1) в обычном смысле, а в S_T , т. е. в точках вырождения, обобщенное решение может не иметь предписываемой (1.1) гладкости. Обозначим $Q_{t_1, t_2} = \{(t, x) : t_1 \leq t \leq t_2, x \in \Omega\}$, $S_{t_1, t_2} = \{(t, x) : t_1 \leq t \leq t_2, (t, x) \in S_T\}$, $P_{t_1, t_2} = \{(t, x) : t_1 \leq t \leq t_2, (t, x) \in \in P_T\}$, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$.

§ 2. Условия критичности.

Определение. Будем говорить, что в задаче (1.1), (1.2) краевые условия (1.2) являются *критическими*, если всюду в P_T

$$u_t(t, x) \geq 0. \quad (2.1)$$

В дальнейшем условия критичности краевых данных будут использоваться для вывода априорных поточечных оценок старшей производной u_{xx} через младшие u_x, u .

Будем предполагать, что функции k, u_0, u_1 удовлетворяют условиям гладкости, достаточным для почленного дифференцирования уравнения (1.1) по t или x один раз всюду в P_T . Также считаем, что $u_0(x) \in C(\Omega) \cap C^2(P_{0,0})$, $u_1(t) \in C^1([0, T])$. В этих предположениях справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Для критичности условий (1.2) необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathcal{L}(u_0(x)) \geq 0, \quad x \in P_{0,0}, \quad u'_1(t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.2)$$

Доказательство. Необходимость условий леммы очевидна. Докажем достаточность.

2.1. Сделаем несколько предварительных замечаний о свойствах функции $u(t, x)$. Покажем, что функция $u_0(x)$, удовлетворяющая неравенствам (2.2) и ограниченная в Ω , является невозрастающей в Ω .

Сначала установим, что $u_0(x)$ не может иметь в Ω положительного максимума. Действительно, если $u_0(x)$ имеет при некотором $x_m \in \Omega$ положительный максимум и не равна тождественно константе, то существуют такие $x_1, x_2 : x_1 < x_m < x_2$, что $u_0(x) > 0$, $x_1 \leq x \leq x_2$, $u'_0(x_1) > 0$, $u_0(x_2) < 0$. Используя первое неравенство (2.2), получаем $k(u_0(x))u'_0(x)|_{x_1}^2 \geq 0$, что ведет к противоречию.

Предположим, что $u'_0(x_3) > 0$, $u_0(x_3) > 0$ для некоторого $x_3 \in \Omega$. Тогда, в силу предыдущего вывода, $u'_0(x) \geq 0$ при $x > x_3$. Поэтому $\mathcal{L}(u_0)$ определена при всех $x > x_3$ и первое из неравенств (2.2) можно записать в виде

$$\mathcal{L}(u_0(x)) = \alpha(x), \quad x > x_3,$$

где $\alpha(x)$ — неотрицательная и непрерывная при $x > x_3$ функция. Пусть существует $x_4 > x_3$ такое, что $\text{mes } \omega_\varepsilon > 0$ для некоторого $\varepsilon > 0$, где $\omega_\varepsilon = [x : x_3 < x < x_4, \alpha(x) \geq \varepsilon]$. В результате интегрирования предыдущего равенства получим

$$\int_{u_0(x_3)}^{u_0(x)} k(\eta) d\eta = -k(u_0(x_3))u'_0(x_3) + \int_{x_3}^x d\zeta \int_{x_2}^{\zeta} \alpha(\xi) d\xi, \quad x > x_3.$$

Оценивая интеграл в правой части при $x > x_4$, приходим к неравенству

$$\int_{x_3}^x d\zeta \int_{x_3}^{\zeta} \alpha(\xi) d\xi \geq \int_{x_4}^x d\zeta \int_{x_2}^{\zeta} \alpha(\xi) d\xi \geq \varepsilon \text{mes } \omega_\varepsilon (x - x_4),$$

откуда заключаем, что $u_0(x) \rightarrow \infty, x \rightarrow \infty$, что противоречит ограниченности этой функции в Ω . Случай $\alpha(x) \equiv 0, x > x_3$ анализируется аналогично.

Таким образом, установлено, что

$$u'_0(x) \leq 0, \quad x \in P_{0,0}.$$

Отсюда следует, что существует не более одной точки $\xi(0) \in S_{0,0}$ и при любом $0 < t \leq T$ множество $S_{t,t}$ состоит не более чем из одного элемента. Обозначим его $\xi(t)$. Нетрудно видеть, что $S_T = \{(t, x) : 0 < t \leq T, x = \xi(t)\}, P_T = \{(t, x) : 0 < t \leq T, x \in \Omega, x \neq \xi(t)\}$.

Можно показать, что определение обобщенного решения (см. [8]) предусматривает при каждом $0 < t \leq T$ выполнение условия

$$k(u(t, x))u_x(t, x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \xi(t). \quad (2.3)$$

Поэтому для любого $\delta > 0, \delta < \xi(t) \neq 0, 0 < t \leq T$, найдется $x_0(t)$ такое, что

$$\xi(t) - \delta < x_0(t) < \xi(t), \quad u_t(t, x_0(t)) > 0. \quad (2.4)$$

2.2. Обозначим $u_t(t, x)$ через $z(t, x)$. Всюду в P_T функция z удовлетворяет уравнению

$$z_t = [k(u)z]_{xx}.$$

Положим $z(t, x) = Y(t, x)e^{\alpha t}, \alpha > 0$. Функция Y удовлетворяет в P_T уравнению

$$[\alpha - k'(u)u_{xx} - k''(u)(u_x)^2]Y + Y_t = k(u)Y_{xx} + 2k'(u)u_x Y_x. \quad (2.5)$$

Рассмотрим множество N точек σ в интервале $(0, T)$ таких, что $Y(t, x) \geq 0$ при всех $(t, x) \in Q_{0,\sigma}$. Если $\sup \sigma = T$, то лемма доказана. Пусть $\sup \sigma = t_0 < T$. Из определения t_0 следует, что найдутся $t_0 \leq t_1 < T$ и $0 < \delta_1 \leq T - t_1$ такие, что

$$\min_{x \in \Omega} Y(t_1, x) = 0 \quad (2.6)$$

и при всех $t_1 < t < t_1 + \delta_1$ функция $Y(t, x)$ имеет отрицательные значения в Ω .

Следовательно, в силу неравенств (2.2), Y имеет отрицательный минимум по x при всех $t_1 < t < t_1 + \delta_1$. Обозначим точки минимума $(t, \bar{x}(t))$. Тогда $0 < \bar{x}(t) < \xi(t), t_1 < t < t_1 + \delta_1$, поскольку равенство $\bar{x}(t) = \xi(t)$ хотя бы при одном t из заданного интервала противоречит (2.4). Заметим, что величина t_1 выбрана таким образом, чтобы

$$Y(t_1, \bar{x}(t_1)) = 0. \quad (2.7)$$

В силу неограниченности сверху функции $\frac{z_t(t, \bar{x}(t_1))}{z(t, \bar{x}(t))}$ при $t \rightarrow t_1^+$

$$Y_t(\bar{t}, \bar{x}(t)) \leq 0, \quad t_1 < \bar{t} < t_1 + \delta_2 \quad \forall \alpha > 0, \quad 0 < \delta_2 \leq \delta_1. \quad (2.8)$$

Выбирая в (2.7) величину $\alpha > 0$ достаточно большой и учитывая (2.8), приходим к противоречию, $\sup \sigma = T$, лемма доказана.

Если в (2.3) величина $\xi(t) = \infty$, $0 < t \leq T$, то доказательство проводится аналогично.

Следствие. Если функции удовлетворяют условиям критичности (2.2), то, как следует из неравенства (2.1) и структуры оператора \mathcal{L} в (1.1), всюду в P_T выполняется поточечная оценка старшей производной

$$u_{xx} \geq - \left[\frac{k'(u)}{k(u)} \right] (u_x)^2. \quad (2.9)$$

Замечания. 1. В предположениях леммы 1 можно таким же способом доказать, что

$$u_x(t, x) \leq 0, \quad (t, x) \in P_T. \quad (2.10)$$

2. Неравенства (2.1), (2.10) для случая $u_0(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$, получены в [10] другим способом.

§ 3. Теорема сравнения.

Рассмотрим в Q_T для уравнений

$$u_t^{(\nu)} = \mathcal{L}^{(\nu)}(u^{(\nu)}) = [k^{(\nu)}(u^{(\nu)})u_x^{(\nu)}]_x, \quad \nu = 1, 2, \quad (3.1)$$

краевые задачи с условиями

$$\begin{aligned} u^{(\nu)}(0, x) = u_0^{(\nu)}(x), \quad x \in \Omega, \quad u^{(\nu)}(t, 0) = u_1^{(\nu)}(t), \\ 0 \leq t \leq T, \quad \nu = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Определим условия на операторы $\mathcal{L}^{(1)}$ и $\mathcal{L}^{(2)}$ в (3.1) и краевые данные (3.2), которые обеспечивают в $\overline{Q_T}$ сравнение решений задач (3.1), (3.2), $\nu = 1, 2$, т. е. мажорирование в $\overline{Q_T}$ решения задачи (3.1), (3.2) при $\nu = 1$ другим решением, соответствующим $\nu = 2$. Для определения этих условий используем поточечные оценки старшей производной решения, соответствующего $\nu = 2$, и (см. § 2) считаем, что $u_0^{(2)}(x) \in C(\Omega) \cap C^2(P_{0,0}^{(2)})$, $u_1^{(2)}(t) \in C^1([0, T])$ и $u^{(2)}(t, x) \in C^{2,4}(P_T^{(2)})$. Кроме того, пусть $u_0^{(1)}(x) \in C(\Omega)$, $u_1^{(1)}(t) \in C([0, T])$, $u^{(1)}(t, x) \in C^{1,2}(P_T^{(1)})$ и $0 \leq u_i^{(\nu)} \leq M$, $i = 0, 1$, $\nu = 1, 2$.

Теорема 1. Пусть выполняются предположения:

- 1) $u_0^{(2)}(x) \geq u_0^{(1)}(x)$, $x \in \Omega$, $u_1^{(2)}(t) \geq u_1^{(1)}(t)$, $0 \leq t \leq T$,
- 2) $k^{(2)}(u) \geq k^{(1)}(u)$, $[k^{(2)}(u)/k^{(1)}(u)]' \geq 0$, $0 < u \leq M$,
- 3) условия (3.2) при $\nu = 2$ являются критическими.

Тогда всюду в $\overline{Q_T}$ справедливо неравенство

$$u^{(2)}(t, x) \geq u^{(1)}(t, x). \quad (3.3)$$

Доказательство. 1. Рассмотрим множество N точек σ в интервале $(0, T)$ таких, что $u^{(2)}(t, x) \geq u^{(1)}(t, x)$ при всех $(t, x) \in Q_{0, \sigma}$. Предположим, что $\sup \sigma = t_0 < T$.

Пусть $\tilde{u}(t, x)$, $(t, x) \in Q_{t_0, T}$ — решение уравнения (3.2) при $\nu = 1$ с условиями

$$\tilde{u}(t_0, x) = u^{(2)}(t_0, x), \quad x \in \Omega, \quad \tilde{u}(t, 0) = u_1^{(2)}(t), \quad t_0 \leq t \leq T.$$

Из теоремы сравнения по крайевым данным (см. [8]) следует, что

$$u^{(1)}(t, x) \leq \tilde{u}(t, x), \quad (t, x) \in Q_{t_0, T}. \quad (3.4)$$

2. Обозначим $z(t, x) = u^{(2)}(t, x) - \tilde{u}(t, x)$ и $z = Ye^{\alpha t}$, $\alpha > 0$. Функция $Y(t, x)$ всюду в $\tilde{P}_{t_0, T}^{(2)} = Q_{t_0, T} \setminus S_{t_0, T}^{(2)} \setminus \tilde{S}_{t_0, T}$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \alpha Y + Y_t = k^{(1)}(\tilde{u})Y_{xx} + \\ + \left\{ u_{xx}^{(2)} \left[k^{(2)}(u^{(2)}) - k^{(1)}(\tilde{u}) \right] + \left(u_x^{(2)} \right)^2 \left[k^{(2)'}(u^{(2)}) - k^{(1)'}(\tilde{u}) \right] \right\} e^{-\alpha t} - \\ - k^{(1)'}(\tilde{u})(Y_x)^2 e^{\alpha t} + 2k^{(1)'}(\tilde{u})Y_x u_x^{(2)}. \quad (3.5) \end{aligned}$$

Из (2.6) и из определения t_1 получаем (2.7).

3. Существуют три возможности.

а. Пусть найдется $\delta_1 > 0$, $\delta_1 \leq \delta$ такое, что $(t, \bar{x}(t)) \in P_{t_1, t_2 + \delta_1}^{(2)}$. Тогда уравнение (3.5) в точках $(t, \bar{x}(t))$, $t_1 < t < t_1 + \delta_1$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left[\alpha + k^{(1)'}(\theta_1)u_{xx}^{(2)} + k^{(1)''}(\theta_2)(u_x^{(2)})^2 \right] Y + Y_t = \\ = k^{(1)}(\tilde{u})Y_{xx} + \left\{ u_{xx}^{(2)} \left[k^{(2)}(u^{(2)}) - k^{(1)}(u^{(2)}) \right] + \right. \\ \left. + (u_x^{(2)})^2 \left[k^{(2)'}(u^{(2)}) - k^{(1)'}(u^{(2)}) \right] \right\} e^{-\alpha t}, \quad (3.6) \end{aligned}$$

где θ_1, θ_2 — некоторые функции переменной t , причем $\theta_1, \theta_2 \in [u^{(2)}(t, \bar{x}(t)), \tilde{u}(t, \bar{x}(t))]$. Так же как при доказательстве леммы 1, можно установить справедливость (2.8). Тогда, выбирая α в (3.6) достаточно большим, придем к противоречию. Действительно, в соответствующим образом подобранной точке $(\bar{t}, \bar{x}(\bar{t}))$ левая часть (3.6) отрицательна. Правая же часть, в силу условий 1) и 2) теоремы, неотрицательна, что обеспечивается поточечной оценкой (2.9) второй производной функции $u^{(2)}(t, x)$ в точке $(\bar{t}, \bar{x}(\bar{t})) \in P_{t_1, t_1 + \delta_2}^{(2)}$.

б. Пусть теперь $(t, \bar{x}(t)) \in S_{t_1, t_1 + \delta_2}^{(2)}$ для некоторого $\delta_3 > 0$, $\delta_3 \leq \delta$. Тогда функция Y может не иметь в точках минимума всех производных, входящих в (3.6).

Для функции $z(t, x)$ получаем в $Q_{t_1, t_1 + \delta_3}$ задачу

$$\begin{aligned} z_t &= \left[k^{(2)}(u^{(2)})u_x^{(2)} \right]_x - \left[k^{(1)}(\tilde{u})\tilde{u}_x \right]_x, \\ z(t_1, x) &= 0, \quad x \in \Omega, \quad z(t, 0) = 0, \quad t_1 \leq t \leq t_1 + \delta_3. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Поскольку $(t, \bar{x}(t)) \in S_{t_1, t_1 + \delta_3}^{(2)}$, то для любого $t_1 < t < t_1 + \delta_3$ найдется точка $0 \leq \xi(t) < \bar{x}(t)$ такая, что $z(t, \xi(t)) = 0$. Тогда

$$\int_{\xi(t)}^{\infty} z(t, \eta) d\eta > 0, \quad t_1 < t < t_1 + \delta_3. \quad (3.8)$$

Учитывая, что $z_x(t, \xi(t)) \leq 0$, а также первое из условий 2), и интегрируя (3.7) по множеству $(t_1 < t < t_1 + \delta_2) \times (\xi(t) < x < \infty)$, приходим к противоречию с (3.8).

в. Если для любого $\delta_4 > 0$, $\delta_4 \leq \delta$ найдутся точки минимума $(t, \bar{x}(t))$, принадлежащие как $P_{t_1, t_1 + \delta_4}^{(2)}$, так и $S_{t_1, t_1 + \delta_4}^{(2)}$, то доказательство можно провести либо как в пункте а), либо как в пункте б).

Таким образом, всюду в $Q_{t_0, T}$ выполнено неравенство $u^{(2)}(t, x) \geq \tilde{u}(t, x)$. Отсюда и из (3.4) следует (3.3), $\sup \sigma = T$. Теорема доказана.

Замечание 3. Условия 2) теоремы 1 эквивалентны следующим:

$$k^{(1)}(u) \geq k^{(2)}(u)[1 + \lambda(u)]^{-1}, \quad 0 \leq u \leq M,$$

где $\lambda(u) \geq 0$, $\lambda'(u) \geq 0$, $0 < u \leq M$.

§ 4. Некоторые обобщения.

4.1. При доказательстве утверждений § 2, 3 использовались фактически только предположения о параболичности и достаточной гладкости операторов \mathcal{L} и $\mathcal{L}^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2$. Поэтому сформулированный подход к сравнению решений справедлив для параболических уравнений общего вида

$$u_t = \mathcal{L}(u) = L(u, u_x, u_{xx}). \quad (4.1)$$

Рассмотрим в Q_T первую краевую задачу для уравнения (4.1) с условиями (1.2). Будем предполагать, что решение задачи существует, причем

$$\sup_{(t, x) \in Q_T} u(t, x) \leq M_1 < \infty \text{ и } u(t, x) \in C^{2,4}(Q_T)$$

[11–13]. Будем также считать, что функция $L(p, q, r)$ при $0 < p \leq M_1$, $-\infty < q < \infty$, $-\infty < r < \infty$ дифференцируема, так что функция $L_{(3)}^{-1}(p, q)$, однозначно определяемая в силу параболичности оператора \mathcal{L} в (4.1) из уравнения

$$L(p, q, L_{(3)}^{-1}(p, q)) = 0, \quad 0 < p < M_1, \quad -\infty < q < \infty,$$

также дифференцируема.

Критичность краевых условий задачи (4.1), (1.2) определим так же, как в § 2. Пусть $u_0(x) \in C^2(\Omega)$, $u_1(t) \in C^1[(0, T)]$. В этих предположениях справедливо следующее утверждение, которое доказывается аналогично лемме 1.

Лемма 2. Для критичности краевых условий (1.2) задачи (4.1), (1.2) необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathcal{L}(u_0(x)) \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad u_1'(t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Следствие. В предположениях леммы, всюду в Q_T выполнена поточечная оценка старшей производной

$$u_{xx} \geq L_{(3)}^{-1}(u, u_x). \quad (4.2)$$

В лемме 2 фактически сформулировано следующее утверждение: если $u_t(t, x) \geq 0$ при $(t, x) \in \Gamma_T = \{(t, x) : t = 0, x \in \Omega\} \cup \{(t, x) : 0 < t \leq T, x = 0\}$, где Γ_T — граница Q_T , то $u_t(t, x) \geq 0$ при всех $(t, x) \in \overline{Q}_T$. Это утверждение справедливо для всех операторов в (4.1), не содержащих переменной t (в противном случае оператор должен удовлетворять дополнительному условию).

4.2. Рассмотрим в Q_T две краевые задачи для равномерно параболических уравнений

$$u_t^{(\nu)} = \mathcal{L}^{(\nu)}(u^{(\nu)}) = L^{(\nu)}\left(u^{(\nu)}, u_x^{(\nu)}, u_{xx}^{(\nu)}\right), \quad \nu = 1, 2, \quad (4.3)$$

с краевыми условиями (3.2). Пусть $u^{(1)}(t, x) \in C^{(1,2)}(Q_T)$, $u^{(2)}(t, x) \in C^{(2,4)}(Q_T)$,

$$\max \left\{ \sup_{(t,x) \in Q_T} u^{(1)}(t, x), \quad \sup_{(t,x) \in Q_T} u^{(2)}(t, x) \right\} = M.$$

Пусть, кроме того, функции $L^{(\nu)}(p, q, r)$ дифференцируемы по всем аргументам при $0 < p \leq M$, $-\infty < q < \infty$, $-\infty < r < \infty$, $\nu = 1, 2$.

Теорема 2. Пусть выполняются предположения 1) и 3) теоремы 1, а также

$$\begin{aligned} L_3^{(2)}(p, q, r) - L_3^{(1)}(p, q, r) &\geq 0, \\ L^{(1)}\left(p, q, L_{(3)}^{(2)-1}(p, q, r)\right) &\leq 0, \\ 0 < p \leq M, \quad -\infty < q < \infty \end{aligned} \quad (4.4)$$

(здесь $L_3^{(\nu)} = \partial L^{(\nu)} / \partial r$). Тогда всюду в Q_T выполняется неравенство (3.3).

Теорема 2 доказывается таким же образом, что и теорема 1. При этом используется оценка старшей производной (4.2) решения $u^{(2)}(t, x)$.

4.3. Покажем, какой вид принимают условия (4.4) для некоторых конкретных операторов $\mathcal{L}^{(\nu)}$.

а. Пусть $\mathcal{L}^{(\nu)}(v^{(\nu)}) = \varphi^{(\nu)}(v^{(\nu)})v_{xx}^{(\nu)}$, причем $\varphi^{(\nu)}(v^{(\nu)}) > 0$, $v^{(\nu)} > 0$, $\nu = 1, 2$. Неравенства (4.4) сводятся к условию

$$\varphi^{(2)}(p) \geq \varphi^{(1)}(p), \quad 0 < p \leq M. \quad (4.5)$$

Уравнения (4.1) в этом случае описывают процесс распространения тепла в среде с постоянным коэффициентом теплопроводности и с теплоемкостью $c(v) = 1/\varphi(v)$, зависящей от температуры v , поэтому условие сравнения (4.5) имеет простой физический смысл.

Заметим, что уравнения (3.1) можно привести к указанному виду заменой

$$u^{(\nu)} = V^{(\nu)-1}(v^{(\nu)}), \quad V^{(\nu)}(u^{(\nu)}) = \int_0^{u^{(\nu)}} k^{(\nu)}(\eta) d\eta,$$

где $V^{(\nu)-1}$ — функции, обратные к $V^{(\nu)}$. При этом

$$\varphi^{(\nu)}(v^{(\nu)}) = k^{(\nu)}(V^{(\nu)-1}(v^{(\nu)})), \quad \nu = 1, 2.$$

По сравнению с условиями 2) теоремы 1, условие (4.3) выглядит существенно проще и не содержит дифференциальных связей на функции, в него входящие.

б. Пусть $\mathcal{L}^{(\nu)}(u^{(\nu)}) = [k^{(\nu)}(u^{(\nu)})u_x^{(\nu)}]_x + Q^{(\nu)}(u^{(\nu)})$, $k^{(\nu)}(u^{(\nu)}) > 0$, $u^{(\nu)} > 0$, $\nu = 1, 2$. Этот пример важен, в частности, для изучения вопросов, рассматривавшихся в [14–19]. В этом случае уравнения (4.1) описывают процессы распространения тепла и горения в среде с нелинейной теплопроводностью и объемным выделением тепла ($Q(u)$ — мощность объемных источников энергии).

Неравенства (4.4) за счет независимости измерения p и q во втором из них распадаются на три условия:

$$\begin{aligned} k^{(2)}(p) &\geq k^{(1)}(p), \\ k^{(1)}(p)k^{(2)'}(p) &\geq k^{(1)'}(p)k^{(2)}(p), \\ Q^{(2)}(p)k^{(1)}(p) &\geq Q^{(1)}(p)k^{(2)}(p), \quad 0 < p \leq M. \end{aligned}$$

4.4. Сформулированный метод сравнения решений, возможности которого были продемонстрированы на примере первой краевой задачи в неограниченной области, применим для задач в ограниченных областях, а также для задачи Коши. Кроме того, полученные результаты можно перенести на указанные типы задач в многомерных областях для параболических уравнений с выделенным лапласианом:

$$u_t = \mathcal{L}(u) = L(u, u_{x_1}, \dots, u_{x_N}, \Delta u), \quad \delta u = \sum_{j=1}^N u_{x_j x_j}.$$

§ 5. Метастабильная локализация тепла. В этом параграфе доказанные теоремы сравнения применяются для изучения эффекта метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью.

5.1. Пусть задача (1.1), (1.2) рассматривается в $Q_T^1 = \{(t, x) : 0 < t < T, x \in \Omega\}$ и пусть $u_1(t)$ такова, что

$$u_1(t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow T. \quad (5.1)$$

Определение. Следуя [1–5], будем говорить, что в задаче (1.1), (1.2), (5.1) имеет место *метастабильная локализация тепла*, если найдется $x_0 < \infty$ такая, что $\text{mes sup} u(t, x) \leq x_0$, $0 < t < T$. В противном случае метастабильная локализация тепла отсутствует.

Таким образом, если в задаче (1.1), (1.2), (5.1) существует локализация тепла, то возмущения, несмотря на неограниченный рост температуры в точке $x = 0$, не распространяются далее конечной области.

5.2. Рассмотрим в $Q_T^2 = \{(t, x) : 0 < t < T, x \in \Omega_2\}$, $\Omega_2 = \{x : -\infty < x < \infty\}$ задачу Коши для уравнения (1.1) с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega_2. \quad (5.2)$$

Определение. В задаче (1.1), (5.2) имеет место метастабильная локализация тепла, если

$$\text{supp} u(t, x) = \text{supp} u_0(x), \quad 0 < t < t^*.$$

Локализация тепла в задаче Коши означает, что область с отличной от нуля температурой не меняется в течение конечного времени.

5.3. Теорема 3. Пусть в задаче (1.1), (1.2), (5.1)

$$\begin{aligned} u_0(x) &\leq T^n(1 - x/x_0)^{2/\sigma}, \quad x_0 = [2(\sigma + 2)/\sigma]^{1/2} T^{(1+n\sigma)/2}, \quad x \leq x_0, \\ u_0(x) &= 0, \quad x > x_0 \end{aligned}$$

(здесь σ, n — некоторые постоянные величины, $\sigma > 0, n < 0, 1 + n\sigma \geq 0$),

$$\begin{aligned} u_1(t) &\leq (T - t)^n, \quad 0 \leq t < T, \\ k(u) &= u^\sigma [1 + \lambda(u)]^{-1}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\lambda(u) \geq 0, \quad \lambda'(u) \geq 0, \quad 0 < u < \infty.$$

Тогда в ней имеет место метастабильная локализация тепла, причем

$$\begin{aligned} \text{mes sup} u(t, x) &\leq x_0, \quad 0 < t < T, \\ u(t, x) &\leq T^{(1+n\sigma)/\sigma} (T - t)^{-1/\sigma} (1 - x/x_0)^{2/\sigma}, \\ &0 < t < T, \quad x \leq x_0, \\ u(t, x) &= 0, \quad 0 < t < T, \quad x > x_0. \end{aligned}$$

Теорема 4. Пусть в задаче (1.1), (1.2), (5.1)

$$u_1(t) \geq (T-t)^n, \quad 0 \leq t < T, \quad n < 0,$$

$$k(u) = u^\sigma [1 + \lambda(u)]^{-1}, \quad \lambda(u) \geq 0, \quad \lambda'(u) \geq 0, \quad 0 < u < \infty$$

(здесь $\sigma > 0$, $1 + n\sigma < 0$). Тогда в ней отсутствует локализация тепла. Более того, для любого $x \in \Omega$

$$u(t, x) \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T.$$

Теорема 5. Пусть в задаче (1.1), (5.2),

$$0 < u_0(x) \leq u_m(1 - |x|/x_m)^{2/\sigma},$$

$$|x| < x_m, \quad u_0(x) = 0, \quad |x| \geq x_m$$

(здесь u_m, x_m, σ — некоторые положительные константы) и выполняется (5.3). Тогда в ней имеет место метастабильная локализация тепла, причем

$$\text{supp } u(t, x) = \text{supp } u_0(x), \quad 0 < t < t^*,$$

$$0 < u(t, x) \leq [x_m^2 \sigma / 2(\sigma + 2)]^{1/\sigma} (t^* - t)^{-1/\sigma} (1 - |x|/x_m)^{2/\sigma},$$

$$0 < t < t^*, \quad |x| < x_m,$$

$$u(t, x) = 0, \quad 0 < t < t^*, \quad |x| \geq x_m,$$

где $t^* = x_m^2 \sigma / 2u_m^\sigma (\sigma + 2)$.

Утверждения теорем 3–5 доказаны в [5] при $\lambda(u) = 0$, $0 < u < \infty$. Если $\lambda(u) \neq 0$, то справедливость теорем следует из теоремы 1 и замечания 1 к ней.

Аналогично формулируются достаточные условия локализации в многомерных областях. При этом используются результаты работ [1, 4].

Авторы благодарны А. А. Арсеньеву за полезные обсуждения.

Журнал вычислительной математики.
и математической физики. 1979. Т. 19, № 6

Поступила
20.02.1979

Список литературы

1. Самарский А. А. и др. Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью // ДАН СССР. — 1975. — Т. 223, № 6. — С. 1344–1347.
2. Курдюмов С. П. Нелинейные процессы в плотной плазме // Сб. докл. на I Междунар. конф. по теории плазмы (Киев, 1974). — Киев: Наукова думка, 1976. — С. 278.
3. Змитренко Н. В. и др. Метастабильная локализация тепла в среде с нелинейной теплопроводностью и условия ее проявления в эксперименте // Препринт ИПМ АН СССР. — 1977. — № 103.

4. Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Плехотников К. Э. Локализация тепла в многомерных задачах нелинейной теплопроводности. Тепловой кристалл // Препринт ИПМ АН СССР. — 1977. — № 22.
5. Михайлов А. П. Метастабильная локализация тепловых возмущений в среде с нелинейной теплопроводностью // Препринт ИПМ АН СССР. — 1977. — № 64.
6. Самарский А. А., Соболев И. М. Примеры численного расчета температурных волн // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 1963. — Т. 3, № 4. — С. 703–719.
7. Галактионов В. А., Михайлов А. П. Об одной автомодельной задаче для уравнения нелинейной теплопроводности // Препринт ИПМ АН СССР. — 1977. — № 53.
8. Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1958. — Т. 22, № 5. — С. 667–704.
9. Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности // ДАН СССР. — 1959. — Т. 125, № 3. — С. 492–495.
10. Лихт М. К. О распространении возмущений в задачах, связанных с вырождающимися квазилинейными уравнениями параболического типа // Дифференц. уравнения. — 1969. — Т. 2, № 7. — С. 953–957.
11. Олейник О. А., Кружков С. Н. Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными // УМН. — 1961. — Т. 16, № 5. — С. 115–155.
12. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
13. Фридман А. Уравнения в частных производных параболического типа. — М.: Мир, 1968.
14. Самарский А. А. и др. Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла // ДАН СССР. — 1976. — Т. 227, № 2. — С. 321–324.
15. Самарский А. А. и др. Горение нелинейной среды в виде сложных структур // ДАН СССР. — 1977. — Т. 237, № 6. — С. 1330–1333.
16. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. N - и S -режимы сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением // Прикл. механика и техн. физика. — 1977. — № 1. — С. 3–23.
17. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П. Условия усложнения организации нелинейной диссипативной среды // Препринт ИПМ АН СССР. — 1977. — № 106.
18. Самарский А. А. Численные методы в физике плазмы // Препринт ИПМ АН СССР. — 1977. — № 107.
19. Курдюмов С. П. и др. Взаимодействие тепловых структур // Препринт ИПМ АН СССР. — 1978. — № 77.

Замысел данной работы возник в ответ на необходимость изучения эффектов локализации тепла и образования структур в средах с произвольными теплофизическими характеристиками. Обычные (классические) теоремы сравнения решений параболиче-

ских уравнений по краевым условиям позволяют получить достаточно полную теорию лишь в специальных случаях, например, для обладающих богатыми групповыми свойствами уравнений с нелинейностями степенного типа. В работе впервые сформулированы теоремы сравнения решений «по коэффициентам» уравнений, что дало возможность сравнивать решения хорошо изученных «эталонных» уравнений с решениями гораздо более сложных уравнений (например, линейных и нелинейных).

В дальнейших исследованиях на основе развитого подхода была получена замкнутая теория локализации для сред с произвольными нелинейностями, даны конструктивные критерии ее наличия или отсутствия, конкретные оценки решений снизу и сверху и т.д. Подобная пространственно-временная классификация решений, по-видимому, не имеет аналогов в теории квазилинейных параболических уравнений. В последующих исследованиях, идейно опирающихся на данную работу, были развиты также обобщения теорем сравнения решений (теоремы сравнения «по пересечениям»), что позволило получить ряд строгих и весьма общих результатов в теории структур горения в нелинейных средах.

А. П. Михайлов

Об одном способе качественного исследования одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности с нелинейным источником тепла

Г. Г. Еленин, К. Э. Плохотников

Предлагается некоторый способ качественного исследования решений задачи Коши для одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности с нелинейным источником тепла. Коэффициент теплопроводности и источник тепла являются степенными функциями температуры.

Введение. В работах [1–6] изучались особенности проведения решений квазилинейного уравнения теплопроводности с объемным источником тепла. Коэффициент теплопроводности K и источник тепла Q являлись степенными функциями температуры $K = K_0 T^\sigma$, $Q = Q_0 T^l$, $K_0 > 0$, $\sigma > 0$, $Q_0 > 0$, $l > 1$; $K_0, Q_0, \sigma, l = \text{const}$.

Было установлено, что при $l > 1$ решение задачи Коши существует конечное время t_f . При $t \rightarrow t_f$ температура в некоторой области пространства неограниченно возрастает. Такие решения называются обостряющимися.

В работе [2] установлены три типа режимов работы источника, которые приводят к решениям, качественно отличающимся друг от

друга. Это LS-режим ($l > \sigma + 1$), S-режим ($l = \sigma + 1$), HS-режим ($1 < l < \sigma + 1$). Каждый из режимов характеризуется изменением «ширины» области интенсивного нагрева. В HS-режиме при неограниченном росте температуры область интенсивного нагрева расширяется. В S-режиме нагрев происходит на фундаментальной длине. В LS-режиме область интенсивного нагрева сужается с ростом температуры.

В данной работе предлагается некоторый способ качественного исследования решений задачи Коши для квазилинейного уравнения теплопроводности с нелинейным источником тепла. Этот метод позволяет определить качественные особенности зависимости максимальной температуры от времени, а также определить зависимость «ширины» области локализации интенсивного нагрева от величины максимальной температуры. Метод основан на возможности представления решения задачи от двух функций времени. Одна из функций имеет смысл максимальной температуры, другая описывает изменение области интенсивного нагрева. Такое представление решения задачи удовлетворяет системе двух интегральных уравнений, полученных усреднением по пространству исходного уравнения теплопроводности с некоторыми весами.

С помощью данного метода установлены следующие особенности решений задачи Коши для центральносимметричных начальных данных с одним максимумом температуры:

1) для любых начальных распределений температуры при $1 < l < \sigma + 3$ нагрев происходит в режиме с обострением;

2) при $1 < l < \sigma + 1$ для любых начальных данных устанавливается автомодельная волна HS-режима с обострением. Если при заданной максимальной температуре начального возмущения его полуширина меньше автомодельной, то на начальной стадии нагрева имеет место режим падения максимальной температуры. Если полуширина больше автомодельной, то на начальной стадии процесса нагрева происходит сокращение полуширины;

3) при $\sigma + 1 < l < \sigma + 3$ для любых начальных данных образуется тепловая структура LS-режима с обострением и сокращающейся полушириной;

4) при $l > \sigma + 3$ существуют два класса начальных данных. Начальным данным из одного класса соответствуют затухающие тепловые волны HS-режима без обострения. Начальным данным из другого класса соответствуют обостряющиеся тепловые структуры. Границей двух классов начальных данных является автомодельное решение HS-режима без обострения.

Численный расчет задачи Коши для исходного уравнения теплопроводности показал эффективность данного метода качественного исследования.

Данный метод может быть также использован для анализа решений краевой задачи.

1. Вывод модельных уравнений. Рассмотрим квазилинейное одномерное уравнение теплопроводности с источником тепла:

$$T = (K(T)T_x)_x + Q(T), \quad (1)$$

где T — температура; $K = K_0 T^\sigma$ ($K_0 > 0, \sigma > 0$) — коэффициент теплопроводности; $Q = Q_0 T^l$ ($Q_0 > 0, l > 0$) — объемный источник тепла.

Проинтегрируем уравнение (1) по пространственной переменной x , предполагая, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} T^\alpha(t, x) dx$ имеет смысл для $\forall \alpha \geq 1$ и тепловой поток $w(t, x) = -K_0 T^\sigma T_x$ на бесконечности обращается в ноль:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} T(t, x) dx = Q_0 \int_{-\infty}^{+\infty} T^l(t, x) dx. \quad (2)$$

Энергия температурного распределения определяется по формуле:

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(t, x) dx.$$

Следовательно, (2) описывает изменение энергии в зависимости от работы объемного источника тепла.

Умножим уравнение (1) на искомую функцию $T(x, t)$ и проинтегрируем полученное уравнение по пространственной переменной x

$$0,5 \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} T^2 dx + K_0 \int_{-\infty}^{+\infty} T^\sigma (T_x)^2 dx = Q_0 \int_{-\infty}^{+\infty} T^{l+1} dx. \quad (3)$$

Будем искать решение системы (2), (3) в виде:

$$T(x, t) = g(t)f(\xi), \quad \xi = x/\varphi(t), \quad (4)$$

где $f(\xi)$ — произвольная непрерывная функция, для которой имеет смысл интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f^\alpha(\xi) d\xi$ при $\forall \alpha \geq 1$, а $g(t)$ и $\varphi(t)$ — пока неизвестные функции времени.

Подставив (4) в систему уравнений (2), (3), получим:

$$\begin{aligned} \dot{g} &= Q_0(c-a)g^l - bK_0g^{\sigma+1}\varphi^{-2}, \\ \dot{\varphi} &= -Q_0(c-2a)g^{l-1}\varphi + bK_0g^\sigma\varphi^{-1}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 b &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f^\sigma (f')^2 d\xi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 d\xi \right)^{-1}, \\
 a &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f^l d\xi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f d\xi \right)^{-1}, \\
 c &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f^{l+1} d\xi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 d\xi \right)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Система (5) описывает изменение амплитуды g температурного распределения как функцию времени и некоторой величины $\varphi(t)$. В качестве φ будем брать либо координату фронта тепловой волны, либо координату точки, в которой температура в два раза меньше максимальной температуры (координата полуширины).

Поделив первое уравнение системы (5) на второе, получим одно уравнение первого порядка, которое описывает фазовые траектории в плоскости (φ, g)

$$\begin{aligned}
 \frac{dg}{d\varphi} &= -\frac{g \nu_1 g^{l-\sigma-1} \varphi^2 - 1}{\varphi \nu_2 g^{l-\sigma-1} \varphi^2 - 1}, \\
 \nu_1 &= Q_0 K_0^{-1} (c - a) b^{-1}, \\
 \nu_2 &= Q_0 K_0^{-1} (c - 2a) b^{-1}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

2. S-режим ($l = \sigma + 1$).

В случае S-режима уравнение (7) имеет вид

$$\frac{dg}{d\varphi} = -\frac{g \nu_1 \varphi^2 - 1}{\varphi \nu_2 \varphi^2 - 1}, \tag{8}$$

общее решение которого

$$g = K \varphi^{-1} \left| \varphi^2 - b K_0 Q_0^{-1} (c - 2a)^{-1} \right|^{-0,5a(c-2a)^{-1}}, \quad K - \text{const} > 0. \tag{9}$$

Решения (9) являются обостряющимися $-g \rightarrow \infty, \varphi \rightarrow \left(\frac{b}{c-2a} \frac{K_0}{Q_0} \right)^{1/2}$ при выполнении неравенства (10):

$$C > 2a. \tag{10}$$

Неравенство (10), как будет показано ниже, выполняется при $\sigma > 0$.

На рис. 1 приведен фазовый портрет S-режима при условии (10).

Линия $\varphi = (b K_0 Q_0^{-1} (c - a)^{-1})^{1/2}$ является «нулевой» изоклиной (линия, на которой $\frac{dg}{d\varphi} = 0$); линия $\varphi = (b K_0 Q_0^{-1} (c - 2a)^{-1})^{1/2}$ является «бесконечной» изоклиной (линия, на которой $\frac{d\varphi}{dg} = 0$), которая в свою очередь является сепаратрисой особой точки $(\nu_2^{-1/2}, 0)$ уравнения (8).

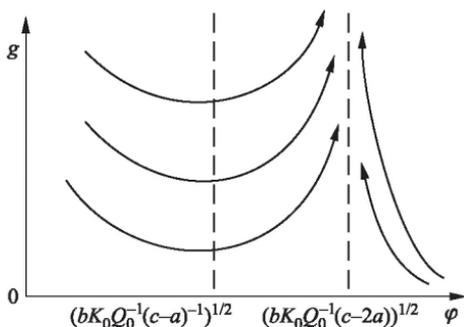


Рис. 1

В [3] найдено аналитическое решение уравнения (1) при $l = \sigma + 1$:

$$T(x,t) = \begin{cases} (Q_0(t_f - t))^{-1/\sigma} \left[2(\sigma+1)\sigma^{-1}(\sigma+2)^{-1} \cos(0,5\pi x x_f^{-1}) \right], & |x| \leq x_f, \\ 0, & |x| > x_f, \end{cases} \quad (11)$$

$$0 \leq t < t_f, \quad x_f = \pi K_0^{1/2} (\sigma+1)^{1/2} \sigma^{-1} Q_0^{-1},$$

где t_f — время фокусировки.

Учитывая (4), возьмем в качестве

$$f(z) = \begin{cases} \cos(0,5\pi z), & |z| \leq 1, \\ 0, & |z| > 1, \end{cases} \quad (12)$$

что соответствует выбору

$$g(t) = (2(\sigma+1)\sigma^{-1}(\sigma+2)^{-1})^{1/\sigma} (Q_0(t_f - t))^{-1/\sigma}, \quad (13)$$

$$\varphi = x_f - \text{const.}$$

Подставляя (12) в (6), находим

$$a = 0,5(\sigma+2)(\sigma+1)^{-1}, \quad b = \pi^2 \sigma^{-1} (\sigma+2)^{-1}, \quad (14)$$

$$c = (\sigma+4)(\sigma+2)^{-1}.$$

Из (14) следует, что условие (10) выполняется при $\sigma > 0$.

Подставляя (13) и (14) в уравнение (8), получим тождество. Следовательно, модель точно учитывает аналитическое решение (11). На рисунках 2, а и 2, б модели соответствует сплошная линия, построенная в соответствии с (9), (14) при $\varphi = 0,4$ и $g_0 = 0,92$. Под g мы понимаем максимум температуры, а под φ — фронт температурного распределения, если начальное распределение таково, что $\varphi_0 \leq x_f$. Темными точками обозначены фазовые точки, полученные счетом уравнения (1) в частных производных при начальном распределении ($t_f = 1, \varphi = 0,4$;

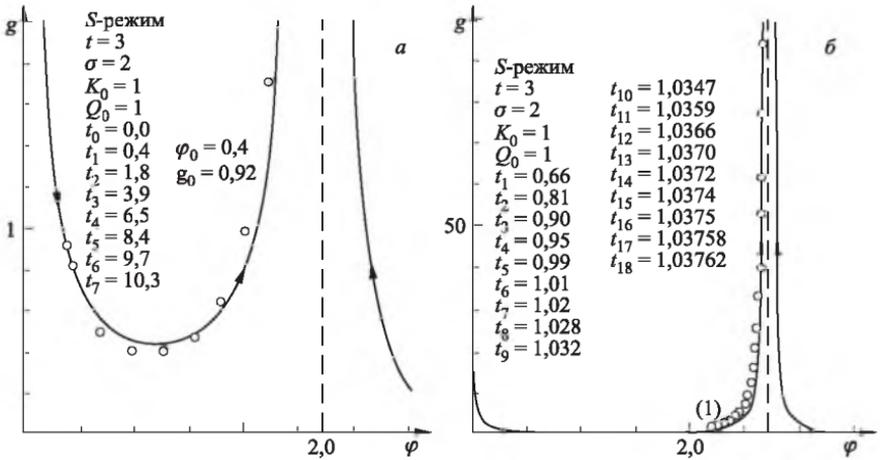


Рис. 2

см. (11)):

$$T(x, 0') = \begin{cases} (Q_0^{-1/\sigma} (2(\sigma+1)\sigma^{-1}(\sigma+2)^{-1} \cos^2(0,5\pi x \varphi_0^{-1}))), & |x| \leq \varphi_0, \\ 0, & |x| > \varphi_0. \end{cases} \quad (15)$$

Если начальное распределение (15) таково, что $\varphi_0 > x_f$, то под φ уже нельзя понимать координату фронта температурного распределения. В этом случае φ описывает движение координаты полуширины.

3. HS- и LS-режимы ($l \neq \sigma + 1$).

Общее решение уравнения (7) при $l \neq \sigma + 1$, $\sigma + 3$ имеет вид

$$(g\varphi)^{-(l-\sigma-1)(l-\sigma-3)^{-1}} |g^{l-\sigma-1}\varphi^2 - B|^\alpha = K - \text{const} > 0, \quad (16)$$

$$B = bK_0 a^{-1} Q_0^{-1} (ca^{-1} - (l - \sigma - 5)(l - \sigma - 3)^{-1})^{-1},$$

$$\alpha = (l - \sigma - 1)(l - \sigma - 3)^{-1} (ca^{-1} - (l - \sigma - 5)(l - \sigma - 3)^{-1})^{-1},$$

при $l = \sigma + 3$

$$g^{-(c-2a)a^{-1}} \exp(-0,5ba^{-1}\varphi^{-2}g^{-2}) = K\varphi^{(c-a)a^{-1}}, \quad (17)$$

$$K - \text{const} > 0.$$

Уравнение (7) при $l \neq \sigma + 1$ имеет три особые линии: «нулевую» изоклину $g_0(\varphi) = \nu_1^{-(l-\sigma-1)^{-1}} \varphi^{-2(l-\sigma-1)^{-1}}$, «бесконечную» изоклину $g_\infty(\varphi) = \nu_2^{-(l-\sigma-1)^{-1}} \varphi^{-2(l-\sigma-1)^{-1}}$ и сепаратрису (см. (16)) $g_*(\varphi) = ((-l + \sigma + 3)(2\nu_2 - (l - \sigma - 1)\nu_1)^{-2})^{(l-\sigma-1)^{-1}} \varphi^{-2(l-\sigma-1)^{-1}}$. При условии (10) линии g_0 и g_∞ существуют всегда. Сепаратриса существует при условии

$$ca^{-1} > (l - \sigma - 5)(l - \sigma - 3) = \psi(l, \sigma). \quad (18)$$

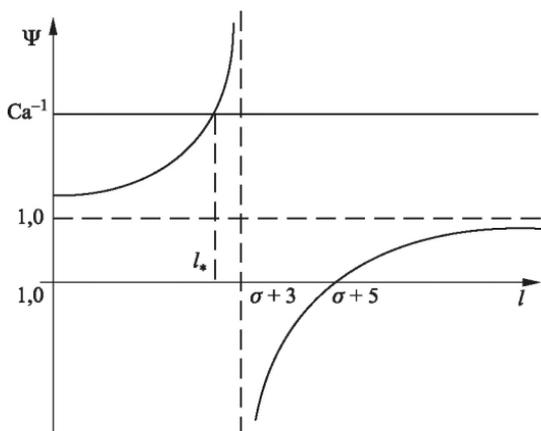


Рис. 3

Таким образом, все три особые линии существуют при

$$ca^{-1} > \max \{2, (l - \sigma - 5)(l - \sigma - 3)^{-1}\}. \quad (19)$$

На рис. 3 приведена зависимость функции $\psi(l, \sigma)$ от l при фиксированном σ . Предполагается, что ca^{-1} слабо зависит от l :

$$l_* = (c(\sigma + 3) - a(\sigma + 5))(c - a)^{-1}. \quad (20)$$

Значения l , при которых $ca^{-1} > \max \{2, \psi\}$, соответствуют существованию сепаратрисы. Из (18) следует, что при $l_* \leq l < \sigma + 3$ сепаратриса не существует. При $l = \sigma + 3$ сепаратриса вырождается в линию $g \equiv 0$ (см. (17)).

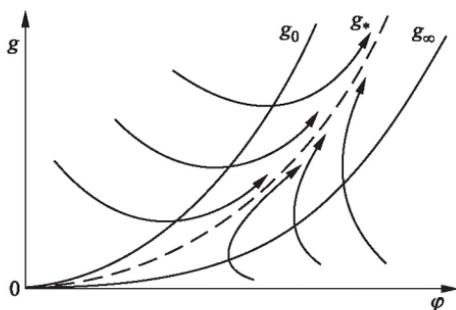


Рис. 4

На рис. 4 приведен фазовый портрет в HS-режиме ($l < \sigma + 1$).

На рис. 5 приведен фазовый портрет в LS-режиме при $\sigma + 1 < l$.

В нашей модели при $l \rightarrow l^*$ слева сепаратриса «уходит» на бесконечность; при $l_* \leq l < \sigma + 3$ она отсутствует; при $l = \sigma + 3$ имеем $g_* \equiv 0$. В случае $l > \sigma + 3$ сепаратриса лежит ниже «нулевой» и «бесконечной» изоклин.

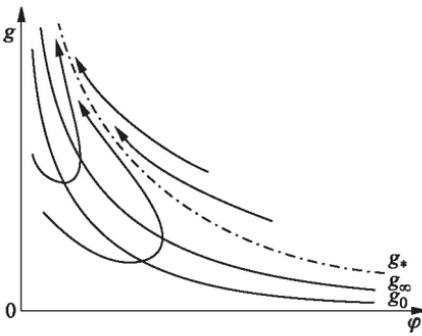


Рис. 5

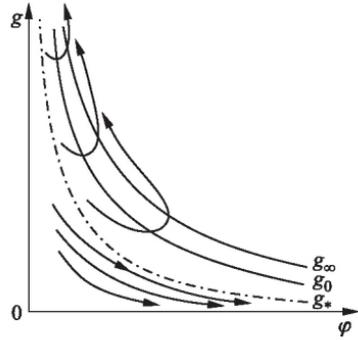


Рис. 6

На рис. 6 приведен фазовый портрет в случае $l > \sigma + 3$.

Из рис. 6 видно, что существуют такие начальные распределения, при которых амплитуда тепловой волны стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Этот чисто модельный вывод подтверждается счетом уравнения (1) в частных производных.

Если через T_0 обозначить характерную температуру начального распределения, а через L_0 характерный размер, то при $l > \sigma + 3$

$$T_0^{l-\sigma-1} L_0^2 < (\sigma + 3 - l)(2\nu_2 - \nu_1(l - \sigma - 1))^{-1} = B \quad (21)$$

и начальному распределению соответствует затухающая тепловая волна HS-режима. При выполнении неравенства, противоположного (21), решение обострится в течение конечного отрезка времени t_f ($g(t) \rightarrow \infty$, при $t \rightarrow t_f$).

Таблица 1.

Параметры: $l = 3,66$, $\sigma = 2$
(LS-режим)

ν_1	ν_2	g_0	φ_0
1,053	0,485	2,0	0,5
1,060	0,488	4,0	0,4
1,119	0,510	6,0	0,3
1,155	0,521	8,0	0,2
1,148	0,519	10,0	0,1

Таблица 2.

Параметры: $l = 2$, $\sigma = 2$
(HS-режим)

ν_1	ν_2	g_0	φ_0
1,248	0,267	4,0	0,5
1,253	0,203	6,0	0,8
1,192	0,238	8,0	1,2
1,166	0,254	10,0	1,5

В таблицах 1, 2, 3 приведены значения ν_1, ν_2 , которые получены численным решением задачи Коши для уравнения (1) с начальными распределениями в виде треугольника:

$$T(x, 0) = \begin{cases} g_0(1 - 0,5|x|\varphi_0^{-1}), & |x| \leq 2\varphi_0, \\ 0, & |x| > 2\varphi_0. \end{cases} \quad (22)$$

Таблица 3.
 Параметры: $l = 6,0$, $\sigma = 2$ (LS-режим)

ν_1	ν_2	g_0	φ_0
0.496	0.352	2.0	0.5
0.496	0.331	4.0	0.17
0.501	0.337	6.0	0.1
0.495	0.340	8.0	0.06
0.508	0.348	10.0	0.04

Третьей и четвертой колонкам соответствуют амплитуда и полуширина начального распределения вида (22). Из таблиц видно, что с 5% точностью значения ν_1 и ν_2 постоянны для различных g_0 и φ_0 .

В табл. 4 приведены значения ν_1, ν_2 , полученные в результате численного решения уравнения (1) для начального распределения вида (22), для различных l при $\sigma = 2$. Из таблицы видно, что при $l = l_* \cong 4,7$ константа B (см. (16)) меняет знак. На фазовой плоскости (φ, g) это соответствует тому, что сепаратриса «уходит» на бесконечность.

Таблица 4. Параметры: $\sigma = 2$

l	ν_1	ν_2	B	l	ν_1	ν_2	B
3.2	0.282	0.267	3.7	4.2	0.368	0.306	4.4
3.4	0.310	0.281	4.7	4.4	0.381	0.310	6.6
3.6	0.325	0.285	3.8	4.6	0.393	0.319	66.6
3.8	0.340	0.295	3.7	4.8	0.405	0.327	-2.60
4.0	0.355	0.300	4.0	4.9	0.417	0.315	-0.62

На рис. 7, а, б, 8, а, б, 9 сплошными линиями проведены кривые зависимостей амплитуды от полуширины, а кружочками значения, полученные счетом уравнения (1) при начальных распределениях (22) с соответствующими (φ_0, g_0) . Рисунки демонстрируют качественное совпадение модельных результатов с численным решением задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Сепаратриса g_* уравнения (7), если она существует, является решением. Подставим $g_* = g_*(\varphi)$ в систему (5). В этом случае система решается до конца:

$$g = \left(2aQ_0(l-1)(\sigma+3-l) \left(g_0^{l-1}(\sigma+3-l) (2aQ_0(l-1)^{-1}) \right)^{-1} - t \right)^{-(l-1)^{-1}},$$

$$g_0 = g(0),$$

$$\varphi = \left(\frac{bK_0Q_0^{-1}(\sigma+3-l)}{(l-\sigma-5)a - (l-\sigma-3)l} \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\frac{2aQ_0(l-1)}{\sigma+3-l} \left(\frac{\sigma+3-l}{2aQ_0(l-1)} g_0^{l-1} - t \right) \right)^{\frac{l-\sigma-l}{2(l-1)}}. \quad (23)$$

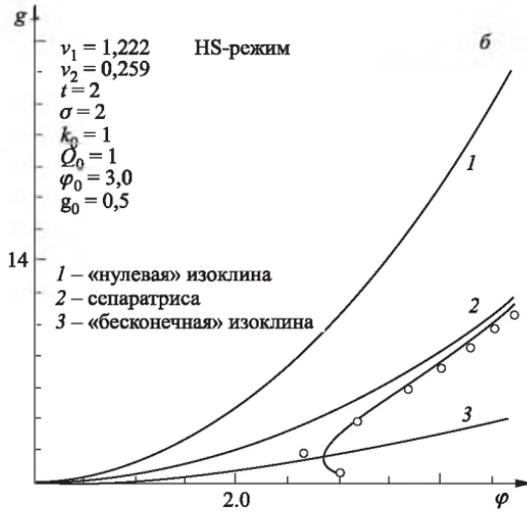
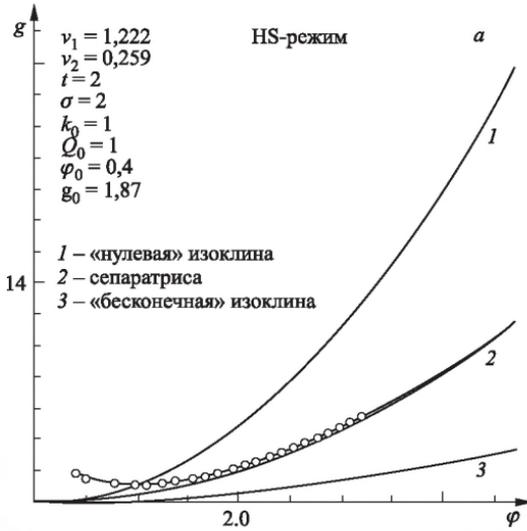


Рис. 7

Из (23) видно, что решение с обострением существует лишь при $l < l_* < \sigma + 3$, и время фокусировки определяется по формуле

$$t_f = \frac{\sigma + 3 - l}{2aQ_0(l-1)} g_0^{1-l} = \frac{\sigma + 3 - l}{2aQ_0(l-1)} g_0^{1-l} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} f'(\xi) d\xi}. \quad (24)$$

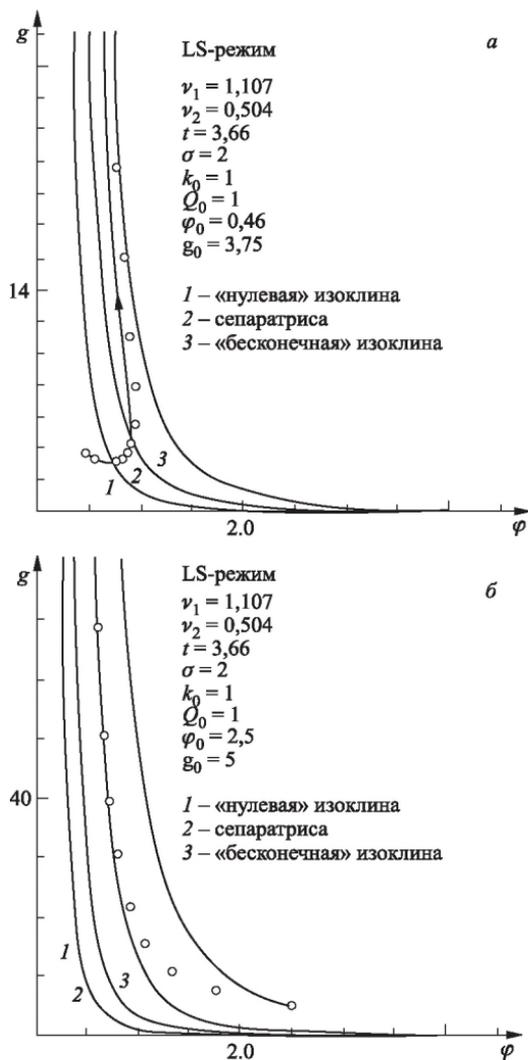


Рис. 8

В [6] рассматривались автомодельные решения уравнения (1), которые получались следующим образом:

$$T(x, t) = g_0 \left(1 - \frac{t}{t_f}\right)^{-(l-1)^{-1}} f(\eta);$$

$$\eta = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{-\frac{l-\sigma-1}{2(l-1)}}, \quad 0 \leq t < t_f,$$

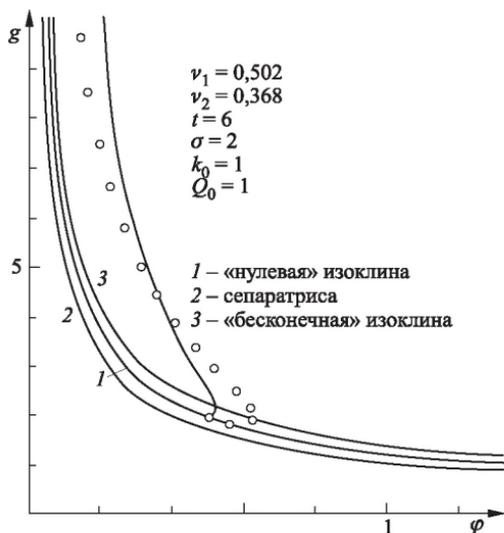


Рис. 9

$$\frac{g_0}{t_f} \left\{ (l-1)^{-1} f - 0,5(l-\sigma-1)(l-1)^{-1} \eta \frac{df}{d\eta} \right\} = \\ = g_0^{\sigma+1} K_0 \frac{d}{d\eta} \left(f^\sigma \frac{df}{d\eta} \right) + Q_0 g_0^l f^l. \quad (25)$$

Проинтегрируем уравнение (25) (интегралы имеют смысл при $l < \sigma + 3$ по η от $-\infty$ до $+\infty$) считая, что на бесконечности $f^\sigma \frac{df}{d\eta} = 0$, тогда для времени фокусировки t_f получим формулу, в точности совпадающую с формулой (24). Это говорит о том, что сепаратрисе g_* в нашей модели при $l < l_* < \sigma + 3$ соответствуют автомодельные решения (25). Из модели также следует, что любые начальные распределения при $l < l_* < \sigma + 3$ асимптотически выходят на сепаратрису.

Для определения времени существования решения после выхода на автомодельный режим можно воспользоваться следующей формулой:

$$t_* = 0,5(\sigma+3-l)Q_0^{-1}(l-1)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} T(t_1, x) dx \left(\int_{-\infty}^{+\infty} T^l(t_1, x) dx \right)^{-1}, \quad (26)$$

где t_1 — момент выхода решения на автомодельный режим.

При $l > \sigma + 3$ решения, соответствующие сепаратрисе, полуустойчивы. Решения с начальными распределениями выше сепаратрисы изменяются в режиме с обострением. Амплитуда решения с начальными данными, лежащими ниже сепаратрисы, стремится к нулю, а область локализации неограниченно возрастает при $t \rightarrow +\infty$.

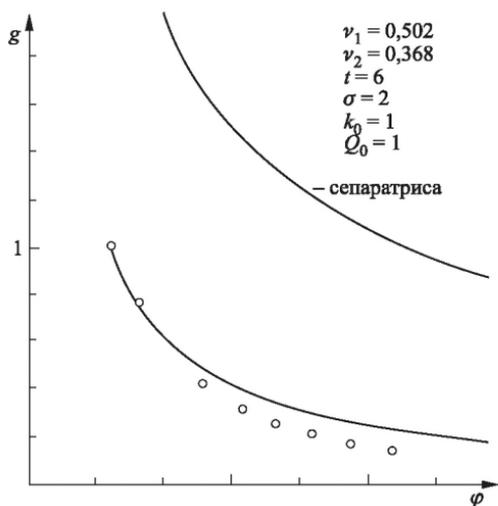


Рис. 10

На рис. 10 при $l > \sigma + 3$ сплошной линии соответствует решение системы (5). В этом случае под φ понимается координата фронта тепловой волны, движущейся по нулевому фону. Светлыми кружками обозначены точки, полученные счетом уравнений (1) при начальном распределении вида:

$$T(x, 0) = \begin{cases} g_0(1 - |x|\varphi_0^{-1}), & |x| \leq \varphi_0, \\ 0, & |x| > \varphi_0. \end{cases}$$

Заключение. Изложенный метод усреднения позволил охватить все качественные выводы ряда работ [1–7] по исследованию решений задачи Коши для квазилинейного уравнения теплопроводности с нелинейным источником тепла и выявить ряд новых качественных особенностей. Метод распространяется также на многомерные задачи.

В заключение авторы благодарят С. П. Курдюмова и Н. В. Змитренко за полезные обсуждения работы.

Препринт ИПМ АН СССР.

1977. № 91

Список литературы

1. Курдюмов С. П. Локализация тепла в нелинейных средах // Препринт ИПМ АН СССР. — 1976. — № 39.
2. Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. и др. Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла // ДАН СССР. — 1976. — Т. 227, № 2. — С. 321.
3. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. и др. Возникновение структур в нелинейных средах и нестационарная термодинамика режимов с обострением // Препринт ИПМ АН СССР. — 1976. — № 74.

4. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. N- и S-режимы сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением // ПМТФ. — 1977. — № 1.
5. Курдюмов С. П. Нелинейные процессы в плотной плазме // Препринт ИПМ АН СССР. — 1975. — № 18.
6. Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. и др. Нелинейные процессы в плотной плазме и особенности термодинамики режимов с обострением // Препринт ИПМ АН СССР. — 1976. — № 109.
7. Курдюмов С. П. Локализация тепла в нелинейных средах // Докл. на годовой сессии науч. совета по проблеме «Физика плазмы» АН СССР и конф. по физике высокотемпературной плазмы и управляемому термодинамическому синтезу. — Звенигород, февр. 1976 г.

Данный препринт находился у истоков исследования процессов с обострением в среде, описываемой квазилинейным уравнением теплопроводности с источником тепла. Авторов препринта вдохновил на эту работу авторитет С. П. Курдюмова. Его энтузиазм по исследованию режимов с обострением, нелинейности и автомодельности заразил и нас. Значимость и уместность работы, проведенной в препринте, сказалась, прежде всего, в том, что удалось найти новые типы решений. Если ранее аналитические решения квазилинейного уравнения теплопроводности определялись методами автомодельности, то в препринте был предложен нестрогий метод (метод усреднения) качественного исследования искомого решений. Метод усреднения выступил, по существу, в качестве мощного эвристического способа построения топологии основных аттракторов исходного нелинейного уравнения. Простота и очевидность метода усреднения подтвердили уже известную классификацию режимов с обострением на HS-, S- и LS-режимы, а также показали наличие ряда пороговых явлений в поведении решений в зависимости от начального распределения. В целом метод усреднения сыграл заметную роль в исследовании решений квазилинейного уравнения теплопроводности.

К. Э. Плохотников

Взаимодействие диссипативных тепловых структур в нелинейных средах

*С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, Ю. А. Повещенко,
Ю. П. Попов, А. А. Самарский*

1. Многие процессы в нелинейных средах, такие, как, например, распространение тепла в среде, коэффициент теплопроводности которой зависит от температуры, диффузия вещества или проникновение

магнитного поля в среду с конечной проводимостью, некоторые задачи биологии и т. д., в математическом отношении описываются квазилинейным уравнением параболического типа [18]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k(T) \operatorname{grad} T) + Q(T). \quad (1)$$

В задачах управляемого термоядерного синтеза на определенной стадии ведущими процессами становятся тепловыделение, которое описывает объемный источник, и электронная теплопроводность, коэффициент которой степенным образом зависит от температуры.

Ниже при исследовании уравнения (1) мы будем рассматривать $T(\mathbf{r}, t)$ как температуру среды, $k(T)$ — коэффициент теплопроводности, $Q(T)$ — источник тепла, моделирующий процессы горения в среде. Зависимости $k(T)$, $Q(T)$ нелинейны:

$$k = k_0 T^\sigma, \quad Q = q_0 T^\beta, \quad k_0 > 0, \quad q_0 > 0, \quad \sigma > 0. \quad (2)$$

В работах [2–8] в одномерном нестационарном приближении было показано, что при $\beta > 1$ эволюция пространственного распределения температуры $T(\mathbf{r}, t)$ может происходить в «режиме с обострением», когда температура среды в некоторых точках или областях неограниченно возрастает за конечное время t_f , называемое временем обострения. При $\beta \geq \sigma + 1$ наблюдается явление локализации горения: несмотря на неограниченный рост температуры в некоторой области пространства при $t \rightarrow t_f$, горение среды происходит в конечной области, вне которой температура не изменяется. Можно выделить три типа режимов с обострением: S-режим при $\beta = \sigma + 1$, HS-режим ($\beta < \sigma + 1$), LS-режим ($\beta > \sigma + 1$). В S-режиме область эффективного горения $G_{\text{эф}}$ не изменяется на развитой стадии процесса, в LS-режиме $G_{\text{эф}}$ сокращается, в HS-режиме $G_{\text{эф}}$ растет. $G_{\text{эф}}$ — пространственный аналог полуширины распределения, $\mathbf{r} \in G_{\text{эф}}$, если $T(\mathbf{r}, t) \geq 0,5 \max_{\mathbf{r}} T(\mathbf{r}, t)$.

Исследования, проведенные в одномерном, цилиндрически- и сферически-симметричных случаях [2, 3, 9], показывают, что при $\beta \geq \sigma + 1$ интенсивное горение, т. е. рост температуры, идет по закону

$$\max_{\mathbf{r}} T(\mathbf{r}, t) \sim (1 - t/t_f)^{-(\beta-1)^{-1}},$$

сопровождается явлением локализации и наблюдается, если область $G_{\text{эф}}$ превышает характерную для данной среды область G_f , называемую фундаментальной.

В работах [4, 5, 8] было показано, что в LS-режиме в одномерном случае возможно горение среды в виде структур, когда профиль температуры $T(\mathbf{r}, t)$ остается со временем самоподобным. Этот профиль может быть найден из решения некоторой автомодельной задачи для функции $f(\xi)$ [4, 5], к которой приводится (1), и имеет вид

$$T(\mathbf{r}, t) = (1 - t/t_f)^{-(\beta-1)^{-1}} f(\xi),$$

$$\xi = r(1 - t/t_f)^{-0,5(\beta-\sigma-1)(\beta-1)^{-1}}.$$

Различают *простые структуры*, имеющие один максимум, и *сложные*, имеющие несколько максимумов. Для реализации горения среды в виде сложных структур требуется с высокой точностью задавать начальный профиль в соответствии с решением автомодельной задачи. Реально начальное распределение всегда содержит различные возмущения. В работе численно моделируется эволюция многомерных начальных распределений вида

$$T(\mathbf{r}, 0) = \max_{i=1,2,\dots,N} [A_i \exp(-k_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2)].$$

Решения (1) с одним максимумом, соответствующие исходным данным,

$$T(\mathbf{r}, 0) = A \exp(-k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2), \quad (3)$$

будем называть *простыми квазиструктурами*. Оказывается, при достаточном перекрытии областей G_f , соответствующих простым квазиструктурам, эволюцию профиля можно описать как процесс их взаимодействия. В этом случае профиль $T(\mathbf{r}, t)$ естественно называть *сложной квазиструктурой* (от сложной структуры ее отличают меньшие времена метастабильности и ряд новых свойств, исследуемых ниже).

2. Многомерные численные расчеты проводились по неявной консервативной схеме с использованием пакета прикладных программ ТЕКОН [11]. Алгоритм содержит итерационный процесс по нелинейности с последующим решением линейной системы алгебраических уравнений, для чего используется двухслойная итерационная схема с чебышевским упорядоченным набором параметров [10]. Этот алгоритм является «изотропным» в том смысле, что при его реализации не выделяется какое-либо направление в пространстве. Это особенно важно при численном моделировании режимов с обострением. Дело в том, что малые возмущения, привносимые вычислительным алгоритмом, могут качественно изменить характер решения этих, неустойчивых по Ляпунову, задач.

3. В двумерных и трехмерных численных экспериментах (см. рис. 1) наблюдалось явление локализации при горении среды в S- и LS-режимах с обострением (исследованы LS-режим, $\beta = 4$, $\sigma = 2$, и S-режим, $\beta = 3$, $\sigma = 2$, параметры k_0 и q_0 варьировались в широком диапазоне).

Можно выделить три стадии процесса горения [12].

Первая — стадия перестройки начального профиля. Локальные максимумы остаются неподвижными, в то время как полная энергия квазиструктуры $E = \int_G T dV$ растет по закону, близкому к линейному.

Вторая — стадия динамики. Квазиструктуры эффективно взаимодействуют, что сопровождается движением локальных максимумов температуры к общему центру (см. рис. 1, б, д). Длительность и характер взаимодействия определяются величиной пересечения фундаментальных областей простых квазиструктур. При удалении двух простых

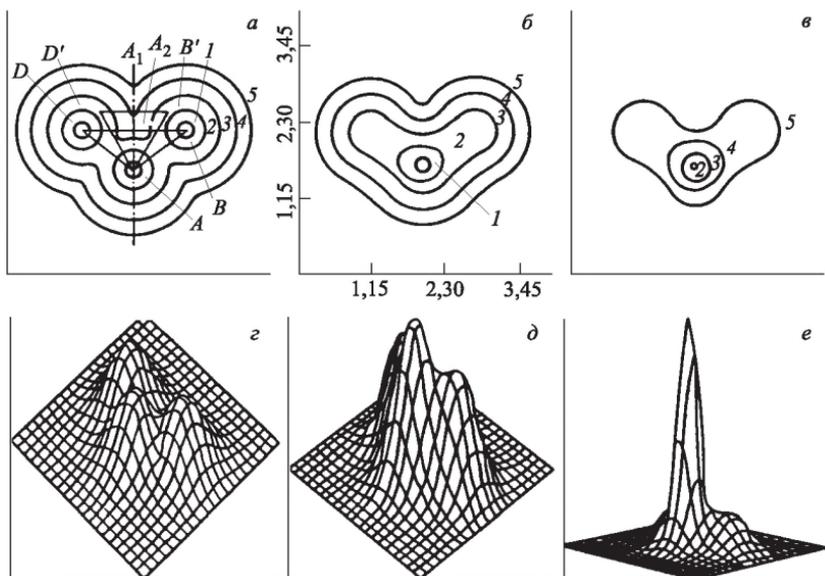


Рис. 1. Эволюция сложной квазиструктуры

$$T(x, y, 0) = 1,35 \max [\exp(-2,5x^2 - 2,5y^2), \\ \exp(-2,5(x + 0,96)^2 - 2,5(y - 0,72)^2), \\ \exp(-2,5(x - 0,96)^2 - 2,5(y - 0,72)^2)],$$

$\angle BAD = 2 \arcsin 0,6$, $\beta = 4,0$, $\sigma = 2,0$, $k_0 = 1,0$, $q_0 = 5,25$. *a-v*) Линии уровня $T_1 = 0,95T_M$; $T_2 = 0,75T_M$; $T_3 = 0,5T_M$; $T_4 = 0,25T_M$; $T_5 = 0,1T_M$, где $T_M = \max(T(\mathbf{r}, t))$. *z-e*) Распределение температуры $T(z, y, t)$. *a, z* соответствуют \mathbf{r} моменту времени $t = 0,0$; *б, д* — $5,94 \cdot 10^{-2}$; *в, е* — $6,04 \cdot 10^{-2}$

квазиструктур друг от друга наблюдается увеличение в десятки раз интервала температур, где происходит эффективное взаимодействие, сопровождающееся движением локальных максимумов. Однако этот эффект носит пороговый характер. Начиная с некоторой критической величины пересечения фундаментальных областей простых квазиструктур, происходит независимое развитие различных частей температурного профиля и формирование двух простых структур. Наблюдаемая картина связана с конкуренцией процесса «затекания» на общий центр и сокращения области $G_{эф}$ в LS-режиме.

На третьей — асимптотической — стадии в области $G_{эф}$ сложная квазиструктура вырождается в несколько не взаимодействующих простых структур. При этом в LS-режиме вне $G_{эф}$ формируется часть температурного распределения, практически не меняющаяся до t_f . Эта часть может иметь сложную пространственную форму (см. рис. 1, *в, е*).

4. Сопоставим особенности явления локализации горения в многомерном случае с результатами одномерных расчетов. Как известно,

на асимптотической стадии процесса горения в одномерном случае начальные данные не влияют на область $G_{эф}$ и форму профиля температур, близкую к автомодельной задаче [4], а определяют только время обострения t_f . В многомерном случае также существуют цилиндрически- и сферически-симметричные автомодельные решения, определяющие цилиндрически- и сферически-симметричную фундаментальные области. Однако оказывается, что параметры начального распределения в многомерном случае влияют не только на величину t_f , но и на эволюцию области $G_{эф}$ на развитой стадии.

Проведенный расчет LS-режима в двумерном случае ($\beta = 4$, $\sigma = 2$, $k_0 = 1,0$, $q_0 = 5,25$, $A_1 = A_2 = 1,35$, $k_1 = k_2 = 2,5$, $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 1,2$) показывает, что после взаимодействия квазиструктур область $G_{эф}$ приобретает форму эллипса и сохраняет ее при росте температуры более чем в 100 раз. Несмотря на сокращение обеих полуосей эллипса симметризация и изменение его эксцентриситета происходят медленно по сравнению с ростом температуры. Это связано с тем, что для направлений, где диаметр $G_{эф}$ минимален, рост температуры в периферийной области идет в основном за счет подтока тепла из центральных областей.

В S-режиме ($\beta = 3$, $\sigma = 2$, $k_0 = 1,0$, $q_0 = 5,25$, $A_1 = A_2 = 1,35$, $k_1 = k_2 = 2,5$, $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 1,2$) после взаимодействия двух простых квазиструктур область $G_{эф}$ также приобретает форму эллипса. При этом происходит эффективная локализация горения по одному направлению и растекание тепла по другому, что позволяет говорить о векторном характере локализации процесса горения.

5. Для изучения влияния пространственной симметрии на характер взаимодействия квазиструктур рассмотрим два численных эксперимента. Ограничимся случаем трех одинаковых простых квазиструктур в LS-режиме в двумерном случае.

В первом эксперименте квазиструктуры в начальный момент расположены так, как это показано на рис. 1, *a, z* ($\triangle ABD$). После стадии динамики, во время которой происходит движение абсолютного максимума температуры по AA_2 (см. рис. 1, *б, д*), интенсивное горение наблюдается в сокращающейся области вблизи физически выделенной квазиструктуры A (см. рис. 1, *в, е*).

Рассмотрим теперь случай симметричного начального распределения, когда выделенной квазиструктуры нет. Разместим три квазиструктуры с теми же параметрами, что и в первом эксперименте, так, чтобы их максимумы были расположены в вершинах равностороннего треугольника $AB'D'$ (см. рис. 1, *a*). При численном моделировании этой ситуации наблюдается движение локальных максимумов простых квазиструктур A, B', D' до слияния в точке A_2 , центре симметрии. По сравнению с предыдущим экспериментом продолжительность стадии динамики возрастает в 2,3–2,35 раза, а время обострения в 1,45 раза.

Обратим внимание на то, что время обострения во втором эксперименте увеличивается, хотя большая энергия при этом сосредоточена

в меньшем пространстве, чем в случае треугольника ABD . Отсюда видно, что пространственная симметрия увеличивает стабильность сложной квазиструктуры.

Доклады Академии наук СССР.
1980. Т. 251. № 4

Поступила
10.12.1979

Список литературы

1. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики. — М.: Наука, 1974.
2. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. и др. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1976. — № 74.
3. Самарский А. А., Змитренко Н. В. и др. // ДАН СССР. — 1976. — Т. 227, № 2. — С. 321.
4. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1977. — № 106.
5. Самарский А. А., Еленин Г. Г. и др. // ДАН СССР. — 1977. — Т. 237, № 6. — С. 1330.
6. Курдюмов С. П., Змитренко Н. В. // Журн. прикл. мех. и техн. физ. — 1977. — № 1.
7. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. и др. // Письма в ЖЭТФ. — 1977. — Т. 26, вып. 9.
8. Курдюмов С. П. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1979. — № 29.
9. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1979. — № 16.
10. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1974.
11. Повещенко Ю. А., Попов Ю. П. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1978. — № 65.
12. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. и др. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1978. — № 77.
13. Самарский А. А., Змитренко Н. В. и др. // ДАН СССР. — 1975. — Т. 223, № 6. — С. 1344.

Данная работа является одним из первых применений пакета программ ТЕКОН для математического моделирования «тепловых структур» в пространственном (двух- и трехмерном) приближении. Она позволила исследовать влияние многомерности на характер эволюции структур, уточнить результаты, полученные в одномерном приближении, а также установить некоторые принципиально новые свойства структур, являющиеся следствием неоднородности. Приведенные расчеты также дали возможность выявить отдельные недостатки пакета, который развивается уже более двадцати лет, и способствовали его совершенствованию.

Как указано в первом абзаце статьи, квазилинейное уравнение параболического типа описывает не только нестационарные теп-

ловые процессы, но и разнообразные явления в нелинейных средах, и является элементом математической постановки общей задачи. Важность многомерности, возможность работы со сложноструктурированной динамической информацией возрастает в прикладных исследованиях. Поэтому пакет ТЕКОН в дальнейших приложениях использовался не только как самостоятельная программная единица, но и как элемент более общих программно-вычислительных комплексов.

С помощью ТЕКОНа решались, в частности, следующие задачи:

— изучение тепловых режимов при термическом упрочнении поверхности металла потоком лазерного излучения (1980–1982 гг.). Целью таких расчетов являлось определение областей металла с полной и неполной закалкой, зон разупрочнения, а также характерных особенностей тепловых процессов для оптимизации режима лазерной закалки. Расчеты динамики процесса лазерной закалки позволили учесть характерные особенности состояния металла, сдвиг критических точек, тепловые эффекты в области полиморфных и фазовых превращений материала при определении положения и размеров различных структурных зон. Расхождение результатов тепловых расчетов с имеющимися экспериментальными данными находилось в пределах ошибки эксперимента;

— исследование нестационарных тепловых процессов, протекающих в ряде конструктивных узлов перспективных ЭВМ (1980–1982 гг.). Развитие современных ЭВМ идет по пути увеличения их быстродействия и повышения компактности элементов, что ведет к перегреву конструкций. Это выдвигает новые требования к системе охлаждения проектируемых ЭВМ. Разработанный на базе пакета ТЕКОН комплекс программ явился эффективным средством решения таких проблем;

— анализ эффекта аномального энерговыклада сильнотоочного РЭП в вещество в двумерном МГД приближении (1978–1983 гг.). Осуществление программы импульсного термоядерного реактора на основе сильнотоочного релятивистского электронного пучка (РЭП) требует детальной разработки ряда вопросов, связанных с транспортировкой энергии от ускорителя к мишени, с динамикой нагрева и сжатия мишени, с процессами в релятивистском диоде и т. д. При этом одним из ключевых вопросов является проблема эффективного поглощения энергии мощного РЭП в веществе мишени. В ИАЭ им. И. В. Курчатова на установках ТРИТОН и АНГАРА-1 экспериментально установлено, что, по крайней мере, половина подводимой энергии мощного РЭП диссипируется в веществе фольги, что соответствует превышению энерговыклада над предполагаемым теоретически почти на порядок величины. Сравнение результатов расчетов на основе пакета ТЕКОН с экспериментальными данными позволило объяснить этот эффект.

Как ни странно, фундаментальная направленность на изучение процессов в нелинейной сплошной среде, на что было направлено создание пакета, углубила наше понимание не только среды сплошной, но и среды информационной. Обнаружились не только «тепловые структуры» как некий вид памяти в нелинейной сплошной среде, но и информационные структуры динамического типа, представляющие собой способ нетрадиционного, не фон-Неймановского, нелинейного представления информации в памяти компьютера в виде графов универсальной структуры.

Дальнейшее развитие комплекса ТЕКОН привело к созданию системы инструментальных средств, оперирующих с динамической памятью, необходимых при построении пакетов прикладных программ для решения задач математической физики, дискретизируемых на основе метода опорных операторов, как, впрочем, и развитие самого этого метода. Среди них: база данных ТЕКОН, средства формирования и поддержки типов данных пространственной сетки сложной структуры, инструментальные средства для моделирования и декомпозиции матриц с нефиксированным шаблоном ненулевых элементов, проведение громоздких символьных выкладок и т. д. (1975–1994 гг.).

В настоящее время ТЕКОН активно используется для математического моделирования процессов подземной гидродинамики в напряженно-деформированных средах, для решения задач теории фильтрации осадочных бассейнов (1992–1996 гг.). Вот некоторые из современных задач геологии и геофизики:

1. Моделирование напряженного состояния и прогноз техногенных изменений при разработке приразломного морского месторождения. Исследовалось напряженно-деформированное состояние земных пород, обусловленное фильтрационными процессами в них, в задаче о техногенных землетрясениях. В процессе добычи нефти (газа) перемещение жидкости вызывает изменение напряженно-деформированного состояния горных пород. Деформации горных пород в тектонических нарушениях близки к критическим значениям, превышение которых вызывает разрушение пород с высвобождением сейсмической энергии.

Особенностью рассматриваемого класса задач является необходимость учитывать геологическую неоднородность среды (обусловленную историей развития: она состоит из ряда разновозрастных слоев сложной геометрии, резко отличающихся по своим свойствам).

На основе системы ТЕКОН создан комплекс программ для численного моделирования процессов фильтрации в трещиновато-пористых насыщенных геологических средах, сопровождаемых изменением напряженно-деформированного состояния этих сред.

Рассчитаны напряженно-деформированные состояния подземных коллекторов Ромашкинского месторождения нефти (Татар-

стан), вызванные перераспределениями порового давления в пласте в процессе заводнения.

2. Создание математической модели формирования вторичных залежей углеводородов в шельфовой зоне Тимано-Печорской провинции. Целью работы являлось математическое моделирование класса геодинамических процессов, описывающих формирование осадочных бассейнов, автоколебательные процессы в них и быстрые (на заключительной стадии) процессы эволюции осадочного бассейна в зоне субдукции. Модель быстрых процессов описывает образование залежей углеводородов в зонах коллизии литосферных плит. Применение современных методов моделирования к исследованию процессов формирования осадочных бассейнов и миграции в них углеводородов важно как с практической точки зрения — в них содержатся основные запасы нефти и газа, так и с теоретической, так как в них запасена огромная информация об истории планеты. Численные расчеты в рамках данной модели одновременно проводились на примерах нефтегазоносных бассейнов Тимано-Печорья, Предверхолянского прогиба, Баренцева моря, Волго-Урала и др. При отсутствии надежной геолого-геофизической информации недостающие данные могут быть получены с помощью численных экспериментов. Это обстоятельство дает возможность прогнозировать скопления углеводородов на неразбуренных участках. Для расчета крупномасштабных явлений подобного типа в условиях гравитационной неустойчивости необходимо было создать комплекс программ, удовлетворяющий ряду специфических требований к численным методам решения.

Таким образом, разработанные на основе системы ТЕКОН программные средства развивались одновременно с развитием численных методов. Результаты расчетов использованы для планирования и интерпретации соответствующих физических экспериментов, а также для оптимизации конструкций и технических процессов.

Ю. П. Попов, Ю. А. Повецenco

Диссипативные структуры в неоднородной нелинейной горячей среде

С. П. Курдюмов, Е. С. Куркина, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский

В средах с нелинейной теплопроводностью и объемным источником тепла, зависящим от температуры по степенному закону, процесс горения может развиваться в режиме с обострением [1–4]. В S- и LS-режимах возникают диссипативные структуры — области интенсив-

ного выделения тепла, локализованные конечное время на отдельных участках среды L_T [1–5]. В простейшем случае плоской геометрии и постоянной плотности установлено, что начальные условия из разных классов приводят к развитию структур различной сложности, описываемых собственными функциями (с. ф.) нелинейного автомодельного уравнения [1, 5]. Получена теоретическая оценка их числа и характера в зависимости от параметров среды, а также численно исследована их устойчивость.

В настоящей работе проведено изучение особенностей горения нелинейной среды в сферически-симметричном и цилиндрически-симметричном случаях в предположении, что плотность среды зависит от радиуса по степенному закону. Показано, что в таких средах также имеют место три режима горения среды: HS-, S- и LS-режимы. Однако распределенная плотность может качественно изменить картину горения среды. Найдены новые типы структур и тепловых волн, сильно различающихся по скорости распространения. В работе подтверждена оценка числа с. ф. среды и показана тесная связь их с решениями некоторых линейных уравнений.

1. Рассматриваются две задачи горения нелинейной неоднородной среды, описываемые уравнением

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^\nu k_0 T^\sigma \frac{\partial T}{\partial r} \right) + q_0 \rho^\alpha T^\beta, \quad \varepsilon = c_V T, \quad k_0 > 0, \quad (1)$$

$$q_0 > 0, \quad \beta, \sigma > 0, \quad \nu = 1, 2, \quad \rho = Ar^k, \quad A > 0.$$

Задача А ($\alpha = 1, k = -2$). Горение инициируется заданием начального центрально-симметричного распределения температуры в некоторой области $0 \leq R_1 \leq r \leq R_2$

$$T(r, 0) = T_0(r), \quad 0 \leq R_1 \leq r \leq R_2; \quad T(r, 0) = 0, \quad r > R_2. \quad (2)$$

На фронте волны горения $r = r_\Phi(t)$ выполняются условия

$$r^\nu T^\sigma T_r \Big|_{r=r_\Phi} = 0, \quad T(r, t) \Big|_{r=r_\Phi} = 0, \quad t > 0. \quad (3)$$

Граничное условие в центре симметрии имеет вид

$$r^\nu T^\sigma T_r \Big|_{r=r_0} = 0. \quad (4)$$

Задача В ($k = 1/(\sigma + 1) = k\alpha - \beta/(\sigma + 1) \neq -3$). В центре симметрии находится точечный источник, интенсивность которого согласована с интенсивностью объемных источников среды так, что уравнение (1) допускает фундаментальное решение

$$T_\Phi = T_0(1 - t/t_f)^{-1/(\beta-1)} r^{-1/(\sigma+1)}, \quad (5)$$

$$t_f = T_0^{1-\beta} / ((\beta - 1)q_0 A^{1-\beta}).$$

Внешний источник задает асимптотику решений при $r \rightarrow 0$

$$T(r, t) \xrightarrow{r \rightarrow 0} cT_\Phi. \quad (6)$$

На фронте требуется выполнение условий (3).

Для задач (1)–(4); (1), (3), (6) исследуются автомодельные решения вида [3]:

$$\begin{aligned} T(r, t) &= q(t)\theta(\xi), \quad \xi = r/\varphi(t); \\ g(t) &= g_0(1 - t/\tau)^m, \quad \varphi(t) = \varphi_0(1 - t/\tau)^n, \\ m &= -(k\alpha + 2)/((k + 2)(\beta - 1) + k\sigma(\alpha - 1)); \\ n &= m(\sigma + 1 - \beta)/(k\alpha + 2), \end{aligned} \quad (7)$$

где τ — произвольный параметр, имеющий смысл времени обострения t_f при задании автомодельных начальных данных [5, 8]. Функция $\theta(\xi)$ при соответствующем выборе масштабов удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \theta^\sigma \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\frac{m}{\tau} \xi^k \theta - \frac{n}{\tau} \xi^{k+1} \frac{d\theta}{d\xi} - \xi^{k\alpha} \theta^\beta, \quad (8)$$

граничным условиям на фронте $\xi = \xi_\Phi$ или на бесконечности:

$$\begin{aligned} \theta(\xi)|_{\xi=\xi_\Phi} &= 0, \quad \xi^\nu \theta^\sigma \theta'|_{\xi=\xi_\Phi} = 0, \\ \theta(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} &0, \quad \xi^\nu \theta^\sigma \theta' \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \quad (9)$$

и в центре симметрии:

$$\xi^\nu \theta^\sigma \theta'|_{\xi=0} = 0 \text{ (задача А)}, \quad \theta \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} c\xi^{-(1/(\sigma+1))} \text{ (задача В)}. \quad (10)$$

2. Аналитическое исследование и численное интегрирование рассматриваемых автомодельных задач позволили построить собственные функции нелинейной среды и изучить их поведение в широком диапазоне изменения параметров σ, β, k, α . Прокомментируем результаты, представленные в таблице.

Если плотность нарастает к центру не слишком быстро ($k > -2$, $\alpha = 1$), то решения задачи А аналогичны решениям в плоской геометрии с постоянной плотностью. LS-режим реализуется при $\beta > \sigma + 1$ и представляет собой дискретный набор с.ф. среды, число которых определяется по формуле для плоского случая [4, 5]:

$$M = [a - [a^{-1}[a]]] + 1, \quad a = (\beta - 1)(\beta - \sigma - 1)^{-1}. \quad (11)$$

Структуры в LS-режиме имеют вид самофокусирующихся тепловых волн, сходящихся к центру. S-режим реализуется при $\beta = \sigma + 1$; это простая структура с постоянной полушириной. В HS-режиме при

Задача А, $\tau > 0, \nu = 2$				Задача В, $\tau > 0, \nu = 2$			
Показатель плотности	Режим			Показатель плотности	Режим		
	HS	S	LS		HS	S	LS
$k > -2$	$1 < \beta < \sigma + 1$	$\beta = \sigma + 1$	$\beta > \sigma + 1$	$k > (\sigma + 1)^{-1} - 1$	$1 < \beta < \sigma + 1$	$\beta = \sigma + 1$	$\beta > \sigma + 1$
	1 с. ф.	1 с. ф.	М с. ф.	$-3 < k < -(\sigma + 1)^{-1} < -1$	1 с. ф.	1 с. ф.	М с. ф.
$k = -2$	Особый случай			$k = (\sigma + 1)^{-1} - 3$	Особый случай		
$-3 < k < -2$	$\beta > \sigma + 1$	$\beta = \sigma + 1$	$\beta < \sigma + 1$	$-3 < k < (\sigma + 1)^{-1} < -3$	$\beta > \sigma + 1$	$\beta = \sigma + 1$	$\beta < \sigma + 1$
$k \leq -3$	$m = \int_0^{r^*} \rho r^2 dr \rightarrow \infty, \quad E = \int_0^{r^*} T \rho r^2 dr \rightarrow \infty$						

$\beta < \sigma + 1$ задача А имеет единственное монотонное решение с растущей полушириной, представляющее собой тепловую волну. Таким образом, введение распределенной плотности (при $k > -2$) в сферически-симметричном и цилиндрически-симметричном случаях привело в задаче А лишь к изменениям значений некоторых характеристик: размеров L_T , величин температуры в максимумах и т. д.

В задаче В все решения при $\xi \rightarrow 0$ неограниченно возрастают и выходят на асимптотику фундаментального решения (10). В сложных структурах распределение температуры имеет слабо выраженные экстремумы и точки перегиба, число которых возрастает с увеличением номера с. ф. При плотностях с показателем $(\sigma + 1)^{-1} - 3 < k < (\sigma + 1)^{-1} - 1$ три режима горения среды реализуются при тех же соотношениях между β и σ , что и в плоском случае. В LS-режиме для числа с. ф. справедлива оценка (11). В S-режиме при $\beta = \sigma + 1$ и $k = (\sigma + 1)^{-1} - 1$ получено аналитическое решение:

$$\theta(\xi) = \xi^{-1(\sigma+1)} \left(\frac{2(\sigma+1)}{\sigma(\sigma+2)} \sin^2(\pi\xi L_T^{-1} + \pi\theta) \right)^{1/(\sigma+1)},$$

$$L_T = 2\pi(\sigma+1)^{0,5}\sigma^{-1}.$$

3. В задаче В диапазон изменения плотности $(\sigma + 1)^{-1} - 3 < k < (\sigma + 1)^{-1} - 1$ является особым. В этом случае при $\beta < \sigma + 1$ (HS-режим) автомодельная задача имеет два решения в виде тепловых волн. Первое монотонно и в основном определяется действием внешнего источника. Во втором решении локальный максимум температуры приходится на сферу некоторого радиуса ξ . Эта волна может иметь скорость, намного превышающую скорость первой волны, и существует за счет собственного горения среды (для $\sigma = 2, \beta = 1,3$ скорости волн

различаются в ~ 400 раз). При этих же показателях k в S-режиме среда порождает бесконечное число с.ф., имеющих сложную пространственную структуру (см. рис.1). Каждая с.ф. локализована на своей фундаментальной длине и имеет неподвижные по пространству выделенные точки, например, максимумы температуры.

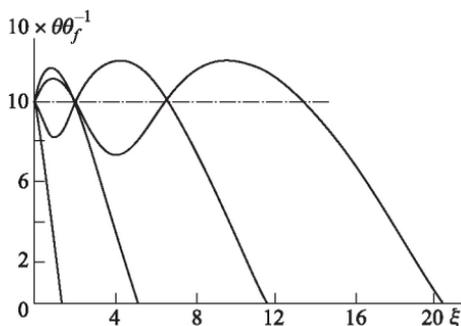
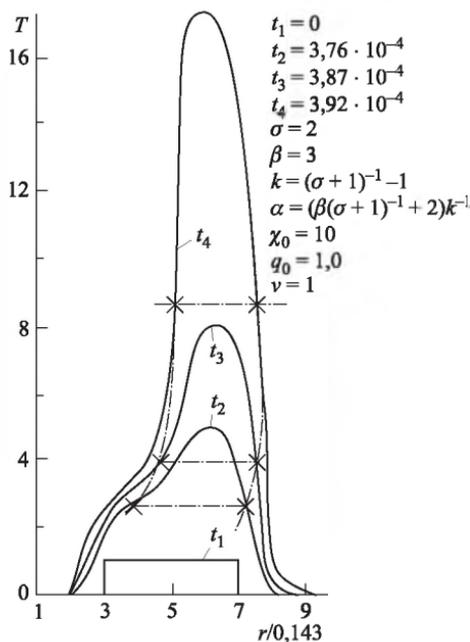


Рис. 1. Четыре первые с. ф. в S-режиме ($\sigma = 2, \beta = 3, k = (\sigma + 1)^{-1} - 2$)

4. При плотностях, сильно нарастающих к центру ($k < -2, \alpha = 1$ или $k < 1/(\sigma + 1) - 3, k = (\sigma + 1)^{-1} = k\alpha - \beta/(\alpha + 1)$), характер горения среды существенно отличается от описанного. Расчетами в частных производных показано, что в этом случае область горения сокращается при соотношении между β и σ , характерном для существования тепловых волн: $\beta < \sigma + 1$ (т. е. HS-режим меняется на LS-режим).

5. Замечательной особенностью старших с.ф. во всех режимах и при всех значениях является то, что в области своей немонотонности они «колеблются» около решения уравнения (8), обращаящего диффузионный член в ноль (см. рис.1). При постоянной плотности таким решением является только гомотермическое $\theta_f(\xi) = C(m, n)$. В неоднородной среде имеется еще фундаментальное решение в $\theta_f(\xi) = \xi^{-1/(\sigma+1)}\theta_f(m, n)$. Динамическая аналогия [2] сопоставляет автомодельному уравнению (8) процесс колебания материальной точки в непотенциальном поле сил. Фундаментальное и гомотермическое решения представляют собой минимум потенциальной ямы, возле которого происходят колебания, и в этом смысле играют одинаковую роль в разных задачах. Многочисленные расчеты показали, что в этой области с.ф. хорошо описываются решениями линеаризованного уравнения около гомотермического или фундаментального решений, причем число с.ф. совпадает с числом нулей последнего. Связь с некоторым линейным уравнением наблюдалась и в многомерных расчетах эволюции произвольных начальных профилей [6]. Представляет большой интерес задача поиска многомерных с.ф., дающих архитектуру всех типов структур. Вероятно, в разработке способов построения ее решений сыграют существенную роль методы

Рис. 2. Профили температуры в моменты времени t_1-t_4

линеаризации. Предполагая, что с. ф. нелинейной среды в трехмерном пространстве в области своей немонотонности «колеблются» около решений, обращающих в ноль диффузионный член, можем представить архитектуру с. ф. с помощью линейного приближения. Например, в задаче В для плотности $\rho = Ar^{-1/(\sigma+1)-2}$, проводя линеаризацию $\theta = \theta_r(m, n)\xi^{-1/(\sigma+1)}(1 + u(\xi, \theta, \varphi))$, $|u| \ll 1$, в трехмерном автомодельном уравнении нелинейной теплопроводности

$$(\sigma + 1)^{-1} \Delta_{\xi, \theta, \varphi} = -\frac{m}{\tau} \xi^k \theta + \frac{n}{\tau} \xi^{k+1} \theta - \xi^{k\alpha} \theta^\beta$$

относительно функции u , получаем линейное уравнение, которое заменой

$$u = \exp(D(\beta - \sigma - 1) \cdot 0,5\xi)X,$$

$$D_1 = (\beta - 1)^{-(\beta - \sigma - 1)/(\beta - 1)}$$

сводится к виду стационарного уравнения Шрёдингера с кулоновским потенциалом

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi^2} \Delta_{\theta, \varphi} X = (0,25D_1^2(\beta - \sigma - 1)^2 - D_1(\beta - 1)/\xi)X$$

и однородными граничными условиями.

6. Исследования устойчивости с. ф. среды показали, что при приближении к моменту фокусировки сложные структуры вырождаются в простые из-за флуктуации и неустойчивости по Ляпунову, процесса горения в режиме с обострением. Однако время их метастабильности велико и зависит от типа режима и номера с. ф.: в HS- и S-режимах оно достигает 90% t_f для вторых с. ф. Выход произвольных распределений на автомодельный режим в рассматриваемых средах отличается от плоского случая. Если область горения захватывает центр симметрии, то в задаче А происходит выход на первую с. ф. Если же имеет место локализация процесса вне центра, то для решения характерна длительная перестройка формы, зависимость L_T от профиля начального возмущения и выход на автомодельный режим, близкий к плоскому (см. рис. 2).

Доклады Академии наук СССР.
1980. Т. 251. № 3

Поступила
19.12.1979

Список литературы

1. Самарский А. А., Змитренко Н. В. и др. // ДАН СССР. — 1976. — Т. 227, № 2. — С. 321.
2. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. и др. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1976. — № 74.
3. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. и др. // Письма в ЖЭТФ. — 1976. — Т. 26, вып. 9.
4. Самарский А. А., Еленин Г. Г. и др. // ДАН СССР. — 1977. — Т. 237, № 6. — С. 1330.
5. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1977. — № 106.
6. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. и др. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1978. — № 77.
7. Курдюмов С. П., Куркина Е. С. и др. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1979. — № 16.
8. Курдюмов С. П. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1979. — № 29.
9. Галактионова В. А., Еленин Г. Г. и др. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1979. — № 27.
10. Галактионова В. А., Курдюмов С. П. и др. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1979. — № 21.
11. Курдюмов С. П., Змитренко Н. В. // Журн. прикл. мех. и техн. физ. — 1977. — № 1.

Представленная читателю работа написана в 1980 г. и посвящена изучению явлений самоорганизации при сильно нестационарных процессах горения. Несмотря на то, что условия для таких процессов могут реализоваться только в высокотемпературной плазме, рассматриваемая задача представляет интерес для всех,

кто занимается синергетикой. В математическом плане задача сводится к исследованию спектра решений краевой задачи для одного квазилинейного уравнения теплопроводности. Упор сделан на исследовании свойств пространственно-неоднородных решений с несколькими локальными максимумами, представляющих собой сходящиеся тепловые волны. Эти решения оказываются неустойчивыми не только по Ляпунову, но и структурно, т. е. со временем вырождаются в простую структуру с одним максимумом. Кроме того, в статье рассматривается чисто умозрительная задача с нарастающей до бесконечности плотностью и мощным гипотетическим тепловым источником в центре. На первый взгляд может показаться, что такая абстрактная задача, в которой исследуются неустойчивые решения, не может представлять какого-либо интереса. Однако, как показало время, идеи, заложенные в этой статье, оказались очень плодотворными и получили дальнейшее развитие. Несомненно, сразу же привлекает красота рассматриваемой задачи, а это уже не мало.

Интересна и поучительна история постановки этой задачи. Изучая свойства случайных функций, С. П. Курдюмов заметил сходство рассматриваемой нелинейной задачи на собственные значения и собственные функции с линейной задачей для уравнения Шрёдингера базовой математической модели квантовой механики. Это очень взволновало его и вызвало острое желание философски осмыслить, насколько не случайна эта связь. Возникла идея построить модель «атома водорода» в горячей среде как пример удивительной самоорганизации нелинейной среды. Привлекала прежде всего красота задачи. Была введена распределенная плотность и точечный тепловой источник — и в линейном приближении уравнение Шрёдингера для атома водорода было получено. Были построены сферически-симметричные случайные функции «атома водорода». Несмотря на принципиальную разницу между случайными функциями рассматриваемой нелинейной задачи и случайными функциями классической линейной задачи, она все же давала подсказку, что существуют более сложные структуры, неоднородные по углу. А раз они существуют в этом случае, то должны существовать и в любых других, например, при постоянной плотности и без точечного теплового источника. В дальнейшем А. Б. Потаповым с соавторами были действительно построены двумерные и трехмерные структуры и исследована их архитектура. Кроме того, описанные в статье различные типы структур, отличающиеся свойствами и динамическим поведением, несомненно сыграли немалую роль в формировании философских взглядов С. П. Курдюмова и легли в основу будущих работ с Е. М. Князевой.

Е. С. Куркина

Нестационарные диссипативные структуры в нелинейных двухкомпонентных средах с объемными источниками

С. П. Курдюмов, Е. С. Куркина, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский

1. В средах, описываемых нелинейным уравнением теплопроводности с объемным источником

$$T_t = \operatorname{div}(kT^\sigma \operatorname{grad} T) + qT^\beta, \quad (1)$$

процесс горения может идти в режиме с обострением, при котором температура обращается в бесконечность за конечное время t_f (время обострения), по крайней мере в одной точке пространства [1–5]. При определенных условиях возникают нестационарные диссипативные структуры — процессы интенсивного выделения тепла с сокращающейся (LS-режим) или постоянной (S-режим) полушириной, локализованные конечное время t_f на отдельных участках среды.

В настоящей работе исследовано формирование диссипативных структур в важном для ряда приложений классе двухкомпонентных сред, описываемых системой двух параболических уравнений

$$\begin{aligned} T_{1t} &= (k_1 T_1^{\sigma_1} T_{1x})_x + q_1 T_1^{\beta_1} T_2^{\gamma_2}, \\ T_{2t} &= (k_2 T_2^{\sigma_2} T_{2x})_x + q_2 T_2^{\beta_2} T_1^{\gamma_1}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\sigma_1, \sigma_2 > 0; \quad \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \geq 0; \quad q_1, q_2 > 0.$$

Для этой системы ставится задача Коши:

$$T_i(x, 0) = \begin{cases} T_i^0(x), & x \in [a_i, b_i] < \infty, \quad i = 1, 2, \\ 0, & x \notin [a_i, b_i]. \end{cases} \quad (3)$$

Функции T_1 и T_2 интерпретируются как концентрации веществ 1 и 2. В работе показано, что важнейшие эффекты, установленные для уравнения (1), имеют место и для системы (2). Сюда относятся развитие процессов в режиме с обострением, явление локализации и возникновение структур. В частных случаях система (2) точно сводится к уравнению 1.

В работе построены автомодельные решения (2), (3), описывающие локализованные структуры с постоянной полушириной, и с помощью вычислительного эксперимента показан выход на них при $t \rightarrow t_f$ с широкого класса начальных данных. Обнаружено существование реакций, в которых рост одной из концентраций идет в HS-режиме, т. е. полуширина распределения увеличивается, а другой — в LS-режиме.

Полученные результаты позволяют поставить вопрос об экспериментальном изучении локализованных диссипативных структур в многокомпонентных средах.

2. Рассмотрение однородного по пространству решения системы (2) позволяет дать следующую оценку снизу времени обострения:

$$t_f = \int_{T_2^0}^{\infty} T_2^{-\beta} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} T_2^{\alpha_2} + \alpha_1 C \right)^{-\gamma_1/\alpha_1} dT_2, \quad (4)$$

$$\alpha_1 = \gamma_1 + 1 - \beta_1, \quad \alpha_2 = \gamma_2 + 1 - \beta_2, \quad \alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0,$$

$$C = \frac{T_1^{0\alpha_1} T_2^{0\alpha_2}}{\alpha_1 \alpha_2}, \quad T_1^0 = \max_x T_1(x, 0), \quad T_2^0 = \max_x T_2(x, 0)$$

и необходимое условие существования режима с обострением по обеим концентрациям

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad m_1 = \frac{\alpha_2}{p} < 0, \quad m_2 = \frac{\alpha_1}{p} < 0, \quad (5)$$

где $p = (\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1) - \gamma_1\gamma_2$. Неравенства (5) вытекают из требования сходимости интеграла (4) и аналогичного интеграла по T_1 .

3. В работе изучены автомодельные решения задачи (2), (3):

$$T_1 = g_1(t)f_1(\xi), \quad T_2 = g_2(t)f_2(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\varphi(t)}. \quad (6)$$

Подстановка (6) в (2) однозначно определяет условие существования автомодельных решений

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad (7)$$

и вид функций g_1, g_2, φ :

$$g_1(t) = \left(1 - \frac{t}{t_f}\right)^{m_1}, \quad g_2(t) = \left(1 - \frac{t}{t_f}\right)^{m_2}, \quad (8)$$

$$\varphi(t) = \left(1 - \frac{t}{t_f}\right)^n, \quad n = 0,25(m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 + 2). \quad (9)$$

Функции f_1 и f_2 при соответствующем выборе масштабов удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \left(-\frac{m_1}{t_f}\right) f_1 + \left(\frac{n}{t_f}\right) \xi f_{1\xi}' &= (f_1^{\sigma_1} f_{1\xi}')_{\xi}' + f_1^{\beta_1} f_2^{\gamma_2}, \\ \left(-\frac{m_2}{t_f}\right) f_2 + \left(\frac{n}{t_f}\right) \xi f_{2\xi}' &= k(f_2^{\sigma_2} f_{2\xi}')_{\xi}' + f_2^{\beta_2} f_1^{\gamma_1}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$k = (k_2/k_1)(q_2/q_1)^{\sigma_1/\alpha_1},$$

граничным условиям на фронтах $\xi_{f_1} = 0,5L_{f_1}$, $\xi_{f_2} = 0,5L_{f_2}$.

$$f_i|_{\xi=\xi_{f_i}} = 0, \quad f_i^{\sigma_i} f_i'|_{\xi=\xi_{f_i}} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (11)$$

и в центре симметрии

$$f_1' = f_2' = 0, \quad (12)$$

t_f — произвольный параметр разделения переменных (6) ($-m_i/t_f > 0$). Решение при $t_f = t_{f_2}$ получается из решения при $t_f = t_{f_1}$ преобразованием подобия:

$$f_1(\xi, t_{f_2}) = (t_{f_2}/t_{f_1})^{m_1} f_1((t_{f_2}/t_{f_1})^{-n}\xi, t_{f_1}),$$

$$f_2(\xi, t_{f_2}) = (t_{f_2}/t_{f_1})^{m_2} f_2((t_{f_2}/t_{f_1})^{-n}\xi, t_{f_1}).$$

Из (7), (6), (8) следует, что при $m_i > 0$ амплитуды автомодельных распределений концентраций растут в режиме с обострением согласованно — с одним моментом t_f , хотя в общем случае имеют разные законы роста по времени ($m_1 \neq m_2$). Показатель n определяет тип режима; если $n < 0$, возникают растущие по амплитуде концентрационные волны (НС-режим), при $n > 0$ и $n = 0$ формируются диссипативные структуры, развивающиеся соответственно в LS- и S-режимах.

4. При исследовании автомодельных решений было установлено, что задача (10)–(12) в S-режиме ($\xi = x$, $n = 0$, $\gamma_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\sigma_2 + 1 - \beta_2)$, $\gamma_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(\sigma_1 + 1 - \beta_1)$) имеет единственное монотонное решение. Типичный вид его представлен на рис. 1. Фундаментальные длины L_{f_1} и L_{f_2} , вообще говоря, различаются и имеют порядок величин

$$\frac{2\pi}{\sigma_i} \sqrt{\frac{q_i}{k_i}(\sigma_i + 1)}, \quad i = 1, 2.$$

5. В частном случае равенств $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, $k_1 = k_2 = k$, $q_1 = q_2 = q$, $\beta_1 + \gamma_2 = \beta_2 + \gamma_1$ система (2) допускает решения $T_1(x, t) = T_2(x, t) = T(x, t)$, удовлетворяющие хорошо изученному уравнению (1). В S-режиме известно аналитическое решение [1]

$$T(x, t) = \left[qt_f \left(1 - \frac{t}{t_f} \right) \frac{\sigma(\sigma + 2)}{2(\sigma + 1)} \right]^{-1/\sigma} \cos^{2/\sigma} \left(\frac{\pi x}{L_f} \right), \quad (13)$$

$$L_f = \frac{2\pi}{\sigma} \sqrt{\frac{q}{k}(\sigma + 1)}.$$

6. С помощью вычислительного эксперимента показан выход при $t \rightarrow t_f$ решений задачи в частных производных (1), (3) на автомодельное решение в широком классе параметров (при $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$) и начальных распределений. Такая независимость от начальных данных позволяет рассматривать автомодельные решения в S-режиме как соб-

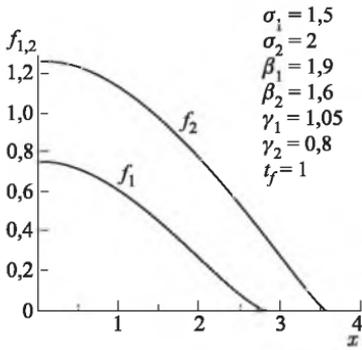


Рис. 1. Собственная функция нелинейной среды

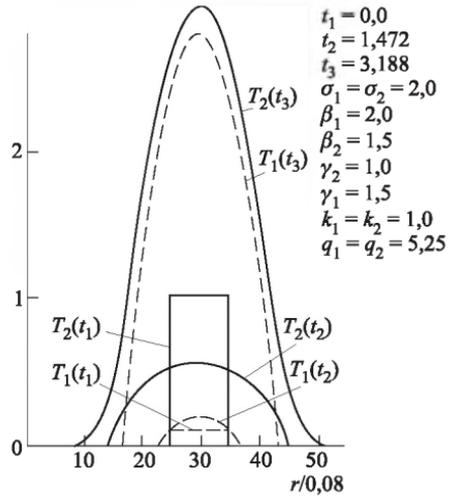


Рис. 2. Выход на с. ф. нелинейной среды. Распределения концентраций в моменты времени t_1-t_4

ственные функции (с. ф.) нелинейной среды. На рис. 2 представлено типичное развитие процессов, когда $T_1^0(x)$ и $T_2^0(x)$ заданы на отрезке размером, меньшем L_{f_i} . Выход на автомодельный режим с высокой точностью наблюдается при росте концентраций на 2 порядка. В общем случае имеет место эффективная локализация: рост концентраций T_1 и T_2 идет согласованно — с одним моментом обострения — в пределах фундаментальных областей L_{f_1} и L_{f_2} , вне L_{f_1} и L_{f_2} функции T_1 и T_2 ограничены при $0 \leq t \leq t_f$. На рис. 3 изображен процесс формирования структуры после взаимодействия концентрационных волн. $T_1(x, 0) \neq 0$ в области 1, $T_2(x, 0) \neq 0$ в области 2. Вначале в среде возникают две концентрационные волны ($t = t_2, t = t_3$) источники при этом остаются нулевыми. Диссипативная структура, локализованная в области L_f , формируется после их пересечения. Область локализации граничит в точках A и B с ненулевым фоном по одной из концентраций.

7. Если равенство (7), обеспечивающее существование автомодельных решений, не выполнено, то, как показывают расчеты, реакции, идущие по каждой компоненте, могут качественно отличаться. Например, по первой концентрации реализуется LS-режим, а по второй — HS-режим (см. рис. 4).

8. Обратим внимание еще на одну особенность изучаемой модели. В средах (1) для возникновения структур, развивающихся в режиме с обострением, необходимо, чтобы $Q \sim T^{1+\sigma}$ ($\sigma > 0$), что является достаточно жестким условием, в то время как в рассматриваемом случае локализация и режимы с обострением могут иметь место,

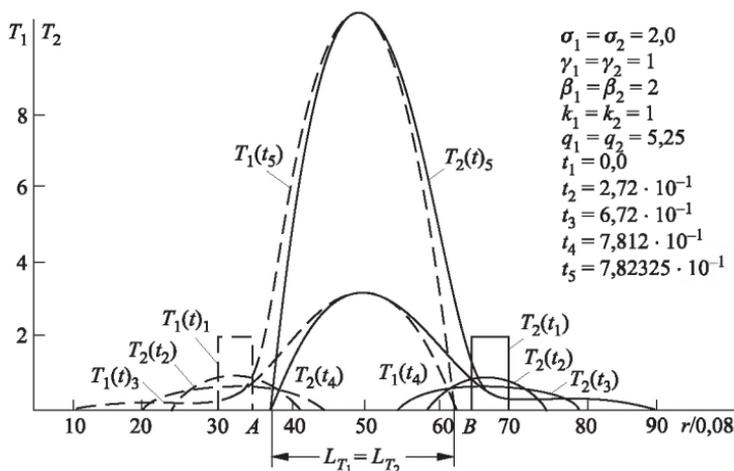


Рис. 3. Формирование диссипативной структуры, развивающейся в S-режиме после взаимодействия концентрационных волн

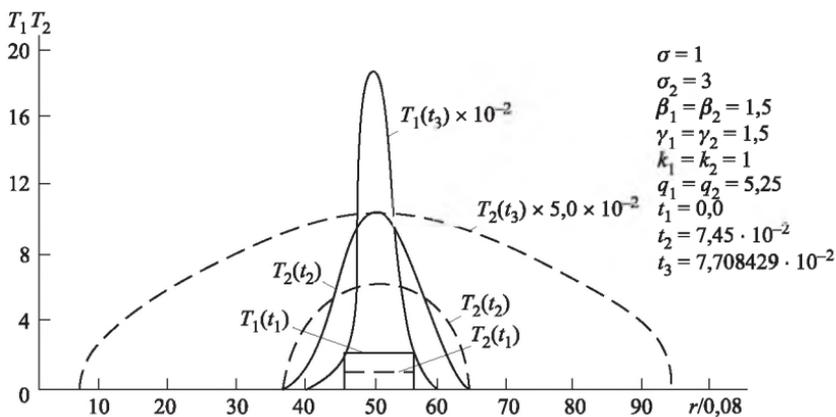


Рис. 4. Смешанный режим (LS-режим по первой концентрации и HS-режим по второй)

когда $Q_1 \sim T_1$, $Q_2 \sim T_2$. Действительно, из проведенного выше анализа следует, что в среде, описываемой системой

$$T_{1f} = (k_1 T_1 T_{1x})_x + q_1 T_1 T_2,$$

$$T_{2f} = (k_2 T_2 T_{2x})_x + q_2 T_1 T_2,$$

может реализоваться S-режим с обострением, а в случае трехкомпонентных сред требования на источники могут быть еще более ослаблены: Q_i может вообще не зависеть от T_i , но линейно зависеть от T_j ,

$j \neq i$. Об этом говорит пример системы

$$\begin{aligned} T_{1t} &= k(T_1 T_{1x})_x + q T_2 T_3, \\ T_{2t} &= k(T_2 T_{2x})_x + q T_1 T_3, \\ T_{3t} &= k(T_3 T_{3x})_x + q T_1 T_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Функции $T_1 = T_2 = T_3 = T$, где T определено (13), являются решением (14). О выходе на это решение в широком классе начальных данных свидетельствуют результаты расчетов в частных производных.

Расширение класса сред, в которых могут наблюдаться нестационарные диссипативные локализованные структуры, позволяет поставить вопрос об их экспериментальном изучении.

Доклады Академии наук СССР.
1981. Т. 258. № 5

Поступила
28.I.1981

Список литературы

1. Самарский А. А., Змитренко Н. В. и др. // ДАН СССР. — 1976. — Т. 227, № 2. — С. 321.
2. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. и др. // Письма в ЖЭТФ. — 1977. — Т. 26, вып. 9.
3. Самарский А. А., Еленин Г. Г. и др. // ДАН СССР. — 1977. — Т. 237, № 6. — С. 1330.
4. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. и др. // ДАН СССР. — 1980. — Т. 251, № 4. — С. 836.
5. Курдюмов С. П., Куркина Е. С. и др. // ДАН СССР. — 1980. — Т. 251, № 3. — С. 587.
6. Курдюмов С. П., Змитренко Н. В. // Журн. прикл. мех. и техн. физ. — 1977. — № 1.
7. Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1980. — № 122.
8. Курдюмов С. П., Куркина Е. С. и др. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1980. — № 125.
9. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. — М.: Мир, 1979.
10. Хакен Г. Синергетика. — М.: Мир, 1980.
11. Галактионов В. А., Курдюмов С. П. и др. // Дифференц. уравнения. — 1980. — Т. 16, № 7. — С. 1196.
12. Галактионов В. А., Курдюмов С. П. и др. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1979. — Т. 19, № 6. — С. 1449.
13. Галактионов В. А., Курдюмов С. П. и др. // ДАН СССР. — 1979. — Т. 248, № 3. — С. 586.

Сейчас перечитываешь эту работу, и понимаешь, насколько сильно время меняет приоритеты и восприятие полученных результатов.

Когда мы обсуждали ее с С. П. Курдюмовым и Е. С. Куркиной в 1980 г., то самыми главными казались два результата. Первый —

режимы с обострением и локализованные структуры могут наблюдаться в средах с источниками, линейными по каждой из концентраций. Значит, жесткие условия на положительную обратную связь ($\beta > 1$) могут быть ослаблены в многокомпонентных системах. Искать такие объекты в эксперименте, разумеется, значительно проще. Второй — кроме «классических» LS-, S- и HS-режимов в многокомпонентных системах существует целый мир — смешанные режимы (LS–HS, S–HS и прочие), в которых законы эволюции распределений для разных концентраций качественно отличаются.

Прошло почти два десятилетия. И многие эффекты, обнаруженные вначале в вычислительном эксперименте, стали привычными и широко известными. Для многих из них удалось пройти путь от компьютерных расчетов до строгой математической теории. И на первый план вышло то, что еще не понято, что хотелось бы сейчас понять и что пока не умеют доказывать.

В области, связанной с исследованиями диссипативных структур, есть два «фонаря», под которыми исследователи ищут легко, успешно и с удовольствием. Это стационарные диссипативные структуры в системах реакция–диффузия, важность которых была осознана после работ И. Пригожина и Брюссельской научной школы, и нестационарные диссипативные структуры, речь о которых идет в этой книге. Это две практически не связанные области со своими идеями, концепциями, аппаратом. Очень важно и интересно было бы перебросить мост между этими двумя областями, найти тропинку между двумя «фонарями». И первые шаги здесь уже сделаны. На мой взгляд, получены очень интересные результаты в задачах о динамике свертывания крови¹⁾. Здесь идеи и представления теории пространственно-локализованных структур (родившиеся в теории режимов с обострением) эффективно использованы при исследовании упорядоченности, возникающей в лабораторных условиях при свертывании крови.

Представленная работа, оказавшаяся волею судьбы на обочине теории, представляет важный шаг в этом направлении.

Она показывает, что на тропинке нас может ожидать много неожиданностей, новое понимание, новые качественные эффекты, иной математический аппарат.

Г. Г. Малинецкий

¹⁾ Новое в синергетике. Взгляд в третье тысячелетие: Сб. статей/Под ред. Г. Г. Малинецкого. — М.: Наука, 2002. — 478 с. — (Сер. «Информатика: неограниченные возможности и возможные ограничения»).

II. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЫ (ТЕОРИЯ СЛОЖНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СТРУКТУР)

Горение нелинейной среды в виде сложных структур

*А. А. Самарский, Г. Г. Еленин, Н. В. Змитренко,
С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов*

В работах [1–4] установлено, что в неподвижной среде с коэффициентом теплопроводности и объемным источником тепла, степенным образом зависящими от температуры, имеют место режимы горения среды с «обострением», сопровождающиеся обращением температуры в бесконечность в конечный момент времени t_f . S- и LS-режимы «обострения» приводят к локализации горения на фундаментальной длине (L_T) и возникновению тепловых структур. Эффект метастабильной локализации тепла и (магнитного поля) рассматривался также в работах [5–10, 12].

В настоящей работе продолжено исследование LS-режима горения среды. Показано, что на развитой стадии процесса распределение температуры внутри области локализации горения описывается решениями нелинейной задачи на собственные значения, имеющей дискретный спектр. Численно находятся собственные функции (с. ф.) этой задачи и дается теоретическая оценка их числа и характера в зависимости от параметров среды. Первой с. ф. соответствует простая структура, старшим собственным функциям — сложные структуры. Формулируется принцип создания сложных структур из простых. Простые структуры не взаимодействуют, если расстояния между ними больше L_t . При определенном перекрытии фундаментальных длин простых структур с определенными максимумами температуры возникают сложные структуры. Степень перекрытия фундаментальных длин простых структур и их максимумы температуры определяются из вида старших собственных функций автомодельной задачи (см. также [2–5]). При таком объединении локализованные и невзаимодействующие простые структуры, имевшие в общем случае разные значения времени обострения t_f , превращаются внутри области локализации сложной структуры в сходящиеся к общему центру симметрии волны горения,

обладающие общим временем t_f . Численный эксперимент показал, что при резонансном задании начальных данных (согласованном с с. ф. автомодельной задачи) возбуждается горение сложных структур.

Горение происходит конечное время в соответствии с автомодельными законами. При нерезонансном возбуждении простые структуры либо сливаются, либо горят независимо, причем на асимптотической стадии процесс вырождается в горение одной простой структуры с наименьшим значением t_f при практически неизменной температуре в окружающей ее среде. Показано, что в рассматриваемой среде можно создать конечное число типов сложных структур, имеющих одинаковый темп горения (одинаковые значения t_f). Таким образом, установлены условия усложнения организации нелинейной среды, горящей в режиме обострения.

1. Для задачи инициирования горения в среде с нелинейной теплопроводностью

$$T_t = (k_0 T^\sigma T_r)_r + q_0 T^\beta, \quad t > 0, \quad k_0 > 0, \quad q_0 > 0, \quad \beta > 1, \\ T(r, 0) = T_0(r), \quad T_r(0, t) = 0, \quad T^\sigma T_r|_{r \rightarrow +\infty} \rightarrow 0, \quad T|_{r \rightarrow +\infty} \rightarrow 0 \quad (1)$$

в области $0 \leq r < +\infty$ исследуется автомодельное решение (см. [1–5]) вида

$$T(r, t) = q_0^n (t_f - t)^n f_0 f(\xi), \quad \xi = r(k_0 q_0^{n\sigma})^{-1/2} f_0^{m/n} (t_f - t)^{-m}, \\ n = (1 - \beta)^{-1}, \quad m = (1 + n\sigma)/2, \quad f_0 = (\beta - 1)^n, \quad (2) \\ t_f = (f_0 f(0)')^{\beta-1} T_0(0)^{1-\beta} / q_0.$$

Функция $f(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$(f^\sigma f')' - \frac{m\xi}{n} f' + f^\beta - f = 0 \quad (3)$$

и граничным условиям

$$f'(0) = 0, \quad f^\sigma f'|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad f|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (4)$$

2. При $\xi \rightarrow \infty$, $\beta > \sigma + 1$ решения задачи (3), (4) имеют асимптотику

$$f(\xi) \sim \xi^{-2/(\beta-\sigma-1)}. \quad (5)$$

Наряду с задачей (4) для уравнения (3) рассмотрим задачу

$$f'(0) = 0, \quad f(\xi)|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow \lambda \xi^{-2/(\beta-\sigma-1)}, \quad (6)$$

где $\lambda > 0$ — собственное число.

Численное интегрирование задачи (3), (6) при фиксированных значениях σ и β позволяет найти несколько соответствующих различным значениям постоянных λ_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Так, например, для $\sigma = 2$,

$\beta = 3,666$ построено четыре решения задачи (см. рис. 1). В этом случае значения $\lambda_1 = 8,75$, $\lambda_2 = 7,98 \cdot 10^1$, $t_3 = 3,85 \cdot 10^2$, $\lambda_4 = 9,48 \times \times 10^3$. Конечное число с. ф. построено и для других значений σ и β ($\beta > \sigma + 1$). В общем случае с. ф. имеют немонотонный, колебательный характер в ограниченной области $0 \leq \xi < \xi_0$. Каждая с. ф. $f_i(\xi)$, $i = 1, 2, \dots, N$, имеет максимумы в точках $\xi_1 < \dots < \xi_{m_i}$. Наибольший максимум i -й с. ф. расположен в точке ξ_{m_i} . Для двух различных с. ф. с $\lambda_{i+1} > \lambda_i$, выполняется неравенство $f_i(\xi_{m_i}) > f_{i+1}(\xi_{m_{i+1}})$. Наибольший и единственный максимум имеет первая с. ф. Старшая с. ф. с максимальным собственным значением λ_N в области, где она немонотонна, имеет характер малых колебаний относительно гомотермического решения ($f(\xi) \equiv 1$). Так, в случае $\sigma = 2$, $\beta = 3,666$ величина $f_N(\xi_{m_N}) - 1 = 0,001$.

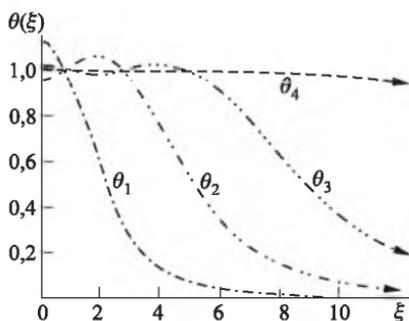


Рис. 1

3. Для определения качественного характера старшей с. ф. $f_N(\xi)$ рассмотрим модельное уравнение, описывающее поведение решений (3) вблизи гомотермического решения ($f(\xi) \equiv 1$). Пусть $f(\xi) = 1 + y(\xi)$, $|y(\xi)| \ll 1$, тогда в рамках линейного приближения получим из (3) уравнение

$$y'' - 0,5(\beta - \sigma - 1)\xi y' + (\beta - 1)y = 0, \quad (7)$$

решение которого при условии $y'(0) = 0$ имеет вид

$$y(\xi) = C_1 \Phi(-(\beta - 1)(\beta - \sigma - 1)^{-1}, 0,5, 0,25(\beta - \sigma - 1)\xi^2), \quad (8)$$

где $\Phi(a, b, x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [11]; C_1 — произвольная постоянная. Если σ и $\beta = \beta_M$ таковы, что

$$(\beta_M - 1)(\beta_M - \sigma - 1)^{-1} = M, \quad M = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

$$y(\xi) = C_2 H_{2M}(0,5\sqrt{\beta - \sigma - 1}\xi), \quad (10)$$

где $H_{2M}(x)$ — полином Эрмита степени $2M$. Полином Эрмита имеет M нулей на полуоси $0 \leq x < +\infty$ в точках $x_1 < x_2 < \dots < x_M$. Если при фиксированном σ значение β таково, что справедливо неравенство

$$\sigma + 1 < \beta_M \leq \beta < \beta_{M-1}, \quad (11)$$

то решение (8) имеет M нулей на полуоси $0 < \xi < +\infty$ (см. [11]).

4. Численные расчеты показывают, что число с. ф. задачи (3), (5) совпадает с числом нулей решения (8). Итак, задача (3), (5) имеет конечное число с. ф. $f_i(\xi)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Число N определяется по формуле (12) с помощью функции $[a]$ — целой части числа a :

$$N = [a - \frac{[a]}{a}] + 1, \quad (12)$$

$$a = (\beta - 1)(\beta - \sigma - 1)^{-1}.$$

Каждое решение $f_i(\xi)$ представляет собой при $i \geq 2$ тепловую волну, удовлетворяющую задаче (1), в которой все максимумы температуры в соответствии с автомодельными законами (2) движутся к центру симметрии $r = 0$ и приходят в центр за время обострения t_f .

5. Исследование структурной устойчивости решений (2) задачи (1) проводили численно (см. [9]). Каждое из решений $f_i(\xi)$ (12) использовали в качестве начального условия задачи (1). Полученные численные решения в различные моменты времени t_i сравнивали с решением (2). Численный эксперимент показал, что первая с. ф., имеющая один центральный максимум, устойчива. Сравнение численного решения (сплошная линия) с автомодельным решением (штриховая), имеющим один центральный максимум (вторая с. ф.), приведено на рис. 2 ($t_1 = 0,436656$; $t_2 = 0,436863$; $t_3 = 0,46888$; $t_4 = 0,46896$). Оба решения с достаточной точностью совпадают в области локализации при росте температуры в 700 раз по сравнению с начальной температурой. Благодаря явлению локализации горения в LS-режиме происходит обрезание «хвоста» автомодельного решения [1–4].

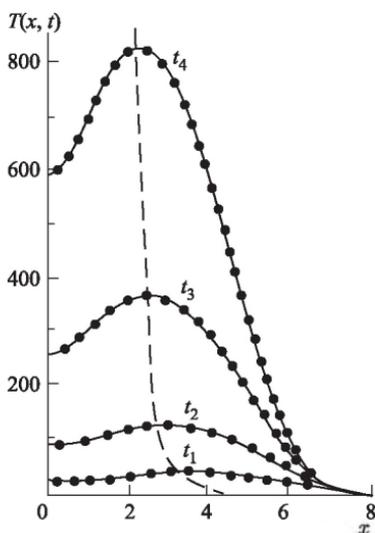


Рис. 2

Распределения температуры, соответствующие старшим с. ф., являются резонансными начальными данными для возбуждения горения сложных структур. Для выяснения роли резонансного возбуждения горения рассматривали также нерезонансные начальные данные в виде температурных распределений (12), подвергнутых возмущениям типа растяжения–сжатия. Задавали начальное условие вида $T_i(x, 0) = f_i(Rx)$, где $R < 1$ соответствует растяжению, а $R > 1$ — сжатию распределения температуры соответствующего с. ф. горения. На рис. 3 приведены результаты расчета сжатого профиля ($i = 2$, $\sigma = 2$, $\beta = 3,1818$, $R = 1,002$, $t_1 = 0,436630$; $t_2 = 0,436845$; $t_3 = 0,436868$; $t_4 = 0,436874$).

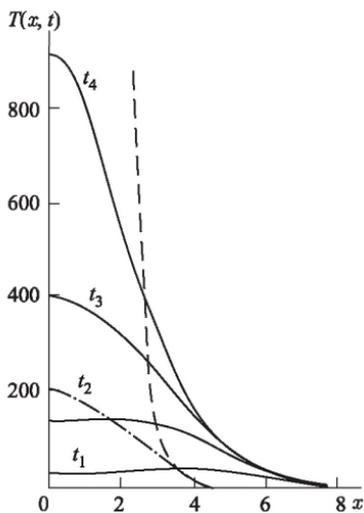


Рис. 3

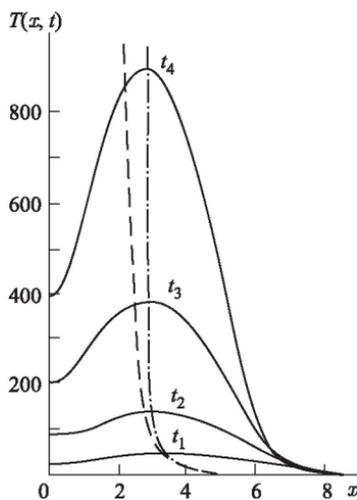


Рис. 4

На рисунках 3 и 4 штрихпунктирными линиями показаны траектории движения максимума температур, штриховыми — соответствующие автомодельные траектории.

Сжатие начального профиля приводит к повышению скорости движения максимума температуры к центру симметрии и вырождению второй с.ф. в первую. При растяжении начального распределения ($i = 2$, $\sigma = 2$, $\beta = 3,1818$, $R = 0,99$) максимум температуры прекращает движение в центр и горение локализуется на фундаментальной длине (ф.д.) LS-режима (см. рис.4, $t_1 = 0,436710$; $t_2 = 0,436886$; $t_3 = 0,436906$; $t_4 = 0,436911$). Процесс горения в виде старших с.ф. соответствует автомодельным законам при увеличении температуры в структуре лишь в несколько десятков раз. Затем происходит вырождение старших с.ф. При этом умеренные растяжения приводят к локализации горения в области максимумов температуры, близких к центру симметрии. При более сильных растяжениях происходит локализация горения в области максимумов температуры, находящихся на больших расстояниях от центра симметрии.

6. Описанное выше поведение решения исходной задачи объясняется с помощью введенного в [1–5] понятия ф. д. LS-режима. Вычисления показывают, что ф. д. для каждого максимума температуры в волне близка по величине к расстоянию между соседними минимумами, окружающими данный максимум. При задании начальных данных в соответствии с автомодельным решением, т.е. при определенном перекрытии ф. д. и определенном подборе максимумов температуры, в простых структурах образуется волна горения, сходящаяся за время t_f к общему центру симметрии в соответствии с автомодельным законом. При растяжении начального автомодельного распределения температу-

ры не происходит перекрытия ф. д. и каждый максимум температуры T_{\max} инициирует горение в резонансной области, ограниченной ф. д., независимо от соседних областей. При сжатии начального автомоделного распределения температуры происходит чрезмерное перекрытие ф. д., нарушение согласованного режима горения и быстрое вырождение старших с. ф. в первую с. ф. Аналогичный процесс отмечался также в работе [3].

Доклады Академии наук СССР.
1977. Т. 237. № 6

Поступила
03.10.1977

Список литературы

1. Самарский А. А., Змитренко Н. В. и др. // ДАН СССР. — 1976. — Т. 227, № 2. — С. 321.
2. Курдюмов С. П. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1976. — № 39.
3. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. и др. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1976. — № 74.
4. Самарский А. А., Курдюмов С. П. и др. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1976. — № 109.
5. Курдюмов С. П., Змитренко Н. В. // Журн. прикл. мех. и техн. физ. — 1977. — № 1. — С. 3.
6. Самарский А. А., Соболев И. М. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1963. — Т. 3, № 4. — С. 702.
7. Курдюмов С. П. Проблемы теории плазмы. — Киев: Наукова думка, 1976.
8. Самарский А. А., Змитренко Н. В. и др. // ДАН СССР. — 1975. — Т. 223, № 6. — С. 1344.
9. Курдюмов С. П. // Материалы объединенного семинара по вычислительной физике, Сухуми, 1973. — Тбилиси: ТГУ, 1976.
10. Курдюмов С. П. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1975. — № 18.
11. Бейтмен Г., Эрдейи А. Вышие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. — М.: Наука, 1965.
12. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. и др. // ДАН СССР. — 1974. — Т. 218. — С. 1306; ДАН СССР. — 1974. — Т. 219. — С. 578; Препринт ИПМ АН СССР. — 1974. — № 19; Деп. ВИНТИ. — 1973. — № 3398.

С. П. и К°

Счастье — это когда имеешь шесть друзей: мужчину и женщину старше себя, двух ровесников, мужчину и женщину младше себя.

Торнтон Уайлдер.
Теофил Норт (1973)

Уверен, что многие с первых минут общения с Сергеем Павловичем Курдюмовым попадают под его обаяние на долгие годы, в особенности молодые, восприимчивые и активные люди.

Судьбе было угодно познакомить трех студентов группы 538 факультета аэромеханики и космических исследований Московского физико-технического института: Володю Дородницына, Сашу Михайлова и меня, с Сергеем Павловичем Курдюмовым в отделе № 3 Института прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР, где мы проходили дипломную практику тридцать лет назад. В то время в отделе активно изучалось новое нелинейное явление в низкотемпературной плазме — спонтанно возникающий высокотемпературный слой. Впоследствии, как хорошо известно, явление Т-слоя было обнаружено в эксперименте и зарегистрировано как первое открытие в нашей стране, осуществленное с помощью электронно-вычислительной машины. Ветераны ИПМ РАН знают, как трудно переоценить роль Сергея Павловича в этом открытии.

Сергей Павлович привлек нас, студентов четвертого курса, к работе. Мы получали огромные выдачи с результатами многочасовых расчетов, выполненных с помощью «свеженьких» вычислительных алгоритмов, цветными фломастерами рисовали многочисленные графики и присутствовали при обсуждении результатов со старшими товарищами, физтехами предыдущего «поколения»: Львом Дегтяревым, Евгением Левановым, Юрием Поповым и Антоном Фаворским. К тому времени они внесли существенный вклад в развитие вычислительных методов, работая вместе с Александром Андреевичем Самарским. Достаточно вспомнить полностью консервативные разностные схемы или метод потоковой прогонки. Так нас, в замечательное время надежд и свершений, познакомили с миром нелинейных явлений, системами уравнений в частных производных и новейшими по тем временам вычислительными алгоритмами.

В. А. Дородницын занялся исследованием задачи о множественных Т-слоях в рельсотроне. А. П. Михайлов начал изучать газодинамическую задачу о поршне. Сергей Павлович предложил мне заняться исследованием явления периодического бора. Это явление заключается в спонтанном возникновении бегущей волны с периодическим пространственным профилем свободной поверхности слоя жидкости, текущей в наклонном канале с шероховатым дном, и внешне было похоже на возникновение размножающихся в рельсотроне токовых слоев. Предстояло определить «движущие силы» процесса спонтанного понижения степени симметрии в рамках нелинейной теории мелкой воды. Так Сергей Павлович ввел меня, как выяснилось позже, в только что зарождающуюся междисциплинарную область современной науки. Теперь эту область принято называть синергетикой, с легкой руки профессора Германа Хакена. Довольно быстро стало ясно, что нельзя ограничиваться численными расчетами нестационарной задачи о периодическом боре, и полноценный ответ на вопрос о «механизме» критического явления может быть получен лишь в сочетании с методами теории ветвления решений нелинейных уравнений. Так студент Физтеха,

благодаря научному руководителю, стал приверженцем, а позже и популяризатором хорошего стиля в нелинейных исследованиях — сочетать вычислительные методы и методы бифуркационного анализа. С тех пор с каждым годом мой интерес к теоретическому и экспериментальному исследованию динамики неравновесных фазовых переходов в открытых системах, далеких от термодинамического равновесия, возрастает в «режиме с обострением».

В самом начале семидесятых возник большой интерес к проблеме безударного сжатия вещества. В то время сотрудниками Института совместно с физиками из других институтов за немалые сроки решались задачи о необходимых режимах воздействия на вещество и о влиянии многочисленных сопутствующих явлений. Если не ошибаюсь, летом 1972 г. Сергей Павлович предложил рассматривать не всю совокупность уравнений радиационной магнитной гидродинамики для анализа этой проблемы, а лишь одно квазилинейное уравнение теплопроводности с нелинейным источником:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \partial \left(T^\sigma \frac{\partial T}{\partial x} \right) / \partial x + q T^\beta, \quad 0 < \sigma, \quad 0 < \beta, \quad k, q > 0. \quad (*)$$

Так была создана новая, позже ставшая классической, нелинейная модель для исследования режимов с обострением и пространственной локализации в открытой диссипативной системе. Оказалось, что эта внешне предельно простая нелинейная модель богата нетривиальными динамическими режимами, парадоксальными с точки зрения привычной линейной теории параболических уравнений.

Описание парадоксальности режимов в этой модели можно начать с напоминания о пари, заключенном много лет назад двумя очень уважаемыми профессорами, сотрудниками Института прикладной математики. Пари касалось уравнения без источника ($q = 0$). На вопрос: «Может ли тепловой фронт распространяться с конечной скоростью?» — последовал отрицательный ответ, правильный в рамках линейной теории. Такой ответ, согласно фольклору, привел к проигрышу шоколадки. Дело в том, что к тому времени Яковом Борисовичем Зельдовичем и Александром Соломоновичем Компанейцем уже было установлено, что при $\sigma > 1$ скорость движения тепловой волны по нулевому температурному фону ограничена.

Еще более парадоксальные особенности динамических режимов (обострение, локализация) обнаружили в теплопроводной среде с объемным нелинейным источником. Я включился в команду Сергея Павловича по исследованию режимов с обострением, когда в ней уже работали Коля Змитренко и Саша Михайлов. А. П. Михайлов совместно с Сергеем Павловичем изучал действие граничных режимов с обострением и занимался задачей «теплового кристалла».

Н. В. Змитренко и Сергей Павлович к тому времени провели большой цикл исследований автомодельных режимов для системы уравнений магнитной газовой динамики и нашли нетривиальные диссипативные структуры при наличии магнитного поля. Кроме того, в их работе по исследованию модели (*) было найдено точное аналитическое решение смешанной задачи для случая $\beta = \sigma + 1$. Такое соотношение степеней коэффициента температуропроводности и теплового источника соответствовало пространственной локализации горячей области на фундаментальной длине в так называемом S-режиме обострения. Суть этого важного для понимания проблемы решения заключается в том, что, благодаря взаимодействию нелинейного источника и нелинейного коэффициента теплопроводности, бесконечное значение температуры достигается за конечное время (время обострения) на конечной длине (фундаментальная длина) несмотря на наличие неограниченно растущего коэффициента теплопроводности! Интересно, что фундаментальная длина не зависит от вида начального распределения температуры в активной среде и определяется лишь параметрами, входящими в уравнение (*). Было ясно, что при $1 < \beta < \sigma + 1$ прогрев среды осуществляется в так называемом HS-режиме с обострением, когда за конечное время температурная волна прогревает всю среду до бесконечной температуры. Также было ясно, что при $\beta > \sigma + 1$ (LS-режим) полуширина области интенсивного нагрева за конечное время стремится к нулю. Предстояло детально исследовать LS-режим. Эта задача была поручена мне. Результаты исследований были опубликованы в объемном препринте Института прикладной математики, в статье в Докладах Академии Наук, в журнале Вычислительной математики и математического физики и Сборнике работ Международного математического центра им. Стефана Банаха в Варшаве. Основным результатом работы заключался в обнаружении конечного числа собственных функций нелинейного дифференциального оператора и определении зависимости числа нетривиальных решений от степеней в зависимостях коэффициента температуропроводности и источника тепла от температуры:

$$N = [A - \frac{[A]}{[A]} + 1],$$

[*] — целая часть числа, $A = (\beta - 1)/(\beta - (\sigma + 1))$. Собственные функции были ничем иным, как диссипативными структурами LS-режима с обострением. Эта работа впоследствии стимулировала целый ряд чисто математических работ и вычислительных экспериментов по исследованию LS-режимов в многомерных активных средах. Наиболее интересные, на мой взгляд, результаты были получены для двумерной теплопроводной среды Сергеем Павловичем совместно с Алексеем Потаповым, а также со Стефкой Димовой, сотрудницей Академии наук Болгарии.

В процессе исследования LS-режима возникла идея осреднения, позволяющая описать особенности эволюции финитных начальных распределений лишь в терминах их амплитуды и полуширины. Осреднение привело к нелинейной динамической системе в двумерном фазовом пространстве. Полное качественное исследование системы позволило классифицировать все динамические режимы, и что наиболее интересно, описать динамику выхода на автономные режимы для широкого класса начальных условий. В этих исследованиях принимал участие Константин Плохотников, в то время студент Физтеха. Результаты наших исследований «сокращенного» описания возможных динамических режимов в модели (*) были опубликованы в препринте Института прикладной математики.

Некоторое время спустя в школу Сергея Павловича пришли талантливые и активные молодые люди следующего «поколения»: Виктор Галактионов, Татьяна Ахромеева, Георгий Малинецкий, Сергей Посашков, Алексей Потапов и другие. Многие результаты, полученные впервые в вычислительном эксперименте, обрели форму теорем. Существенную роль здесь играл В. А. Галактионов. Усилия и энергия Г. Г. Малинецкого привели к расширению тематики нелинейных исследований. От континуальных моделей был осуществлен переход к дискретным моделям. Были опубликованы многочисленные статьи, научно-популярные брошюры общества «Знание» и монографии. В последнее время методы исследования режимов с обострением нашли эффективное применение при анализе глобальных демографических проблем, разрабатываемых Сергеем Петровичем Капицей.

Шло время, студенты становились аспирантами, аспиранты — младшими научными сотрудниками, младшие научные сотрудники — старшими научными сотрудниками, старшие научные сотрудники — профессорами. Многие из нас, учеников Сергея Павловича, стали разрабатывать свои собственные научные направления, руководить научными группами на родине и за границей, готовить дипломников, аспирантов, самостоятельно мыслящих научных сотрудников. Так, например, профессор Владимир Анатольевич Дородницын, в свое время заинтересовавшись методами групповой классификации дифференциальных уравнений и анализом инвариантных решений, в настоящее время успешно развивает новое направление в конструировании инвариантных разностных схем. Профессор Александр Петрович Михайлов занимается непростым делом моделирования властных структур. Профессор Виктор Александрович Галактионов в одном из университетов Великобритании продолжает исследования, начатые в группе Сергея Павловича. В Московском государственном университете Константин Эдуардович Плохотников разрабатывает нормативную модель истории. И этот список можно существенным образом продолжить.

В заключение не могу не сказать несколько слов об особенностях научной команды С. П., которые в значительной мере определяются личностью самого Сергея Павловича.

Сергею Павловичу абсолютно чужда Птолемеева модель мира. Он никогда не помещал себя в центр Вселенной. Обсуждения среди сотрудников, студентов и аспирантов всегда проходили на равных. С. П. мог убедить и можно было убедить С. П.

Сергей Павлович по отношению к людям исповедует принцип: «Не навреди», проявляет истинный демократизм, доверие, терпение, благородство и галантность. Он никогда никого из нее не изгонял. Команда всегда была открытой системой. В нее входили увлеченные студенты. Из нее выходили самостоятельно мыслящие ученые. Не было проблем иметь свое собственное мнение, следовать своим идеалам и увлечениям.

Более семнадцати лет я формально не работал с Сергеем Павловичем. Однако в течение этого времени в его гостеприимном доме, как и многие, обсуждал свои проблемы и свои научные результаты. В трудные моменты получал совет и поддержку.

За все это спасибо Вам, Сергей Павлович!

Г. Г. Еленин

Архитектура многомерных тепловых структур

*С. П. Курдюмов, Е. С. Куркина, А. Б. Потапов,
А. А. Самарский*

Известно, что в среде с коэффициентом теплопроводности и объемным источником тепла, степенным образом зависящими от температуры, процессы горения могут идти в режиме с обострением [1–5]. При определенных условиях возникает явление локализации тепла, приводящее к появлению нестационарных диссипативных структур [2–12]. Исследования одномерной задачи Коши показали, что процессы горения могут развиваться в виде структур разной сложности и собственные функции нелинейной автомодельной задачи описывают их типы [2–5]. Многомерные вычислительные эксперименты выявили особенности протекания процессов в двумерном и трехмерном пространствах и также обнаружили явление локализации и существование структур [4–13].

В настоящей работе рассматривается фундаментальная задача поиска всех типов многомерных структур, которые могут быть возбуждены в заданной нелинейной среде. С нашей точки зрения, она сводится к исследованию многомерных автомодельных решений, не однородных

по углу. В работе аналитически построены хорошие приближения к автомодельным решениям, дающие возможность проанализировать архитектуру сложных собственных функций, оценить размеры и форму областей локализации и в некоторых случаях построить решения численно.

1. Для задачи Коши, описывающей процесс горения среды

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} (k_0 T^\sigma \operatorname{grad} T) + q_0 \rho T^\beta, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$k_0, q_0 > 0; \quad \sigma > 0, \quad \beta > \sigma + 1; \quad \rho = A r^{s-2}, \quad s > 0, \quad A > 0;$$

$$T|_{t=0} = T_0(r), \quad r^l T^\sigma \operatorname{grad} T \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0, \quad T \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0, \quad (2)$$

исследуются автомодельные решения вида

$$T(r, t) = g(t) y^{1/(\sigma+1)}(\xi), \quad \xi = \frac{r}{\psi(t)}, \quad \xi = |\xi|, \quad (3)$$

$$g(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{-\mu}, \quad \psi(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^\nu, \quad (4)$$

$$\mu = \frac{1}{\beta - 1}, \quad \nu = \frac{\beta - \sigma - 1}{s(\beta - 1)},$$

где τ — момент обострения. Удобно провести преобразование координат: $\hat{t} = t_0 t$, $\hat{\mathbf{r}} = r_0 \mathbf{r}$, $t_0 = q_0 c_V^{-1}$, $r_0 = (A k_0 q_0^{-1})^{1/s}$ и выбрать $\tau = t_0 \mu$. Тогда функция $y(\xi)$ удовлетворяет квазилинейному эллиптическому уравнению

$$\frac{1}{(\sigma+1)} \Delta y = \frac{\beta - \sigma - 1}{s} \xi^{s-1} \frac{\partial}{\partial \xi} y^{1/(\sigma+1)} - \xi^{s-2} (y^{\beta/(\sigma+1)} - y^{1/(\sigma+1)}) \quad (5)$$

и граничным условиям

$$y(0) < \infty, \quad \xi^l \frac{\partial y}{\partial \xi} \xrightarrow[\xi \rightarrow \infty]{} 0, \quad y \xrightarrow[\xi \rightarrow \infty]{} 0; \quad (6)$$

$l + 1$ — размерность пространства.

2. Рассмотрим двумерный случай. Анализируя автомодельное уравнение, получаем следующую асимптотику решений при $\xi \rightarrow \infty$:

$$y(\xi, \varphi) \rightarrow c(\varphi) \xi^{-p} + \dots, \quad p = \frac{(\sigma + 1)\beta}{\beta - \sigma - 1}, \quad c(\varphi) > 0. \quad (7)$$

Уравнение (5) имеет пространственно-однородное (гомотермическое) решение $y_0 = 1$. Около него аналогично [10, 4, 7] линеаризуем (5), положив $y = 1 + u$, $|u| \ll 1$. Тогда относительно функции $u(\xi, \varphi)$ получим линейное уравнение

$$\Delta u - \frac{\beta - \sigma - 1}{s} \xi^{s-1} \frac{\partial u}{\partial \xi} + (\beta - 1) \xi^{s-2} u = 0. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) при условии ограниченности u при $\xi = 0$ имеет вид

$$u(\xi, \varphi) = \sum_{m \geq 0} \alpha_m R_m(\xi) \cos(m\varphi + \varphi_{0m}),$$

$$R_m(\xi) = \xi^m M \left(-a_m, b, \frac{\beta - \sigma - 1}{s^2} \xi^s \right), \quad (9)$$

$$a_m = a - \frac{m}{s}, \quad a = \frac{\beta - 1}{\beta - \sigma - 1}, \quad b = 1 + \frac{2m}{s}.$$

$M(a, b, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция; α_m — произвольные постоянные.

Предположим, что многомерные собственные функции (с. ф.) связаны с решениями линеаризованного уравнения (8), как и частные цилиндрически-симметричные решения $y_i(\xi)$. А именно, в области немонотонности они совершают колебания около плоскости $y_0 = 1$ и аппроксимируются функциями $u(\xi, \varphi)$, а вне этой области при $\xi > \xi^*(\varphi)$ описываются асимптотикой (7). В одномерном случае удалось построить хорошие приближения к решениям $y_i(\xi)$ путем сшивания функции $1 + u(\xi)$ ($u = \alpha_0 R_0(\xi)$) с асимптотикой с. ф. (7) в некоторых точках ξ_i так, чтобы полученная функция $\tilde{y}_i(\xi)$ обладала необходимой гладкостью. Число таких приближений совпадает с числом с. ф. $y_i(\xi)$ [6].

Двумерные приближения удалось построить в случае, когда переменные ξ и φ в $u(\xi, \varphi)$ разделяются: $u = \alpha_m R_m(\xi) \cos m\varphi$. Это эквивалентно гипотезе о том, что в с. ф. доминирует m -я гармоника по φ , а влиянием остальных можно пренебречь. Численное решение нелинейной задачи во многих случаях подтвердило эту гипотезу.

Для сшивания в двумерном случае использовалась следующая методика. Строились две функции

$$f_i(\xi) = \begin{cases} 1 + \alpha_j R_m(\xi), & \xi \leq \xi_j, \\ C_j \xi^{-p}, & \xi > \xi_j, \end{cases}, \quad (10)$$

$$f_{i+1}^*(\xi) = \begin{cases} 1 - \alpha_j R_m(\xi), & \xi \leq \xi_{j+1}^*, \\ C_{j+1}^* \xi^{-p}, & \xi > \xi_{j+1}^*. \end{cases}$$

Неизвестные параметры находились из условий $f_i, f_{j+1} > 0$, $f_j \in C^2$, $f_{j+1}^* \in C^1$; число экстремумов функции равно ее индексу. В качестве приближения выбиралась функция

$$\tilde{y}_{mj}(\xi, \varphi) = G(\xi) + R^*(\xi) \cos m\varphi, \quad (11)$$

где $G(\xi) = 1/2(f_i + f_{j+1}^*)$, $R^*(\xi) = 1/2(f_i - f_{j+1}^*)$. При $\xi > \xi_j$ $G(\xi) = 1$, $R^*(\xi) = \alpha_j R_m(\xi)$, а при $\xi > \xi_{j+1}$ $G \rightarrow 0$ и $R^* \rightarrow 0$ как ξ^{-p} . С. ф., приближения к которым строятся этим способом, будем обозначать $EjMm$. Число приближений для каждого m равно числу локальных экстремумов функции $R_m(\xi)$ при $\xi > 0$

$$N_m = [a_m + [[a_m]a_m^{-1}]] + 1. \quad (12)$$

С ростом m величины a_m и N_m уменьшаются; при $m \geq as$ имеем $a_m \leq 0$, $R_m(\xi)$ становится монотонной и приближений построить нельзя. Полное число приближений, которым оценивается количество с. ф. $EjMm$, составляет

$$N = \sum_{0 \leq m < as} \{ [a_m - [[a_m]a_m^{-1}]] + 1 \}.$$

3. Таким образом, линейный анализ предсказывает конечное число с. ф. $EjMm$, которое определяется лишь параметрами самой среды. Все они имеют вид системы максимумов («холмов»), расположенных

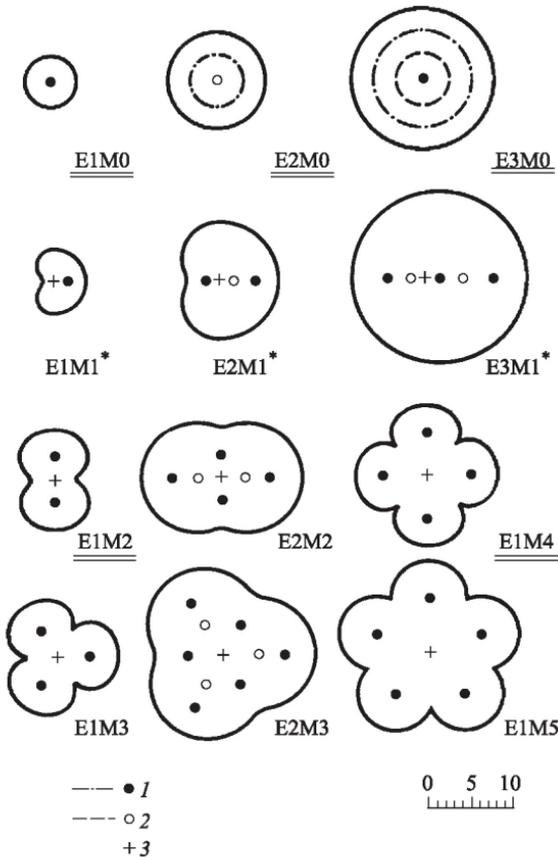


Рис. 1. Расположение максимумов и минимумов и форма эффективной области локализации для линейных приближений к с. ф. $EjMm$ $\beta = 2,5$, $\delta = 1$; $s = 2$. Подчеркнутые с. ф. получены численно. При $m = 1$ (отмечено звездочкой) с. ф., по-видимому, не существуют, так как центр, к которому должна сходиться несимметричная тепловая волна, физически не выделен: $s = 2$, плотность среды постоянна в пространстве. 1 — максимум; 2 — минимум; 3 — центр ($\xi = 0$)

вблизи точки $\xi = 0$. Удобно классифицировать их по количеству и расположению максимумов согласно значениям m и j . При $j = 1$ с. ф. имеет m максимумов, находящихся на окружности в углах правильного m -угольника. В случае $j = 2$ максимумы расположены в два слоя на двух concentрических окружностях по m штук на каждой, в углах правильных m -угольников, причем m -угольники повернуты на угол π/m друг относительно друга. Аналогично организованы и другие приближения $EjMm$: они имеют jm максимумов, находящихся на concentрических окружностях по m штук на каждой в вершинах правильных m -угольников. Таким образом, усложнение организации идет по двум направлениям: увеличение числа максимумов в слое и увеличение числа слоев. Это схематически иллюстрирует рис. 1. Там же показаны формы эффективных областей локализации соответствующих приближений (линии уровня $y = 0, 1$).

4. Используя развитую методику, можно построить еще один класс линейных приближений $-Ei/j$, проводя разделение переменных в декартовой системе координат (при целых s) и шивание с асимптотикой отдельно по каждой переменной. Принцип расположения максимумов и минимумов в них иной, чем в $EjMm$, но имеются и сходные приближения из разных классов.

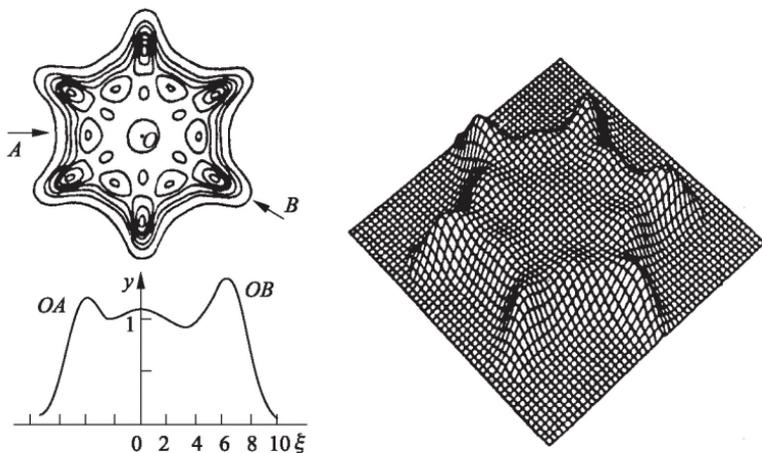


Рис. 2. Собственная функция $E2M6$; $\beta = 3,5$, $\sigma = 2$, $s = 2,5$. Приведены линии уровня, сечения OA и OB (показаны стрелками) и перспективная проекция поверхности $y(\xi, \varphi)$

Наличие линейных приближений позволило построить некоторые с. ф. численно и тем самым подтвердить их существование. При этом функции \tilde{y} служили в качестве нулевого приближения, обеспечивая сходимость итераций к соответствующей с. ф. Всего было построено свыше 20 с. ф. при различных значениях β, σ, s . Наибольшее коли-

чество структур из числа предсказанных удалось построить в классе Ei/j при $\beta = 3,5$, $\sigma = 2$, $s = 2$ (11 из 15). В большинстве случаев форма решений (количество и расположение максимумов и минимумов и соотношение их высот, форма эффективной области локализации) хорошо передавались линейными приближениями (см., например, рис. 2). Отклонения от предсказаний наблюдались лишь для одной полученной с. ф. (рис. 3).

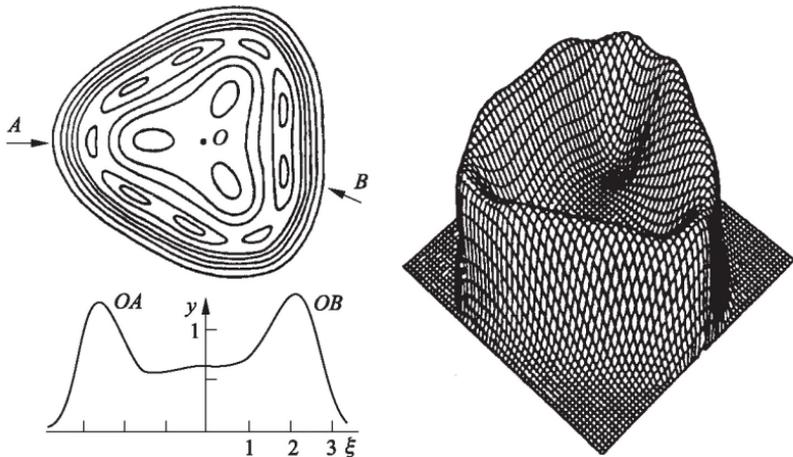


Рис. 3. Собственная функция $\beta = 3,5$, $\sigma = 2$, $s = 4$. Приведены линии уровня, два сечения и перспективная проекция поверхности. Вид с.ф. лучше всего описывается линейным приближением $E2M3$, однако полностью не совпадает с предсказанием: раздвоение максимумов внутреннего слоя; максимумы внутреннего слоя выше, чем внешнего; в центре y значительно меньше 1. Предположение о доминировании 3-й гармонике нарушается, велико также влияние 0-й и 6-й гармоник

В связи с этим возникают вопросы: существуют ли другие классы двумерных с. ф. и каково число с. ф. в каждом классе? В настоящее время оба вопроса остаются открытыми.

В трехмерной задаче также можно построить систему линейных приближений, разделяя переменные ξ, θ, ϕ , выделяя отдельные гармоники по переменным θ и ϕ ($P_l^m(\cos \theta) \cos m\phi$) и проводя сшивание с асимптотикой по ξ . Таких приближений получается конечное число $N(\beta, \sigma, s)$. При $s = 2$ можно построить класс приближений (аналог Ei/j), проводя разделение переменных и сшивание в декартовых координатах.

5. Исследуемые с. ф. являются нестационарными диссипативными структурами. Из (3) и (4) следует, что они существуют конечное время τ и развиваются в режиме с обострением. Так как $\beta > \sigma + 1$, то максимумы распределения температуры движутся к центру и при $t = \tau$

падают на него. Таким образом, автомодельные решения описывают процессы горения в виде сходящихся к центру тепловых волн различной формы (LS-режим [1–5]).

Собственные функции $y \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$, но в ноль нигде не обращаются. Однако, исходя из анализа одномерного случая [1–4, 7, 8, 10], многомерных расчетов [13] и анализа асимптотики (7), можно утверждать, что приравнивание нулю с. ф. вне линии уровня $y = 0,01$ не влияет на процесс горения, т. е. структуры фактически локализованы. Примеры различных форм областей локализации приведены на рис. 1.

Итак, задание свойств нелинейной среды определяет типы диссипативных структур, их многомерную архитектуру и эволюцию во времени. Развитие такого подхода может иметь применения в задачах единой теории поля, физики плазмы и задачах синергетики.

Доклады Академии наук СССР.

1984. Т. 274. № 5

Поступила

27.06.1983

Список литературы

1. Самарский А. А., Змитренко Н. В. и др. // ДАН СССР. — 1976. — Т. 227, № 2. — С. 321.
2. Самарский А. А., Еленин Г. Г. и др. // ДАН СССР. — 1976. — Т. 237, № 6. — С. 1330.
3. Курдюмов С. П., Куркина Е. С. и др. // ДАН СССР. — 1980. — Т. 251, № 3. — С. 587.
4. Курдюмов С. П. // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. — М.: Наука, 1982.
5. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1979. — № 29.
6. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Потапов А. Б. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1982. — № 75.
7. Еленин Г. Г., Самарский А. А., Курдюмов С. П. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 1983. — Т. 23, № 2. — С. 380.
8. Галактионов В. А., Курдюмов С. П. и др. // Дифференц. уравнения. — 1981. — Т. 17, № 10. — С. 1826.
9. Адьютов М. М., Клоков Ю. А., Михайлов А. П. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1982. — № 108.
10. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П. // Препринт ИПМ АН СССР. — 1977. — № 106.
11. Змитренко Н. В., Михайлов А. П. // Сер. «Математика, кибернетика». — М.: Знание, 1982. — № 12.
12. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. // Там же. — 1983. — № 2.
13. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. и др. // ДАН СССР. — 1980. — Т. 21, № 4. — С. 836.

Статья продолжает исследования тепловых структур, начатые в работах С. П. Курдюмова, Г. Г. Еленина, Г. Г. Малинецкого и др. После того, как были найдены одномерные собственные функции LS-режима, была сформулирована задача поиска многомерных

структур. В численных экспериментах было показано, что симметричные комбинации из нескольких пиков действительно проявляют некоторую склонность к взаимодействию и согласованному росту, однако получить таким путем искомые собственные функции не удавалось.

В данной работе была предложена техника построения двумерных тепловых структур и их классификация, а также сделаны оценки возможного их количества. Таким образом, в проблеме исследования нелинейных сред был сделан небольшой шаг к реальности — от одномерных к многомерным задачам.

А. Б. Потапов

О приближенном исследовании симметричных локализованных структур

С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, А. Б. Потапов

В последние годы было показано, что в одной и той же нелинейной среде может существовать целый набор сложных пространственно-локализованных структур [1, 7, 10]. Этот эффект имеет принципиальное значение, поскольку позволяет предложить новые способы управления процессами в таких средах. Близкие проблемы, связанные с поиском локализованных решений, возникают и в ряде других задач.

Часто удается свести задачу к поиску стационарных или, в более общем случае, автономных решений. В случае одной пространственной переменной получается система обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта ситуация сейчас исследована достаточно подробно [1]. Однако уже в случае двух пространственных переменных результатов сравнительно немного, поскольку приходится иметь дело с нелинейными эллиптическими уравнениями. В предлагаемой работе описывается приближенный метод исследования одного класса многомерных задач. Следует отметить, что в отличие, скажем, от разложения по малому параметру [2], этот метод не получил пока строгого обоснования. Однако он позволил в нескольких случаях сформулировать ряд гипотез о свойствах решения, в результате чего многие из предсказанных решений удалось построить численно.

Наиболее подробно нами исследовалась задача о локализованных тепловых структурах в нелинейной среде с источником и плотностью, распределенной по закону $\rho = r^{s-2}$, $s > 0$, процессы в которой описывают нелинейным уравнением теплопроводности [3, 4]:

$$\rho T_t = \operatorname{div}(T^\sigma \nabla T) + \rho T^\beta, \quad \beta > \sigma + 1. \quad (1)$$

Структуры в такой среде описываются автомодельными решениями вида $T(\mathbf{r}, t) = g(t)y^\alpha(\zeta)$, $\zeta = \mathbf{r}/\psi(t)$. В [5, 6] показано, что исследование структур сводится к решению квазилинейного эллиптического уравнения

$$\begin{aligned} \xi^{2-s} \alpha \Delta y - (\beta - \sigma - 1) s^{-1} (\zeta \cdot \nabla y^\alpha) + y^{\alpha\beta} - y^\alpha &= 0, \\ \alpha &= (\sigma + 1)^{-1}, \quad y(0) < \infty, \\ y \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow 0, \quad \xi &= |\zeta| = r/\psi(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнение (2) допускает два пространственно-однородных решения: $y = 0$ и $y = 1$. Все другие ранее полученные пространственные локализованные решения фактически представляли собой переход от фона $y = 1$ к нулю и вблизи обоих фонов хорошо описывались решениями, соответственно, линеаризованного уравнения (2) ($y = 1 + u$):

$$\xi^{2-s} \Delta u - (\beta - \sigma - 1) s^{-1} (\zeta \cdot \nabla u) + (\beta - 1)u = 0 \quad (3)$$

и асимптотического уравнения $(\zeta \cdot \nabla y) + py = 0$, $p = s(\sigma + 1)/(\beta - \sigma - 1)$. В подобных случаях в одномерных задачах математической физики (например, см. [8]) часто используют метод сшивания асимптотик. Его использование в этой задаче также оказалось плодотворным.

В работах [4, 5] сделаны попытки обобщить метод сшивания асимптотик на двумерные задачи. Был построен ряд приближенных решений (ПР), которые, в свою очередь, использовались как начальные приближения при численном решении нелинейной задачи. Таким образом удалось построить значительное число двумерных решений $y(\xi, \varphi)$ для различных значений β и σ . Однако не для каждого ПР удалось численно построить соответствующее решение. Поэтому необходимо было дальнейшее обоснование и совершенствование методики.

Суть приближенного исследования состоит в следующем. Непосредственное обобщение метода сшивания асимптотик на двумерный случай приводит к задаче со свободной границей, на которой должны выполняться условия сшивания. Это фактически не упрощает задачу, поэтому для эффективного использования сшивания асимптотик использовался прием, известный в синергетике как выделение параметров порядка [7]. При этом из большого, часто бесконечного, числа степеней свободы выделяются несколько, поведение которых определяет эволюцию всей системы. Если их удалось выделить, то приближенная модель, включающая только эти параметры, может хорошо описывать систему качественно, а иногда и количественно. Ранее данный прием применялся для анализа временной эволюции нелинейных систем, а в качестве параметров порядка использовались незатухающие моды. Здесь же была сделана попытка использовать метод в эллиптической задаче.

Предположим, что решение $y(\xi, \varphi)$ является достаточно гладким по φ , тогда коэффициенты его ряда Фурье по φ при любом ξ должны

быстро убывать, а вид решения — определяться несколькими первыми гармониками по φ . Будем использовать их в качестве параметров порядка.

Будем искать решения, обладающие m_0 осями симметрии $\varphi_n = \pi n/m_0, n = 0, 1, 2, \dots, 2m_0 - 1$. Тогда общее решение (3) формально можно записать в виде

$$u(\xi, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n R_n(\xi) \cos(nm_0\varphi) \tag{4}$$

и построить приближенное решение, учитывающее только $k \geq 2$ первых гармоник ($n = 0, \dots, k - 1$) методом сшивания асимптотик. Внутри одного из секторов, например, $0 \leq \varphi \leq \pi/m_0$, выберем k различных лучей, так, чтобы матрица $\Phi_{ij} = \cos(im_0\varphi_j)$ была невырожденной. Затем построим k функций $f_j(\xi)$ (значения ПР для $\varphi = \varphi_j$) путем сшивания:

$$f_j(\xi) = \begin{cases} 1 + \sum_{n=0}^{k-1} \alpha_n R_n(\xi) \Phi_{nj}, & \xi < \xi_{0j}, \\ C_j, & \xi > \xi_{0j} \end{cases} \quad C_j = C(\varphi_j). \tag{5}$$

Параметры α_n, C_j, ξ_{0j} определяются из условий $f_j > 0, f_j \in C^{(2)}$. Далее ПР строится путем аппроксимации по φ :

$$\tilde{y}(\xi, \varphi) = \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} (\Phi^{-1})_{jn} f_j(\xi) \cos(nm_0\varphi). \tag{6}$$

Метод построения ПР класса *EjMm* [5, 6] можно рассматривать как частный случай этого метода, когда $k = 2, \alpha_0 = 0$, и на одном из лучей сшивание выполняется только до первой производной.

Наилучшие ПР были получены $k = 2, \varphi_0 = 0, \varphi_1 = \pi/m_0$, когда лучи совпадали с осями симметрии. Такие ПР хорошо передавали общий вид численно построенных решений и форму области локализации, а число их равно количеству численно построенных решений класса *EjMm* [5, 6]. Однако уже для $k = 3$ ни одного удовлетворительного ПР построить не удалось. Это связано с тем, что функции $R_n(\xi)$ растут с увеличением ξ тем быстрее, чем больше n , и вблизи точки сшивания старшая гармоника доминирует, а не является малой поправкой. Поэтому при использовании метода сшивания здесь не следует учитывать высшие гармоники. Пример различных ПР и решения, полученного численно, приведен на рис. 1.

Таким образом, решение $y(\xi, \varphi)$ в значительной степени определяется своим поведением на осях симметрии, что, в свою очередь, позволяет использовать для ее описания функции одной переменной. Эффективно выделять такие функции позволяет метод разделения переменных для линеаризованного уравнения.

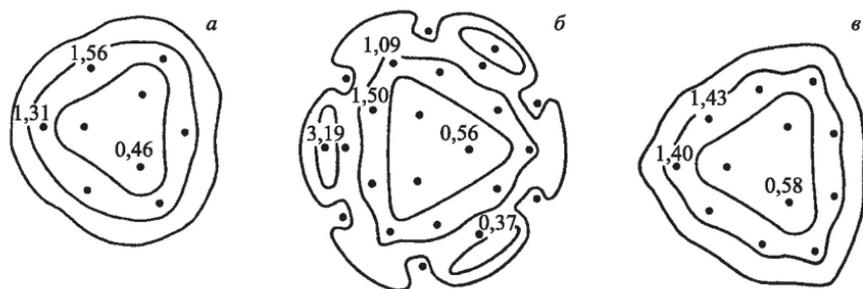


Рис. 1. Пример приближенных решений, учитывающих 2 гармоники (а), 3 гармоники (б) и решение, построенное численно (в). Приведены линии уровня $y = 1$ и $y = 0,1$, а также расположение максимумов и минимумов. Параметры $\beta = 3,5$, $\sigma = 2$, $s = 4$ (см. также работу [5])

Можно сформулировать следующую гипотезу. Если решение некоторой нелинейной задачи:

- 1) обладает осями симметрии,
- 2) локализовано,
- 3) является переходом от одного однородного фона к другому,

то свойства этого решения определяются поведением на осях симметрии. Приближенные решения, полученные с использованием разделения переменных и сшивания асимптотик вдоль осей симметрии, позволяют описать структуру решений.

Если $s = 2$ и решение обладает двумя взаимно ортогональными осями, то поведение вдоль осей можно описывать не только в полярных, но и в декартовых координатах ξ_1, ξ_2 . Таков класс ПР Ei/j , построенный в [6]. Вероятно, что если разделение переменных возможно в нескольких системах координат, в которых симметрия решений линеаризованного уравнения совпадает с искомой, то удастся построить несколько классов ПР. В некоторых случаях ПР разных классов описывают одну и ту же структуру.

Метод построения ПР класса Ei/j можно практически без изменений использовать для исследования решений в трехмерном пространстве, не зависящих от переменной φ цилиндрических координат ρ, φ, ξ_3 . Решение (3) ищется в виде $u = \alpha_1 G(\rho) + \alpha_2 G(\xi_3)$, затем производится сшивание с асимптотикой отдельно по ρ и ξ_3 , а в качестве ПР (класса ERi/j) выбирается $\tilde{y}(\rho, \xi_3) = g_i(\rho)f_j(\xi_3)$. В этом классе, так же как и для Ei/j , удастся построить значительное число предсказанных решений, например, при $\beta = 2,5$, $\sigma = 1$, $s = 2$ из предсказанных 9 построено 7.

Аналогично можно построить ПР, которые существенно зависят от трех переменных, например, обладающие симметрией тетраэдра, куба, октаэдра. Численно, однако, трехмерные решения пока не построены.

Заметим, что автомодельные решения, описывающие тепловые структуры, строго говоря, локализованы лишь эффективно — y нигде

не обращается в 0 . Однако если в начальных данных для уравнения (1) при $y < \varepsilon$ положить $T(\mathbf{r}, 0) = 0$, то решение останется строго локализованным вплоть до момента обострения, причем для достаточно малого ε такое «обрезание» не влияет на горение нелинейной среды в виде сложной структуры.

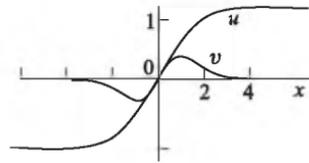
Высказанная выше гипотеза проверялась и для другой модели, так называемых сред с триггерными свойствами [9]. Модель включает систему двух уравнений

$$W_t = D \cdot \Delta W + AW - |W|^2 BW, \quad W = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

где $D = \text{diag}(D_1, D_2)$, A и B — положительно определенные матрицы, такие, что (7) допускает два устойчивых стационарных однородных решения $\pm W_0$. В одномерном случае все стационарные структуры в такой среде представляют собой набор нескольких элементарных структур, каждая из которых — это переход между W_0 и $-W_0$ (рис. 1). Методика построения ПР оказалась эффективной и в этом случае.

Заметим, что в случае стационарных структур ($W_t = 0$) (7) можно привести к виду, когда $D_1 = D_2 = 1$ и $u_0 = v_0 = 1$, сохранив свойства матриц A и B . Затем можно провести линейризацию (7) около 0 и W_0 и сшить решения, определяя из условия ПР $\in C^{(2)}$ все необходимые константы. ПР, построенное таким образом, показано на рис. 2.

Рис. 2. Одномерная элементарная структура в триггерной среде и описывающее ее приближенное решение (штриховая линия).
 Параметры $D_1 = 2,5$, $D_2 = 0,5$,
 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$



Простейшей двумерной стационарной структурой является конфигурация, показанная на рис. 3, а. Ранее в [9] она была построена численно. Наряду с m_0 осями симметрии у таких структур есть m_0 осей «антисимметрии» (отражение со сменой знака), поведение вдоль направления которых также существенно. Если $m_0 = 2$, приближенное описание удобно проводить в декартовых координатах x_1, x_2 ($u(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2)$) рассматривать двумерную структуру как «произведение» двух одномерных (аналогично классу Ei/j). Полученные таким образом ПР очень хорошо описывали структуры, построенные численно. Кроме того, можно проводить построение ПР и в полярных координатах для различных m_0 . Например, при $m_0 = 4$ ПР будет описывать структуру, изображенную на рис. 3, б.

Таким образом, построение приближенных решений в сочетании с численным решением нелинейных уравнений может быть эффективным способом исследования симметричных локализованных структур,

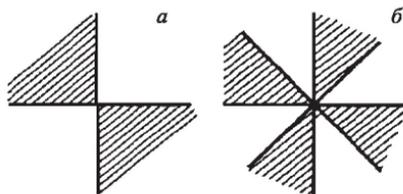


Рис. 3. Примеры двумерных элементарных структур в триггерной среде. Белый цвет — $u > 0$; штриховка — $u < 0$

особенно в тех случаях, когда не удастся использовать другие аналитические методы. Эта методика позволяет не только оценивать число решений, но значительно более эффективно проводить численное исследование задачи.

Отметим, что так же, как и при исследовании модели тепловых структур, при описании возникающих стационарных конфигураций существенную роль играют дискретные группы симметрии. В этом случае они определяются так называемыми цветными симметриями. В триггерной среде можно выделить два цвета: черный ($u, v > 0$) и белый ($u, v < 0$). Стационарные структуры возникают в случае, когда конфигурация инвариантна относительно поворота на некоторый угол и смены цветов. В системах с большим числом фонов приходится учитывать большее число цветов.

Таким образом, в ряде случаев симметрия определяет свойства решений. Знание же автомодельных решений, свойственных данной нелинейной среде, позволяет создавать в ней сложные локализованные конфигурации, т. е. эффективно управлять процессами в ней.

Доклады Академии наук СССР.
1990. Т. 314, № 2

Поступила
13.12.1989

Список литературы

1. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. — М.: Мир, 1979.
2. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973.
3. Самарский А. А., Змитренко Н. В. и др. // ДАН СССР. — 1976. — Т. 227, № 2. — С. 321.
4. Курдюмов С. П. Современные проблемы вычислительной математики и математической физики. — М.: Наука, 1982. — С. 217.
5. Курдюмов С. П., Куркина Е. С. и др. // ДАН СССР. — 1984. — Т. 274, № 5. — С. 1071.
6. Курдюмов С. П., Куркина Е. С. и др. // ЖВМ и МФ. — 1986. — Т. 26, № 8. — С. 1189.
7. Хакен Г. Синергетика. — М.: Мир, 1980.
8. Hagan P. S. // SIAM J. Appl. Math. — 1982. — V. 42.

9. Курдюмов С. М., Малинецкий Г. Г. и др. // Дифференц. уравнения. — 1981. — Т. 17. — С. 1875.
10. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. — М.: ВИНТИ, 1987. — Т. 28.

Инвариантные решения уравнения теплопроводности, описывающие направленное распространение горения и спиральные волны в нелинейной среде

М. И. Бакирова, С. Н. Димова (НРБ), В. А. Дородницын,
С. П. Курдюмов, А. А. Самарский, С. Р. Свищевский

Известно, что в нелинейной среде, процесс распространения тепла и горения в которой описывается уравнением

$$u_t = \operatorname{div}(u^\sigma \operatorname{grad} u) + u^\beta, \quad \sigma > 0, \quad \beta > 1, \quad (1)$$

горение может происходить в режиме с обострением, когда температура u за конечное время t_0 обращается в бесконечность [1–3]. Асимптотическая стадия ($t \rightarrow t_0$) таких режимов описывается автомодельными решениями вида

$$\begin{aligned} u(t, \underline{r}) &= (t_0 - t)^{1/(1-\beta)} f(\underline{\xi}), \\ \underline{\xi} &= \underline{r}(t_0 - t)^{(\sigma+1-\beta)/(2(\beta-1))}, \end{aligned} \quad (2)$$

где t_0 — момент обострения, а функция $t(\underline{\xi})$ удовлетворяет эллиптическому уравнению, получаемому после подстановки (2) в (1). В зависимости от соотношения между β и σ возможны три типа режимов с обострением:

- $\beta = \sigma + 1$ — S-режим, горение происходит внутри фиксированной ограниченной области пространства, причем $u \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_0$ в каждой точке этой области;
- $\beta > \sigma + 1$ — LS-режим, происходит эффективная локализация горения: $u \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ в одной точке пространства;
- $\beta < \sigma + 1$ — HS-режим, в каждый момент времени $t < t_0$ область горения ограничена, однако при $t \rightarrow t_0$ фронт волны горения стремится к бесконечности, а u обращается в бесконечность во всем пространстве.

При $\beta \geq \sigma + 1$ говорят о локализации (эффективной локализации) горения и о возникновении диссипативных структур в нелинейной среде.

Как известно, значение автомодельных решений определяется в первую очередь тем, что ими описываются асимптотики (промежуточные асимптотики) процессов для достаточно общих начальных условий [9]. В частности, это справедливо для решений (2) уравне-

ния (1), что доказано как численными расчетами, так и аналитически [1–4]. Поэтому диссипативные структуры, которые могут возникнуть на развитой стадии горения, определяются только свойствами самой среды и описываются функциями (2). Функции $f(\xi)$, определяющие форму структуры, называют собственными функциями нелинейной среды [2, 3].

Основные закономерности режимов с обострением и образования диссипативных структур выявлены при исследовании одномерных задач [1–3]. Изучению двумерных и трехмерных изотропных сред посвящены работы [5–8]. Широкий спектр новых существенно неодномерных (не обладающих цилиндрической симметрией) структур получен в [7, 8].

В настоящей работе изучаются новые типы решений, описывающих режимы с обострением в нелинейных многомерных средах. Численными методами исследуется процесс направленного распространения тепла и горения в анизотропной среде. Показано, что на асимптотической стадии он описывается инвариантным (автомодельным) решением, найденным ранее в [10]. Для изотропного случая указано инвариантное решение, которым могут описываться круговые и спиральные волны горения. При построении инвариантных решений используются групповые свойства уравнения теплопроводности, исследованные в [10].

1. Рассматривается уравнение

$$u_t = (u^{\sigma_1} u_x)_x + (u^{\sigma_2} u_y)_y + u^\beta, \quad \beta > 1, \quad \sigma_1 > \sigma_2 > 0, \quad (3)$$

описывающее распространение тепла в двумерной анизотропной среде. Численно исследуются автомодельные решения вида

$$u(t, x, y) = (t_0 - t)^{1/(1-\beta)} f(\xi, \eta), \quad (4)$$

где

$$\xi = x(t_0 - t)^{(\sigma_1+1-\beta)/(2(\beta-1))},$$

$$\eta = y(t_0 - t)^{(\sigma_2+1-\beta)/(2(\beta-1))}.$$

Уравнение для $f(\xi, \eta)$ получается подстановкой (4) в (3) и имеет вид

$$(f^{\sigma_1} f_\xi)_\xi + (f^{\sigma_2} f_\eta)_\eta + \frac{\sigma_1 - \beta + 1}{2(\beta - 1)} \xi f_\xi + \frac{\sigma_2 - \beta + 1}{2(\beta - 1)} \eta f_\eta + f^\beta - \frac{f}{\beta - 1} = 0. \quad (5)$$

Расчеты проводили для различных значений параметров β , σ_1 , σ_2 , соотношение между которыми, как видно из (4), существенно влияет на характер решения. В качестве начального условия выбирали кусочно-постоянную функцию

$$u_0(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega, \end{cases}$$

где $\Omega = \{(x, y) | |x| \leq a, |y| \leq b, a > 0, b > 0\}$. Ниже приведены три типа решений, которые по аналогии с одномерным случаем называются здесь S-, HS-S- и HS-LS-режимами.

1.1. S-режим. Этот режим соответствует изотропной среде с параметрами $\beta = \sigma_1 + 1 = \sigma_2 + 1$ и служил тестом для отладки методик расчета. Впервые S-режимы в двумерной постановке рассматривались в [5].

В расчетах взяты следующие значения параметров: $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$, $\beta = 3$. На рис. 1 приведено решение $u(t, x, y)$ на момент времени, близкий к моменту обострения. По любому направлению тепло распространяется лишь до некоторой глубины, после чего происходит остановка фронта распространения тепла и неограниченный рост температуры внутри области. Время обострения t_0 , полученное в расчетах, равно 2,70682.

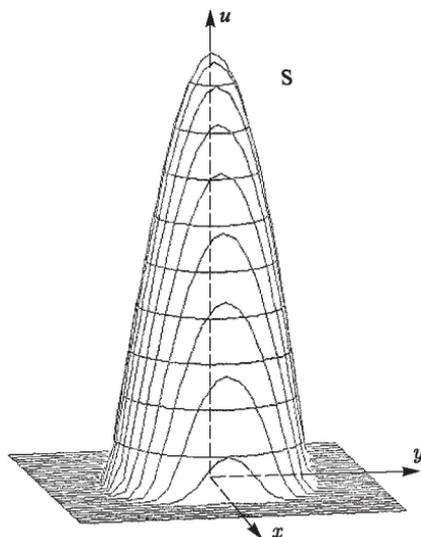


Рис. 1

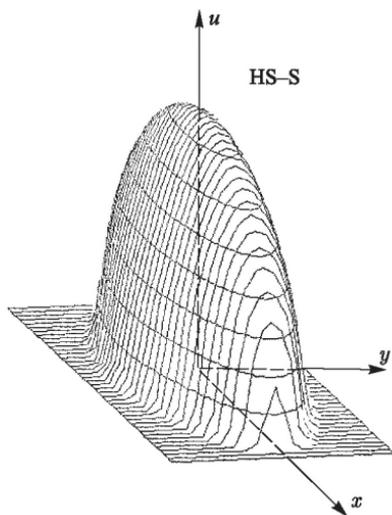


Рис. 2

1.2. HS-S-режим. Реализуется в случае $\sigma_2 + 1 = \beta < \sigma_1 + 1$. Расчеты проводили при следующих параметрах: $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 2$, $\beta = 3$. В этом случае в направлении x за конечное время происходит распространение тепла до бесконечности (HS-режим), а по оси y тепло не распространяется (S-режим). На рис. 2 представлено численное решение $u(t, x, y)$ на момент времени $t = 2,42365$. Время обострения, полученное в расчетах, равно 2,42389.

Заметим, что поскольку численное решение $u(t, x, y)$ стремится к автомодельному, то, производя «автомодельную обработку» решения, т. е. в данном случае полагая

$$f(\xi, \eta) = (t_0 - t)^{1/2} u(t, x, y), \quad \xi = x(t_0 - t)^{1/4}, \quad \eta = y,$$

получим при $t \rightarrow t_0$ решение $f(\xi, \eta)$ эллиптического уравнения (5).

1.3. HS-LS-режим. Имеет место при $\sigma_2 + 1 < \beta < \sigma_1 + 1$. Расчеты проводили для $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 1$, $\beta = 3$. В этом случае решение (4) описывает такое распространение тепла, при котором по направлению x тепловой фронт за конечное время t_0 достигает бесконечности (HS-режим), а в направлении y происходит сокращение эффективной глубины прогрева (рис. 3). На финальной стадии решение представляет собой бесконечно прогретую линию, вне которой температура конечна. Время обострения, полученное в расчетах, равно 3,07660.

Производя автомодельную обработку решения:

$$\begin{aligned} f(\xi, \eta) &= (t_0 - t)^{1/2} u(t, x, y), \\ \xi &= x(t_0 - t)^{1/4}, \quad \eta = y(t_0 - t)^{-1/4}, \end{aligned}$$

и устремляя t к t_0 , получим в пределе решение $f(\xi, \eta)$ эллиптического уравнения (5).

Заметим, что распространение тепла, подобное описанному выше, будет при любых σ_1 , σ_2 и β таких, что $\sigma_2 + 1 < \beta < \sigma_1 + 1$. При этом анизотропия $\sigma_2 < \sigma_1$ может быть сколь угодно мало выражена. Это приведет лишь к изменению скорости роста амплитуды и распространения фронта, качественные стороны процесса останутся те же.

Приведенные результаты позволяют судить о качественных особенностях автомодельных режимов распространения тепла и при других параметрах среды, в частности в LS-S-режиме, который поэтому здесь не рассмотрен. Заметим также, что рассматриваемые постановки задач легко могут быть перенесены и на трехмерную анизотропную среду.

Расчеты проводили по двум методикам с помощью пакетов прикладных программ [14, 15].

В заключение п. 1 отметим, что, с одной стороны, в нем проведено численное исследование эволюционной (структурной) устойчивости автомодельного решения (4) уравнения анизотропной нелинейной теплопроводности с источником (3). С другой стороны, указан способ построения численного решения $f(\xi, \eta)$ нелинейного эллиптического уравнения (5), которое в принципе нельзя получить путем прямого решения уравнения (5) методом установления, поскольку решение $f(\xi, \eta)$ в такой постановке неустойчиво [11, 12]. Графики решения $f(\xi, \eta)$ при различных параметрах см. в [13].

2. Рассматриваемые выше автомодельные решения (2) и (4) очевидным образом можно трактовать как решения, инвариантные относительно однопараметрической группы Ли растяжений [10]. Приведем пример инвариантного решения иного вида для изотропного случая. Рассмотрение удобно вести в цилиндрических координатах (r, φ, z) . Уравнение (1) тогда принимает вид

$$u_t = \frac{1}{\sigma + 1} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u^{\sigma+1}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u^{\sigma+1}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u^{\sigma+1}}{\partial z^2} \right\} + u^\beta. \quad (6)$$

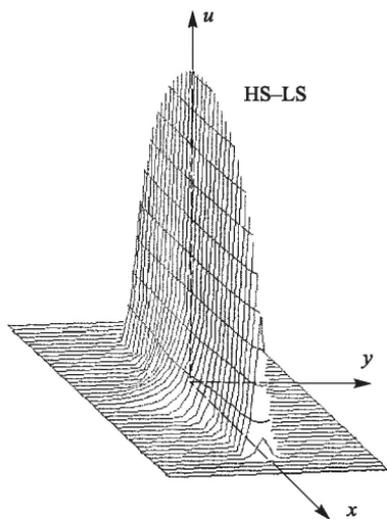


Рис. 3

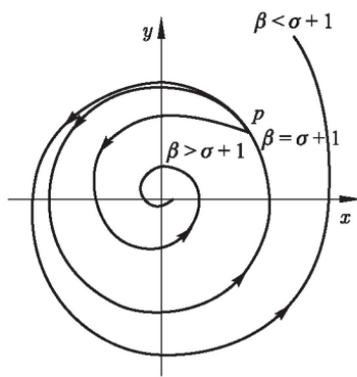


Рис. 4

Нетрудно проверить, что это уравнение допускает однопараметрическую группу Ли преобразований с инфинитезимальным оператором

$$(1 - \beta)(t - t_0) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sigma + 1 - \beta}{2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) + u \frac{\partial}{\partial u} + (1 - \beta) C \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

где C и t_0 — произвольные постоянные. В дальнейшем предполагается $t > 0$. Соответствующее инвариантное решение имеет вид

$$u = (t_0 - t)^{1/(1-\beta)} f(R, \Phi, Z), \tag{7}$$

где

$$R = r(t_0 - t)^{(\beta - \sigma - 1)/(2(1 - \beta))},$$

$$\Phi = \varphi - C \ln(t_0 - t),$$

$$Z = z(t_0 - t)^{(\beta - \sigma - 1)/(2(1 - \beta))},$$

а $f(R, \Phi, Z)$ — решение уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma + 1} \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial f^{\sigma+1}}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 f^{\sigma+1}}{\partial \Phi^2} + \frac{\partial^3 f^{\sigma+1}}{\partial Z^2} \right\} = \\ = \frac{\beta - \sigma - 1}{2} \left(R \frac{\partial f}{\partial R} + Z \frac{\partial f}{\partial Z} \right) - C \frac{\partial f}{\partial \Phi} + f - f^\beta. \end{aligned} \tag{8}$$

Рассмотрим процесс горения среды, происходящий в соответствии с решением (7). Пусть в начальный момент времени распределение температуры было неоднородным. Тогда, как следует из (7), траекториями неоднородностей поля температуры (например, локальных максимумов) в пространстве (x, y, z) будут спирали, расположенные на поверхности

конуса с вершиной в начале координат (сходящиеся или расходящиеся спиральные волны). При $\beta = \sigma + 1$ спирали вырождаются в окружности (круговые волны). Проекция этих траекторий на плоскость (x, y) представляют собой логарифмические спирали (при $\beta = \sigma + 1$ — окружности). На рис. 4 схематично показаны такие траектории, выходящие из некоторой точки P плоскости (x, y) в зависимости от соотношения β и σ . Предполагается, что $\beta > 1$, $C < 0$. Стрелки указывают направленные движения вдоль траектории. В случае $\beta > 1$ решение (7) описывает режим с обострением, причем в зависимости от соотношения между β и σ имеется аналогия с HS-, LS- и S-режимами (рис. 4). Отметим, что при $C = 0$ решение (7) принимает вид (2).

Авторы благодарны В. А. Галактионову и А. Б. Потапову за полезные обсуждения.

Доклады Академии наук СССР.
1988. Т. 299, № 2

Поступила
19.01.1987

Список литературы

1. Самарский А. А., Змитренко Н. В. и др. // ДАН СССР. — 1976. — Т. 227, № 2. — С. 321.
2. Курдюмов С. П. Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. — М.: Наука, 1982.
3. Еленин Г. Г., Самарский А. А., Курдюмов С. П. // ЖВМ и МФ. — 1983. — Т. 23, № 2. — С. 380.
4. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А. // Дифференц. уравнения. — 1984. — Т. 20, № 4. — С. 614.
5. Плохотников К. Э. // Тр. МФТИ. Аэрофиз. и прикл. матем. — 1977. — С. 204.
6. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. и др. // ДАН СССР. — 1980. — Т. 251, № 4. — С. 836.
7. Курдюмов С. М., Куркина Е. С. и др. // ДАН СССР. — 1984. — Т. 274, № 5. — С. 1071.
8. Потапов А. Б. // Препринт ИПМ АН СССР. — М., 1986. — № 8.
9. Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. — Л.: Гидрометеиздат, 1982.
10. Дородницын В. А., Князева Е. Н., Свирицевский С. Р. // Дифференц. уравнения. — 1983. — Т. 19, № 7. — С. 1215.
11. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А. // Матем. сб. — 1984. — Т. 124, № 2. — С. 163.
12. Галактионов В. А. // Дифференц. уравнения. — 1985. — Т. 21, № 7. — С. 1126.
13. Бакирова М. И., Борщуклова С. Н. и др. // Препринт ИПМ АН СССР. — М., 1985. — № 182.
14. Борщуклова С. Н., Йотова А. И., Лазарев Р. Д. // Численные методы и пакеты программ для решения задач математической физики. — Новосибирск, 1985. — С. 31.
15. Горбунов-Посадов М. М., Карпов В. Я. и др. Пакеты прикладных программ: Вычислительный эксперимент. — М.: Наука, 1983.

Я и многие болгарские коллеги имели счастье познакомиться с Сергеем Павловичем Курдюмовым в 1980 г. на Летней школе «Приложения математики в науке и технике» в Варне, организованной Центром по прикладной математике Машинно-электротехнического института (ныне Технического университета). В своей воодушевленной лекции на основе «простых» модельных задач Сергей Павлович разъяснял, как может происходить процесс возникновения и самоподдержания организации в виде структур в нелинейных открытых системах. Для нас это было ново, завораживающе, и мы ненасытно слушали и задавали вопросы каждый вечер после лекций. Особенно вспоминается 1984 г., когда было общение с Сергеем Павловичем и его «командой» во время двух конференций — «Численные методы и приложения» в Софии и (сразу после нее) «Приложения математики в науке и технике» в Варне. Интереснейшие выступления В. А. Дородницына, В. А. Галактионова, Н. В. Змитренко, М. И. Бакировой (светлая ей память) дополняли и освещали с разных сторон идеи Сергея Павловича. На этих конференциях я рассказывала о численном исследовании задач с фазовым переходом и о методе конечных элементов — теория и реализация в пакете прикладных программ ТЕРМО. Пакет был разработан коллективом сотрудников секции Математического моделирования (в котором участвовала активно и я) под руководством Р. Д. Лазарова. И когда в конце 1984 г. я была в трехмесячной командировке в ОИЯИ, Дубна, ко мне приехали Рита Бакирова и Володя Дородницын с заманчивой задачей — попробовать реализовать численно инвариантные решения, найденные инвариантно-групповыми методами В. А. Дородницыным, Е. Н. Князевой и С. Р. Свирцевским, описывающие направленное распространение тепла и горения в нелинейной анизотропной среде. Я модифицировала наш пакет на нелинейный анизотропный случай (он был предназначен для задач с частично постоянными коэффициентами) и успела реализовать комбинированные режимы горения — HS-S, LS-S и самый интересный HS-LS (см. рисунки в тексте). Автомодельной обработкой впервые численно были реализованы и решения нелинейного автомодельного эллиптического уравнения. Тем самым конструктивным образом было показано существование этих инвариантных решений (строгого доказательства до сих пор нет) и их структурной устойчивости.

Так я вошла не только в интереснейшую тематику, но и в круг интереснейших людей, радость общения с которыми, и в первую очередь, с Сергеем Павловичем, заполняла и продолжает заполнять мою жизнь.

Последовала задача о численной реализации инвариантного решения (найденного в диссертации С. Р. Свирцевского в 1984 г.), которым могут описываться круговые и спиральные волны горения в нелинейной изотропной среде. Тут были принципиальные трудно-

сти: чтобы неоднородность в среде закрутилась по спирали, она не может быть произвольно заданной. Надо было решить автомобильное нелинейное эллиптическое уравнение или найти достаточно «хорошие» приближения к его решениям.

По совету Сергея Павловича я подошла к этой задаче издали. Чтобы «набить руку» на решении автомобильных задач, я решила начать с радиально-симметричного случая, для которого уже было много исследований — замечательные работы С. П. Курдюмова, Н. В. Змитренко, Г. Г. Еленина, А. П. Михайлова, Г. Г. Малинецкого, Е. С. Куркиной. Тут я привлекла моего коллегу М. С. Касчиева, у которого был опыт дубинской школы по применению непрерывного аналога метода Ньютона для решения нелинейных стационарных задач. Быстрая сходимость этого метода в сочетании с методом конечных элементов и полная автоматизация процесса вычисления решений во всех трех режимах с обострением, включая вычисление начальных приближений для LS-режима методом линеаризации и сшивания с асимптотикой, сделали возможным проведение детального численного эксперимента и получение ряда новых результатов. В многочисленных дискуссиях с Сергеем Павловичем самым интересным казался следующий парадокс: почему в цилиндрически и сферически симметричных случаях (размерность пространства $N = 2, 3$) в S-режиме имеется одна собственная функция (с. ф.), а в LS-режиме, когда LS-режим стремится к S-режиму, линейный анализ предсказывает, что число с. ф. растет неограниченно. В процессе этого исследования впервые численно обнаружены с. ф. с полостью около центра симметрии (с. ф. с левым фронтом). Сергей Павлович сразу поверил в их существование и был в восторге (они напомнили ему атомную оболочку), а чтобы убедить В. Галактионова, надо было провести вычисления несколькими методами и наконец найти аналитически асимптотику решения в окрестности левого фронта. Дальше численным экспериментом было установлено, что при стремлении к S-режиму все четные с. ф. как бы «уходят на бесконечность» (радиусы полостей растут), а нечетные с. ф. вырождаются в единственную с. ф. S-режима для соответствующего значения N . Эти результаты были опубликованы в совместной работе с Сергеем Павловичем в ЖВМ и МФ (1989. — Т. 29, № 11) (и предварительно в двух препринтах ОИЯИ в 1988 г.). Впоследствии существование с. ф. с левым фронтом было подтверждено методом динамической аналогии в работах О. В. Тельковской (1990 г.) и методами бифуркационного анализа в работах Е. С. Куркиной и С. П. Курдюмова (2004 г.).

Накопленный опыт был применен для решения двумерной автомобильной задачи в анизотропном случае (1988 г.), как и для численного нахождения большего числа с. ф. LS-режима в двумерном изотропном случае (Матем. моделирование. — 1992. — Т. 3, № 3) при использовании начальных приближений, предложенных в работе

С. П. Курдюмова, Е. С. Куркиной, А. Б. Потапова и А. А. Самарского. В этих и последующих исследованиях существенный вклад внесли аспирантки М. Г. Колева и Д. П. Василева.

Для реализации инвариантных решений, описывающих спиральное распространение неоднородностей в среде, пришлось расширить понятие с. ф. горения нелинейной среды введением в рассмотрение решений, которые стремятся к нетривиальному гомотермическому решению, а не к нулю, на бесконечности. Предложено также подходящее (комплекснозначное) разделение переменных в линеаризованном автомодельном уравнении. Это дало возможность получить приближения к спиральным с. ф. Детальное численноисследование этих приближений показало, что их асимптотики — автомодельные, и это дало возможность найти асимптотику решений автомодельной задачи. Численно реализованы однорукавная и многорукавные спиральные волны в HS-режиме. Реализованы также радиально-несимметричные сложные волны в HS-режиме. Показано, что все они метаустойчивые. Часть этих результатов содержится в следующей работе в этом сборнике. Послесловие к ней написано Сергеем Павловичем и я не хочу добавлять ничего в нем. Здесь я добавлю следующее. Вопрос о существовании спиральных структур в LS-режиме пока остается открытым. Я очень надеюсь, что в ближайшее время нам удастся продвинуться и в этом направлении. Сергей Павлович просил, настаивал, завещал не бросать эту тематику, развивать и популяризировать ее. У него было столько идей и он с радостью делился со всеми своими учениками. Встреча и общение с Сергеем Павловичем — это подарок судьбы!

С. Димова. Февраль 2006 г.

Численное исследование радиально-несимметричных структур в нелинейной теплопроводной среде

С. Н. Димова (НРБ), М. С. Касчиев, М. Г. Колева,
Д. П. Василева (НРБ)

1. Постановка задачи. Проблема нахождения возможных классов решений нелинейных уравнений имеет исключительное значение во многих областях науки. В теории самоорганизации она сводится к нахождению всех возможных структур, которые возникают и самоподдерживаются в соответствующей нелинейной среде.

Настоящая работа посвящена конструированию и численному исследованию двух классов радиально-несимметричных диссипативных

структур, возникающих в процессе горения нелинейной теплопроводной среды, описываемом уравнением

$$u_t = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r u^\sigma \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + u^\beta, \quad (1)$$

$$t > 0, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

где $\sigma > 0$ и $\beta > 1$ — параметры нелинейной среды, а r и φ — полярные координаты. В диссертации С. Р. Свирщевского инвариантно-групповыми методами показано, что уравнение (1) допускает неограниченные автомодельные решения вида [1–3]

$$u_a(t, r, \varphi) = g(t)\theta_a(\xi, \phi), \quad g(t) = (1-t/T_0)^{-1/(\beta-1)}, \quad \xi = r(1-t/T_0)^{-m},$$

$$m = \frac{\beta - \sigma - 1}{2(\beta - 1)}, \quad \phi = \varphi + \frac{C_0}{\beta - 1} \ln(1 - t/T_0).$$

Здесь $T_0 > 0$ — время существования решения; C_0 — параметр семейства решений. Функция $\theta(\xi, \phi) \geq 0$ называется собственной функцией горения нелинейной среды. Она удовлетворяет нелинейному эллиптическому уравнению

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \theta_a^\sigma \frac{\partial \theta_a}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\theta_a^\sigma \frac{\partial \theta_a}{\partial \phi} \right) + \frac{\beta - \sigma - 1}{2} \xi \frac{\partial \theta_a}{\partial \xi} - C_0 \frac{\partial \theta_a}{\partial \phi} + \theta_a - \theta_a^\beta = 0, \quad (2)$$

$$0 < \xi < \infty, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

Без ограничения общности в (2) положено $T_0 = (\beta - 1)^{-1}$. Тогда это уравнение имеет однородное решение $\theta_H \equiv 1$.

Случай $C_0 = 0$ подробно проанализирован в [4–7]. Когда $\beta > \sigma + 1$, получены два класса радиально-несимметричных собственных функций сложной структуры. При $\beta \leq \sigma + 1$ были найдены только радиально-симметричные собственные функции. Вопрос о существовании радиально-несимметричных собственных функций оставался открытым. Случай $C_0 \neq 0$, $\beta < \sigma + 1$ рассмотрен в [8], где предложены и исследованы приближения к так называемым «спиральным» собственным функциям.

Цель наших исследований в случае $\beta < \sigma + 1$ найти собственные функции сложной симметрии при $C_0 = 0$ и несимметричные, «спиральные», собственные функции при $C_0 \neq 0$. Собственные функции должны быть ограниченными при $\xi = 0$ и периодическими с периодом 2π .

Известно [9], что при $\beta < \sigma + 1$ существует бесконечное множество радиально-симметричных решений, которые стремятся к θ_H при $\xi \rightarrow \infty$. Это дало основание предположить существование собственных функций с подобным характером поведения и в существенно двумер-

ном случае. Используя предположение о малых колебаниях собственных функций около гомотермического фона и идею линеаризации около него [1–9], получаем линейное уравнение

$$-\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} + \frac{\beta - \sigma - 1}{2} \xi \frac{\partial y}{\partial \xi} - C_0 \frac{\partial y}{\partial \phi} + (1 - \beta)y = 0. \quad (3)$$

При $\beta \neq \sigma + 1$ и условия ограниченности в нуле в [8] найдены решения вида

$$y(\xi, \phi) = \alpha e^{ik\phi} \xi^k F(a, b, z),$$

где $F(a, b, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция; k — целое число

$$a = -\frac{\beta - 1 + C_0 k i}{\beta - \sigma - 1} + \frac{k}{2}, \quad b = 1 + k, \quad z = \frac{\beta - \sigma - 1}{4} \xi^2.$$

Используя асимптотику при $\xi \rightarrow \infty$ решений уравнения (3), замыкаем задачу определения собственных функций

$$\theta_a(\xi, \phi) \sim \theta_H + \gamma \xi^{1/m} \cos \left(\frac{2C_0 k}{\beta - \sigma - 1} \ln \xi + k\phi \right).$$

Из этой асимптотики вытекает краевое условие третьего рода при $\xi = l \gg 1$:

$$\frac{\partial \theta_a}{\partial \xi} = \frac{\theta_a - \theta_H}{m\xi} - \frac{2\gamma C_0 k}{(\beta - \sigma - 1)\xi^{(m-1)/m}} \sin \left(\frac{2C_0 k}{\beta - \sigma - 1} \ln \xi + k\phi \right). \quad (4)$$

2. Численный метод. Задача (2), (4) линеаризуется непрерывным аналогом метода Ньютона (НАМН). Уравнение НАМН дискретизуется по методу конечных элементов с использованием билинейных и квадратичных элементов [7]. Уравнение (1) с начальными данными

$$u(0, r, \varphi) = u_0(r, \varphi) = \theta_a(r, \varphi), \quad 0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (5)$$

решается полудискретным методом конечных элементов [8]. Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений используется вариант метода Рунге–Кутты.

Выбор подходящих начальных приближений является основным моментом в реализации итерационного процесса для задачи (2), (4). В работе использованы начальные приближения вида

$$\theta_0(\xi, \phi) = \theta_H + \alpha \operatorname{Re}(y(\xi, \phi)).$$

Они детально анализированы в [8]. Тут отметим только их периодичность с периодом $2\pi/k$, что позволяет решать задачи (2), (4) и (1), (5) для $0 \leq \varphi < 2\pi/k$.

В случае $C_0=0$ параметр α выбирается только из условия $\theta_0(\xi, \phi) > 0$. Когда $C_0 \neq 0$, параметр α выбирается достаточно малым, так как исследование эволюции начальных приближений во времени [8] показало, что в этом случае они близки к собственным функциям.

3. Численные результаты. Разработанные численные методы решения задачи (2), (4) позволили впервые получить решения со сложной симметрией при $C_0 = 0$, $\beta < \sigma + 1$ и «спиральные» решения при $C_0 \neq 0$.

На рис. 1 изображены решения (2), (4), которые получаются из описанного выше начального приближения для параметров $C_0 = 0$, $\sigma = 2$, $\beta = 2,4$, $k = 1$. Отметим, что функцию на рис. 1, в удалось получить из начального приближения для $k = 2$. На рис. 2 показаны линии уровня полученных решений для значений параметров $C_0 = 0$, $\sigma = 2$, $\beta = 2,8$, $k = 1$, $k = 2$ и $k = 3$ соответственно. Численным экспериментом установлено, что только некоторые из собственных функций сохраняют структуру начальных приближений (рис. 1, а и рис. 2). Эти результаты получены заменой краевого условия (4) на $\partial\theta_a/\partial\xi|_{\xi=1} = 0$, что справедливо для больших значений ξ .

Самым сильным результатом в этой работе мы считаем найденные нами «спиральные» собственные функции при $C_0 \neq 0$. На рис. 3 ($t = 0$) показана «одновитковая спиральная» собственная функция и ее линии уровня для параметров $C_0 = 1$, $\sigma = 2$, $\beta = 2,4$, $k = 1$. В краевом условии (4) принято $\gamma = 1$.

Исследована эволюция некоторых из полученных собственных функций. Численным экспериментом установлено, что вычисленные времена обострения \tilde{T}_0 с хорошей точностью совпадают с точным временем обострения $T_0 = (\beta - 1)^{-1}$, заложенным в автомодельном уравнении (2). Кроме того, движение неоднородностей в среде (например, максимумов и минимумов) следует автомодельному закону

$$\begin{aligned} r(t) &= r(0)(1 - t/T_0)^m, \\ \varphi(t) &= \varphi(0) - C_0 T_0 \ln(1 - t/T_0) \end{aligned}$$

до времен, близких к времени обострения. В формулах (6) через $r(t)$, $\varphi(t)$ обозначены координаты неоднородностей в момент времени t .

При исследовании эволюции собственной функции, показанной на рис. 1, а, в результате расчета найдено время обострения $\tilde{T}_0 = 0,7144$ (точное $T_0 = 0,714285$). Для $0 \leq t \leq 0,7108 = 99,49\% \tilde{T}_0$ движение максимума (и минимума) следует автомодельному закону (6). На асимптотической стадии структура вырождается в радиально-симметричную, а гомотермический фон «замирает». Подобное поведение наблюдается и при эволюции собственной функции, изображенной на рис. 1, в.

Эволюция «одновитковой спиральной» собственной функции показана на рис. 3. Время обострения $\tilde{T}_0 = 0,714287$ близко к точному $T_0 = 0,714285$. До $t \leq 0,7106 = 99,48\% \tilde{T}_0$ движение максимума (и минимума) следует автомодельному закону (6). На асимптотической стадии структура тоже вырождается в радиально-симметричную.

Исследована и эволюция «двухвитковой спиральной» собственной функции ($k = 2$). Время обострения $\tilde{T}_0 = 0,71428579$ еще ближе к точному $T_0 = 0,714285$, а движение максимумов (и минимумов) следует

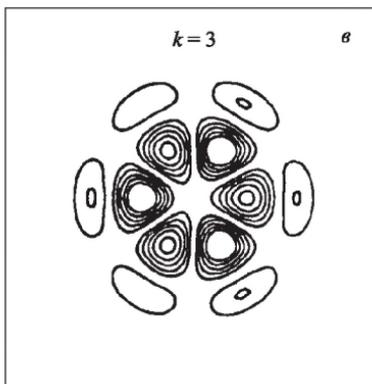
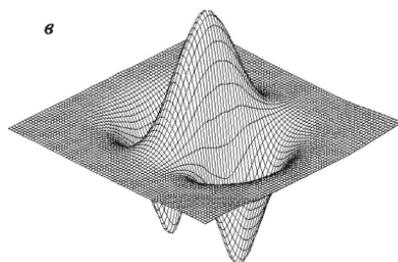
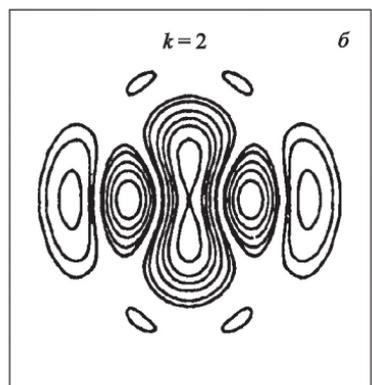
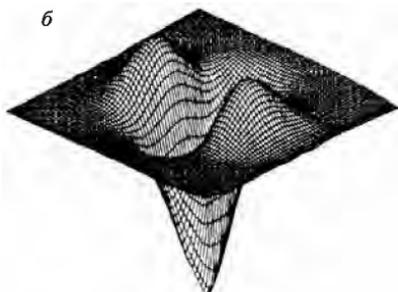
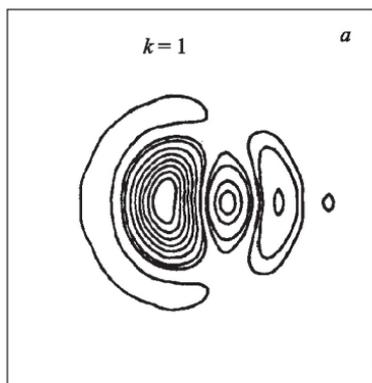
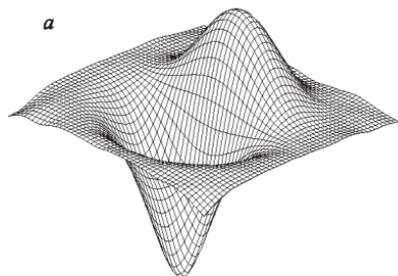


Рис. 1

Рис. 2

автомодельному закону (6) до $t \leq 0,7065 = 98,91\% \tilde{T}_0$. Интересно отметить то, что, вырождаясь на асимптотической стадии, структура проходит через структуру со сложной симметрией.

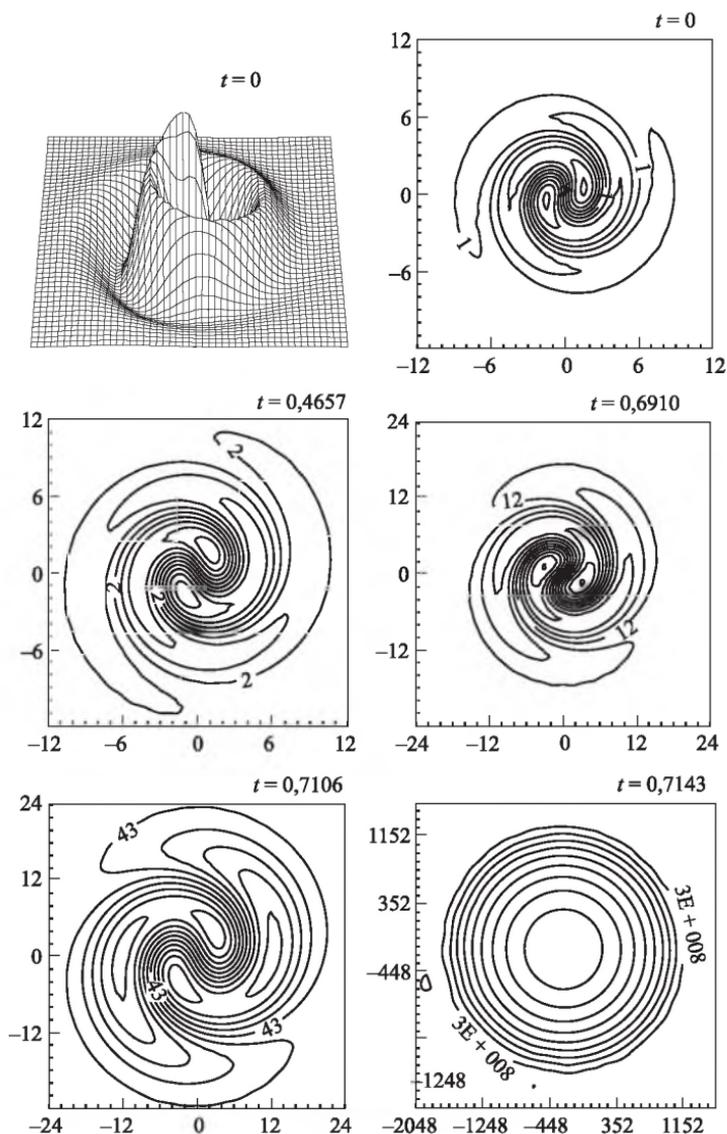


Рис. 3

Разработанный численный метод имеет внутренний критерий точности — восстановление времени обострения, заложенное в автомодельном уравнении (2). Независимо от многочисленных приближений на различных стадиях решения как эллиптической, так и параболической задачи это время восстанавливается с очень высокой точностью.

Авторы глубоко признательны В. А. Дородницыну и С. Р. Свищевскому за постановку задачи и чл.-корр. РАН С. П. Курдюмову за полезные обсуждения.

Доклады Академии наук СССР.
1994. Т. 338, № 4

Поступила
11.10.1993

Работа представлена академиком А. А. Самарским

Список литературы

1. Галактионов В. А., Дородницын В. А., Еленин Г. Г. и др. // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. — М.: ВИНТИ, 1987. — Т. 28. — С. 95–205.
2. Бакирова М. И., Димова С. Н. и др. // ДАН СССР. — 1988. — Т. 299, № 2. — С. 346–350.
3. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. — М.: Наука, 1992. — 544 с.
4. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Потапов А. Б., Самарский А. А. // ДАН СССР. — 1984. — Т. 274, № 5. — С. 1071–1075.
5. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Потапов А. Б., Самарский А. А. // ЖВМ и МФ. — 1986. — Т. 26, № 8. — С. 1189–1205.
6. Димова С. Н., Касчиев М. С. — Сообщения ОИЯИ 11-88-876. — Дубна, 1988.
7. Колева М. Г., Димова С. Н., Касчиев М. С. // Мат. моделирование. — 1992. — Т. 4, № 3. — С. 76–83.
8. Димова С. Н., Василева Д. П. // Докл. Болг. акад. наук. — 1993. — Т. 46, № 5.
9. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987. — 480 с.

1. В работе С. Димовой с соавторами получены важные результаты в теории диссипативных структур, которые могут метастабильно самоподдерживаться в определенных типах нелинейных, открытых, диссипативных сред.

2. Ранее эти работы проводились в ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. (Особо следует выделить здесь работы Г. Г. Еленина, Е. С. Куркиной, А. Б. Потапова по анализу собственных функций нелинейных сред.)

3. Рассматривается задача эволюции возмущения, нарушающего однородное «горение среды». Процесс описывается уравнением

$$u_t = \operatorname{div}(u^\sigma \operatorname{grad} u) + u^\beta$$

в полярных координатах в одномерном случае.

4. Создана оригинальная методика расчета нелинейного эллиптического уравнения, описывающего развитую автотомодельную ста-

дию процесса. Параболическое уравнение (1) решается с использованием линеаризованного уравнения и метода Ньютона и дискретизации по методу конечных элементов.

5. С помощью этих методик построены два новых класса радиально-несимметричных собственных функций среды, имеющих сложную форму и сохраняющих ее при расширении со временем.

6. Впервые показано, что существуют не только локализованные (или эффективно локализованные) в пространстве структуры LS-режима, для которых характерно сокращение полуширины со временем в режиме с обострением. Но и построены сложные, различной формы структуры — волны HS-режима, для которых характерен самоподобный рост размеров в режиме с обострением.

7. Второе достижение связано с предсказанным ранее в работе и диссертации С. Р. Свищевского новым сочетанием разных видов автомодельности по разным пространственным направлениям в двумерной задаче (1). Инвариантно-групповой анализ (1) показал, что по радиусу возможна автомодельность степенного типа, а по углу — типа бегущей волны. Это спиральная волна горения, скручивающаяся в LS-режиме или раскручивающаяся в HS-режиме. Авторам работы впервые удалось реализовать HS-спиральную волну, при решении эллиптической автомодельной задачи, и подтвердить ее метастабильное существование при численном решении исходного уравнения (1) (как одновитковую, так и многовитковую).

8. Обсуждение этой и других работ наших болгарских коллег позволяет объяснить некоторые неудачные попытки построения сложных структур в LS-режиме. Методика построения собственных функций LS-режима была основана на линеаризации автомодельных (эллиптических) уравнений около гомотермического фона $T = T(t)$, она была связана с разделением переменных, с дополнительным шиванием с асимптотикой при некотором $r = r^*$ и секторным приближением по углу. Однако для линеаризованного уравнения исчезает разница между LS- и HS-режимами (остаются только волны). Линеаризованное решение и предположение о секторной симметрии позволяет найти начальное приближение для эллиптической нелинейной задачи. При наличии сходимости вычислительного алгоритма при построении автомодельного решения и следования со временем автомодельному закону (при постановке автомодельного профиля в виде начальных данных исходного уравнения (1)) решение считается найденным. Авторы обнаружили, что локальное повышение температуры фона «отталкивается» от локального понижения по автомодельному закону лишь в HS-режиме. Ранее в исследованиях Г. Г. Еленина и Е. С. Куркиной было выяснено автомодельное притяжение максимумов в LS-режиме.

С. П. Курдюмов

Спектр диссипативных структур, развивающихся в режиме с обострением ^{1), 2)}

Е. С. Куркина, С. П. Курдюмов

1. С помощью вычислительных методов продолжения по параметру и проведения бифуркационного анализа исследован спектр собственных функций автомодельной задачи для нелинейного уравнения теплопроводности с объемным источником тепла. Данная спектральная задача может иметь неединственное решение. Впервые установлено число собственных функций в зависимости от значений параметров. Автомодельные решения развиваются в режиме с обострением [1–4] и представляют собой нестационарные диссипативные структуры, локализованные в пространстве. Интерес к режимам с обострением возник около тридцати лет назад в связи с изучением процессов термоядерного горения в высокотемпературной плазме [4, 5]. В настоящее время нестационарные диссипативные структуры нашли много новых приложений в разных областях науки: физике, медицине, социологии и др. [6, 8]. В работе исследована устойчивость автомодельных решений. Найдены новые структурно устойчивые и метастабильно устойчивые собственные функции. Последние следуют автомодельному закону почти все время обострения и сохраняют свою сложную структуру при росте температуры в сотни раз.

2. Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^\nu \chi_0 T^\sigma \frac{\partial T}{\partial r} \right) + q_0 \rho T^\beta, \quad (1)$$

где $E = c_V T$, а $c_V, \chi_0, q_0 > 0, \sigma > 0, \beta > 1$ — заданные параметры, рассматривается в плоской ($\nu = 0$), цилиндрической ($\nu = 1$) и сферической геометрии ($\nu = 2$) в среде с распределенной плотностью: $\rho = Ar^{-\varkappa}$, $0 \leq \varkappa < 2$.

Горение инициируется заданием на полупрямой $0 \leq r < \infty$ некоторого начального ограниченного распределения температуры $T(r, 0) = T_0(r) \leq M < \infty$.

Исследуются автомодельные решения уравнения (1), развивающиеся в режиме с обострением. Подставляя в уравнение (1) выражение

$$T(r, t) = g(t) \Theta(\xi), \quad \xi = \frac{r}{\psi(t)}, \quad (2)$$

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 01-06-80204, № 02-01-00844.

²⁾ Докл. РАН. — 2004. — Т. 395, №. 6. — С. 743–748.

определяем вид функций $g(t)$, $\psi(t)$:

$$g(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^m, \quad \psi(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n, \quad (3)$$

$$m = -\frac{1}{\beta - 1}, \quad n = \frac{\beta - \sigma - 1}{(\beta - 1)(-\kappa + 2)},$$

и вид автомодельного уравнения относительно функции $\Theta(\xi)$:

$$\frac{1}{\xi^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\xi^\nu \Theta^\sigma \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) = -\frac{m}{\tau} \xi^{-\kappa} \Theta + \frac{n}{\tau} \xi^{-\kappa+1} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - \xi^{-\kappa} \Theta^\beta, \quad (4)$$

где $\tau > 0$ — произвольный параметр обобщенного разделения переменных (2), имеющий смысл времени обострения [9–11].

Уравнение (4) имеет два пространственно-однородных решения: $\Theta(\xi) \equiv 0$ и гомотермическое

$$\Theta_H = \left(\frac{1}{(\beta - 1)\tau} \right)^{\frac{1}{\beta - 1}}. \quad (5)$$

Ищутся решения уравнения (4), удовлетворяющие обычным граничным условиям на фронте тепловой волны (по нулевому фону)

$$\text{либо при } \xi = \xi_f: \quad \xi^\nu \Theta^\sigma \frac{d\Theta}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_f} = 0, \quad \Theta|_{\xi=\xi_f} = 0, \quad (6)$$

$$\text{либо при } \xi \rightarrow \infty: \quad \sigma^\nu \Theta^\sigma \frac{d\Theta}{d\xi} \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \quad \Theta \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \quad (7)$$

и в центре симметрии при $\xi = 0$:

$$\xi^\nu \Theta^\sigma \frac{d\Theta}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \quad \Theta|_{\xi=0} < \infty. \quad (8)$$

Краевая задача (6)–(8) для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (4) является задачей на собственные значения (с. з.) τ и собственные функции (с. ф.) $\Theta(\xi, \tau)$. Цель настоящей работы заключается в исследовании спектра с. ф. в зависимости от значений параметров. Ранее было установлено [9–11], что спектр с. з. непрерывный, и с. ф., отвечающие разным с. з., связаны преобразованием подобия. Это свойство позволяет зафиксировать любое удобное значение $\tau > 0$ и исследовать спектр с. ф., отвечающий одному τ . Положим $\tau = 1/(\beta - 1)$, тогда $\Theta_H = 1$.

Уточним условие (8). Главные члены разложения решения при $\xi \rightarrow 0$ имеют вид $\Theta(\xi) \approx C_0 + C_1 \xi^{-\kappa+2} + \dots$, $C_0 \neq \Theta_H$, $C_0 \neq 0$. Отсюда следует, что $\Theta'_\xi(0) = 0$ при $0 \leq \kappa < 1$, а при $1 < \kappa < 2$ производная в центре симметрии обращается в бесконечность.

В работах [4, 11] было установлено, что в зависимости от соотношения между показателями β и σ поставленная задача имеет три типа автомодельных режима с обострением: HS, S и LS.

HS-режим реализуется при $1 < \beta < \sigma + 1$ и представляет собой тепловую волну, амплитуда и фронт которой увеличиваются в режиме с обострением.

S-режим реализуется при $\beta = \sigma + 1$ и представляет собой нестационарную диссипативную структуру, локализованную на фундаментальной длине L_T . Внутри области локализации температура растет в режиме с обострением, а вне ее остается равной нулю. При $\beta \leq \sigma + 1$ задача (4), (5), (7) имеет единственную собственную функцию, монотонно убывающую на отрезке $[0, \sigma_f]$ с максимумом в центре симметрии ($\Theta(0) > \Theta_H$). В случае $\nu = 0, \kappa = 0, \beta = \sigma + 1$ получено аналитическое решение [4].

LS-режим реализуется при $\beta > \sigma + 1$. Автомодельные решения существуют на интервале $[0, \infty)$ или $[\xi_f, \infty)$ и представляют собой сходящиеся к центру симметрии в режиме с обострением нестационарные диссипативные структуры. Ранее было показано, что автомодельная задача может иметь несколько с. ф. $\Theta_j(\xi), j = 1, \dots, N$, [9, 10], отвечающих одному с. з., т. е. развивающихся в одном темпе с одним моментом обострения. Первая с. ф. монотонно убывает; следующие являются немонотонными, с числом локальных экстремумов, равным их номеру. В области своей немонотонности они совершают колебания около гомотермического решения (5) и описываются приближенно линейным уравнением. Кроме с. ф., существующих на полупрямой и удовлетворяющих условию (8) в центре симметрии (назовем их обычными), автомодельная задача при $\nu = 1$ и $\nu = 2$ имеет решения, определенные на интервале $[\xi_f, \infty)$ — структуры «с дыркой». Существование с. ф. с нулевыми участками в центре было обнаружено в [12]. Спектр с. ф. в сферической, цилиндрической геометрии и распределенной плотности может существенно отличаться от спектра с. ф. при $\nu = 0, \kappa = 0$: 1) наличием четных с. ф. с нулевой областью в центре, 2) отсутствием в спектре некоторых нечетных с. ф., начиная с третьей. На рис. 1 представлены первые 12 с. ф. при $\beta = 65, \sigma = 63, \nu = 2, \kappa = 1$. Четыре нечетные с. ф. $\Theta_{2j+1}(\xi), j = 1, \dots, 4$, выпали из спектра. Среди имеющихся 59 с. ф. имеется семь структур «с дыркой» $\Theta_{2j}(\xi), j = 1, \dots, 7$, и 52 обычных. В области немонотонности с. ф. описываются частью решения $u_j(\xi)$, линеаризованного около Θ_H уравнения со своей амплитудой, которая задается соответствующими начальными данными: $u_j(\xi_0) = \Theta_j(\xi_0) - 1, u_j(\xi_0) = \Theta_j(\xi_0)$, где ξ_0 — точка экстремума функции $\Theta_j(\xi)$ (рис. 1), ближайшая к центру.

3. Собственные функции в LS-режиме были численно продолжены по параметру β при фиксированном σ , и был проведен их бифуркационный анализ. Бифуркационный анализ спектра с. ф. в плоской геометрии и постоянной плотности показал, что собственная функция Θ_j с номером $j = 2, 3, 4 \dots$ существует в интервале

$$\sigma + 1 < \theta < \beta_j, \quad \text{где } \beta_j = \frac{j(\sigma + 1) - 1}{j - 1}. \quad (9)$$

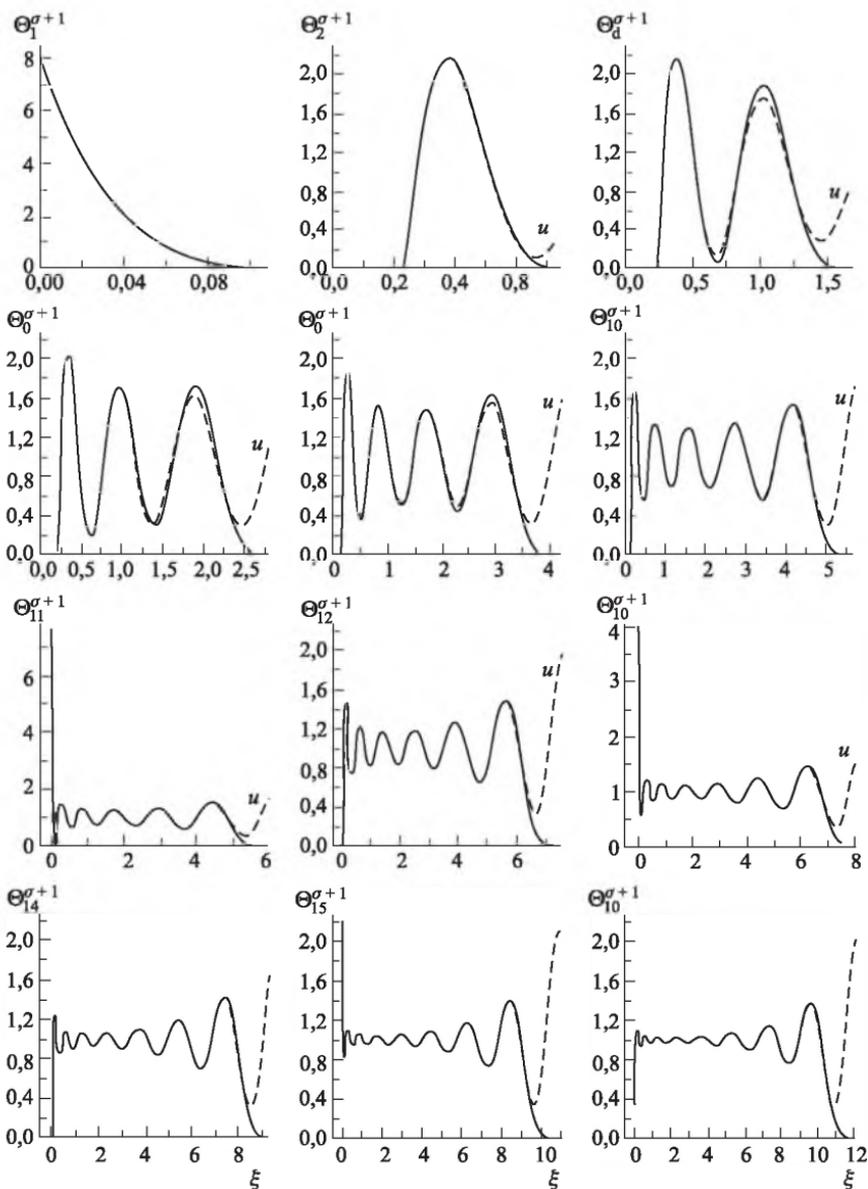


Рис. 1. Спектр собственных функций при $\beta = 65$, $\sigma = 63$, $\nu = 2$, $\kappa = 1$ (первые 12 штук)

Значения $\beta = \sigma + 1$ и $\beta = \beta_j$ являются точками бифуркации, в которых прекращает свое существование с. ф. Θ_j . Первая с. ф. существует при любом значении $\beta > \sigma + 1$. При $\beta > \beta_2 = 2\sigma + 1$ автомодельная задача

в LS-режиме имеет только одну собственную функцию. Чем больше номер с.ф., тем уже интервал по параметру β , в котором она существует. Число собственных функций N , которое имеет автомодельная задача при данных β и σ , определяется формулой

$$N = [a], \quad \text{если } a \text{ — нецелое, } a = \frac{\beta - 1}{\beta - \sigma - 1}, \quad (10)$$

$$N = a - 1, \quad \text{если } a \text{ — целое.}$$

На рис. 2 представлена бифуркационная диаграмма для десяти с.ф. при $\nu = 0$, $\kappa = 0$, $\sigma = 2$. При приближении к правой границе интервала существования амплитуда отклонения от гомотермического решения

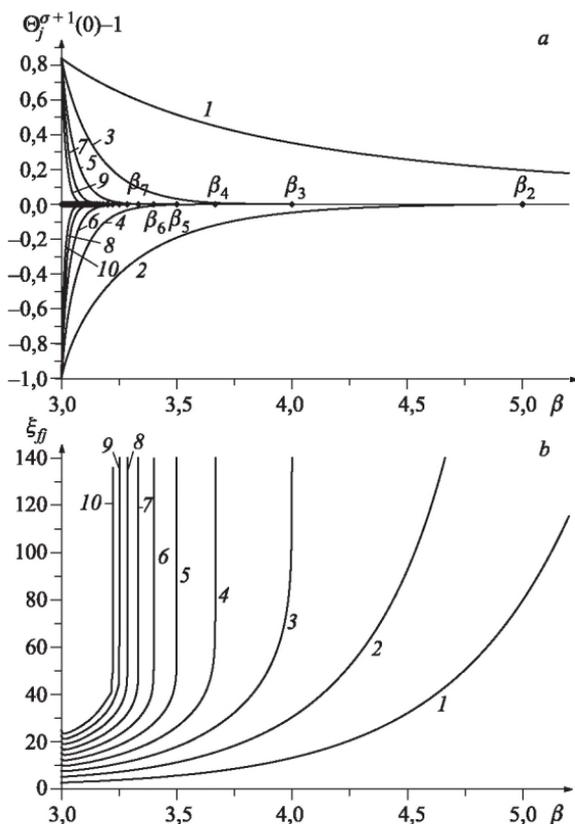


Рис. 2. Бифуркационные диаграммы для десяти с.ф. $\Theta_j(\xi)$ ($\sigma=2$, $\nu=0$, $\kappa=0$)

с.ф. уменьшается и стремится к нулю при $\beta \rightarrow \beta_j$ (рис. 2, а), а значение точки ξ_{jj} , где функция мала (здесь $\Theta_j^{\sigma+1} = 10^{-5}$), стремится к бесконечности (рис. 2, б), т.е. при $\beta \rightarrow \beta_j$ с.ф. приближается к гомотермическому решению, и в точке бифуркации сливается с ним. При уменьшении параметра β амплитуда отклонений максимумов и ми-

нимумов с. ф. от гомотермического решения увеличивается (рис. 2, а). При $\beta \rightarrow \sigma + 1$ минимумы стремятся к нулю, а максимумы — к амплитуде автомодельного решения $\Theta_j^S(\xi)$ в S-режиме, которое можно рассматривать как периодическое в силу автономности уравнения (4) в этом случае. Расчеты показали, что при $\beta \rightarrow \sigma + 1$ с. ф. с номером j стремится к решению $\Theta_j^S(\xi)$, имеющему j полупериодов на отрезке $0 \leq \xi \leq j \times 0,5 L_T$.

4. Бифуркационный анализ спектра автомодельных решений в сферической и цилиндрической геометрии показал, что j -я с. ф. $\Theta_j(\xi)$ существует в интервале

$$\sigma + 1 < \beta_j^*(\nu, \kappa) < \beta < \beta_j, \quad j = 2, 3, \dots \quad (11)$$

Первая с. ф. существует при всех $\beta > \sigma + 1$, превращаясь в точке бифуркации $\beta = \sigma + 1$ в единственную с. ф. S-режима для данных ν и κ . Правая граница области существования с. ф. $\Theta_j(\xi)$ при $\nu = 1$, $\nu = 2$ и $0 \leq \kappa < 2$ такая же, как и в плоском случае (9), и отвечает бифуркации слияния с гомотермическим решением. На рис. 3 представлена бифуркационная диаграмма для первых пяти с. ф. при $\nu = 1$, $\kappa = 0$, $\sigma = 2$. При уменьшении параметра β эволюция четных с. ф. и нечетных различаются. При уменьшении β абсолютный минимум четной с. ф., который находится в точке $\xi = 0$, уменьшается и при некотором значении β_{2j}^* достигает нуля (на рис. 3, а эти точки бифуркации обозначены ромбиками). При дальнейшем уменьшении параметра β четная с. ф. отодвигается от начала координат, превращаясь в структуру с «дыркой». Сначала превращается в структуру с «дыркой» вторая с. ф., затем четвертая и т. д. Чем ближе β к $\sigma + 1$, тем больше собственных функций с «дыркой» уже образовалось и тем дальше младшие с. ф. отодвинулись от центра (см. рис. 1). При $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$ минимумы четной с. ф. с дыркой опускаются до нуля, и она приближается на бесконечности к с. ф. $\Theta_{S,j}(\xi)$ в S-режиме при $\nu = 0$, $\kappa = 0$.

Теперь рассмотрим эволюцию старших нечетных с. ф. $\Theta_{2j+1}(\xi)$ с изменением параметра β . При уменьшении β амплитуда колебаний около гомотермического решения увеличивается и абсолютный минимум с. ф., который находится ближе всех других минимумов к началу координат, стремится к нулю. В точке бифуркации (на рис. 3 они отмечены кружками) с. ф. $\Theta_{2j+1}(\xi)$ прекращает свое существование, распадаясь на первую с. ф. $\Theta_1(\xi)$ и четную с. ф. $\Theta_{2j}(\xi)$ с «дыркой». Сначала распадается третья с. ф., затем пятая и т. д., чем ближе β к $\sigma + 1$, тем больше распавшихся нечетных с. ф. Таким образом, чтобы определить число с. ф. при данных β, σ, ν и κ , надо из числа с. ф. для плоского случая (9) вычесть число распавшихся нечетных с. ф., которое в свою очередь зависит от геометрии области и от плотности.

5. Устойчивость автомодельных решений исследовалась в рамках задачи Коши для уравнения (1). В качестве начального распределения температуры бралась либо сама с. ф. — резонансное возбуждение, либо

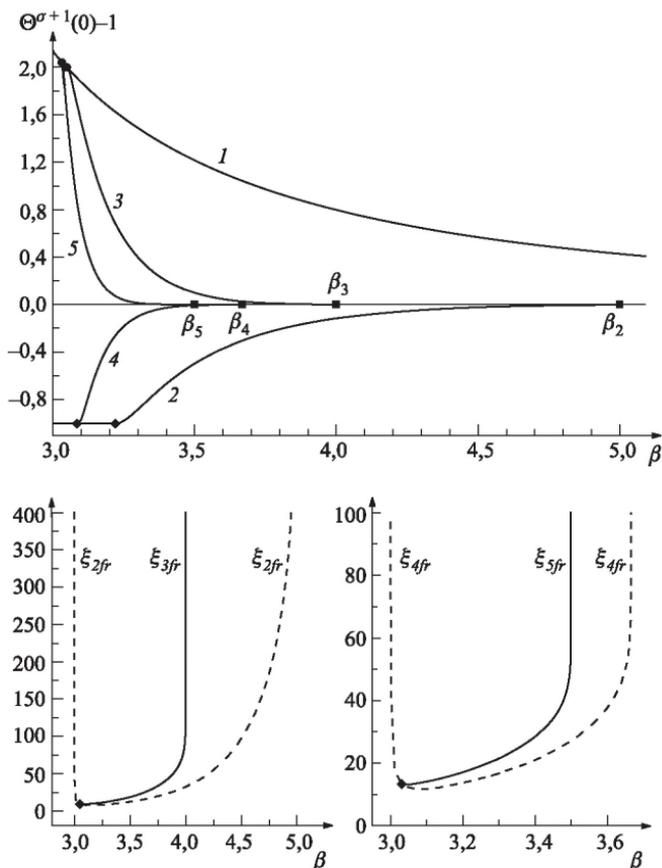


Рис. 3. Бифуркационные диаграммы для пяти с. ф. $\Theta_j(\xi)$ ($\sigma = 2, \nu = 1, \kappa = 0$)

«возмущенная» с. ф. Известно, что автомодельные решения, развивающиеся в режиме с обострением, неустойчивы по отношению к малым возмущениям, однако эти решения могут обладать структурной устойчивостью, в смысле выхода на автомодельный режим [9, 10]. Доказано [13], что бесконечно близкий к нулю «хвост» с. ф. «обрезается», и в LS-режиме имеет место явление локализации. С целью выяснения структурной устойчивости с. ф. в работе проводилась автомодельная обработка [14]. Исследования показали, что в любой геометрии и любом распределении плотности первая с. ф. является структурно устойчивым автомодельным решением. В сферической и цилиндрической геометрии область ее притяжения ограничена некоторым радиусом R_C . Другим структурно устойчивым решением, найденным впервые в работе [?], является вторая с. ф. с нулевой областью в центре. Она обладает широкой областью притяжения, и к ней стремятся многие решения с произвольными начальными данными (см. рис. 4).

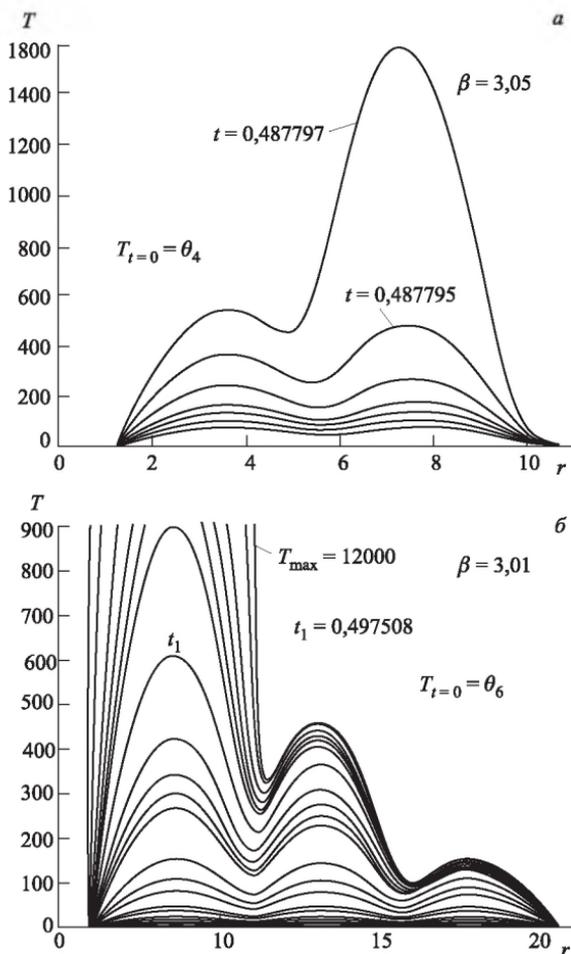


Рис. 4. Профили температуры в процессе эволюции четвертой и шестой с. ф. ($\sigma = 2$, $\nu = 1$, $\kappa = 0$)

Известно, что старшие с. ф., имеющие несколько максимумов, не являются структурно устойчивыми решениями, однако при резонансном возбуждении они могут обладать метастабильной устойчивостью [9, 10]. Проведенные расчеты впервые обнаружили, что устойчивость с. ф. зависит от параметров, от ее номера и от четности номера. Нечетные с. ф. могут сохранять свою структуру при росте температуры в 10–20 раз, в то время как четные следуют автомодельному закону при росте температуры от нескольких раз при больших значениях β до нескольких сотен и даже тысяч раз при β , близких к $\sigma + 1$. Эволюция с. ф. в LS-режиме при больших и малых β качественно отличается. При больших β все максимумы сложной с. ф. при $t \rightarrow \varphi$ поглощаются

одним, и нечетные с. ф. вырождаются в первую, а четные — во вторую с. ф. с дыркой. При $\beta \rightarrow \sigma + 1$ вырождение с. ф. вблизи момента обострения происходит в виде распада. Сложная четная с. ф. существует очень долго и поэтапно распадается на независимо горящие на своей фундаментальной длине со своим моментом обострения структуры, при этом в процессе эволюции наблюдаются четные с. ф. с меньшим номером, как промежуточные асимптотики (рис. 4).

Собственные функции качественно отличаются от произвольных распределений температуры, которые быстро перестраиваются и вырождаются в горение простой структуры. Спектр автомодельных решений определяет весь конечный набор структур в нелинейной среде, развивающихся согласованно с одним моментом обострения. Сложную структуру можно рассматривать как объединение простых. Метастабильная устойчивость старших с. ф. позволяет сформулировать принципы коэволюции простых структур, объединенных в сложную [15].

Доклады Российской Академии наук
2004. Т. 395, № 6

Поступила
25.01.2005

Список литературы

1. Режимы с обострением. Эволюция идеи. — М.: Наука, 1998. — 255 с.
2. Galaktionov V. A., Vazquez J. L. // J. Discrete and Contin. Dynamical Systems. — 2002. — V. 8, No. 2. — P. 399–433.
3. Самарский А. А., Галактионов В. А. и др. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987. — 480 с.
4. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. и др. // Письма в ЖЭТФ. — 1978. — Т. 26, вып. 9.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. и др. // ДАН СССР. — 1967. — Т. 173, № 4. — С. 808–811.
6. Князева Е. Н., Курдюмов С. П. Основания синергетики. — СПб.: Алетейя, 2002. — 414 с.
7. Лобанов А. И., Старожилова Т. К. Нестационарные структуры в модели свертывания крови // Новое в синергетике: Взгляд в третье тысячелетие. — М.: Наука, 2002. — С. 346–367.
8. Капица С. П. // УФН. — 1996. — Т. 166, № 1. — С. 63–80.
9. Самарский А. А., Еленин Г. Г. и др. // ДАН СССР. — 1977. — Т. 237, № 6.
10. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А. // ЖВМиМФ. — 1983. — Т. 23, № 2. — С. 380–390.
11. Курдюмов С. П., Куркина Е. С. и др. // ДАН СССР. — 1980. — Т. 251, № 3.
12. Димова С. Н., Касчиев М. С., Курдюмов С. П. // ЖВМиМФ. — 1989. — Т. 29, № 11. — С. 1683–1704.
13. Галактионов В. А. // Дифференц. уравнения. — 1985. — Т. 21, № 1. — С. 15–23.
14. Barenblatt G. I. Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics // Cambridge Texts in Applied Mathematics. — Cambridge University Press, 1996. — P. 386.

15. Курдюмов С. П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. — М.: Наука, 1982. — С. 217–243.

Одного автора этой статьи уже нет, другой надолго уехал. Поэтому несколько слов об этой замечательной работе придется сказать мне.

Сергей Павлович часто приглашал своих учеников домой. Разговоры велись длинные и неспешные. Про науку, про Институт, про жизнь. И когда мы в первый раз, в качестве умудренных жизнью третьекурсников, с Леной Куркиной были у него дома и пили чай на кухне, то он и рассказал нам об этой задаче.

Он видел в многомерных собственных функциях нелинейной среды ключ к законам организации в нелинейных средах, к правилам образования сложных структур из простых. Он считал, что именно эта задача позволит по-новому взглянуть на квантовую механику, на субатомный уровень материи. Глаза у Сергея Павловича горели и он цитировал нам в связи с этой задачей Платона, дал читать книгу Гейзенберга с мечтами отца-основателя квантовой механики о единой теории поля.

И, возвращаясь из гостей, мы Леной говорили, что только у вдохновенного и удивительного человека могут быть такие чудесные, недоступные задачи, которые никогда решены не будут, но которые будут манить, очаровывать, восхищать. В жизни должно быть место для этого. Но нам для курсовых нужно что-то более реальное...

Но все сложилось. Сложилось необычным, во многом таинственным образом. Когда наш учитель заболел, Лена начала чаще бывать у него дома, обсуждать сделанное. И их снова захватила эта задача. И все замечательно совпало! Работая над задачами химической кинетики, Лена прекрасно овладела численными методами бифуркационного анализа. И здесь они сыграли! Мечта исполнилась! И исполнение мечты не разочаровало Сергея Павловича.

Наверно, это было самой большой «научной радостью» 2004 г. Его последнего года. И дома, и в больнице у нас было три постоянных темы, которые вдохновляли Сергея Павловича — собственные функции нелинейной среды, построенные в этой работе. Развитие, обобщение, применение. Будущая защита диссертаций его учениц — Стефки Димовой и Лены Куркиной. Достижения и удачи нашего института и его сотрудников.

Наука была для Сергея Павловича не работой, а его судьбой и опорой. У него было много радостей в науке, но и среди них этот результат стал одной из самых больших.

Р. С. Пока книга готовилась к печати, к этой статье у нас появился еще один комментарий.

В этой работе получили развитие идеи, высказанные С. П. Курдюмовым еще в конце 70-х годов. Тогда, изучая нестационарную термодинамику режимов с обострением, он обратил внимание на особую роль автомодельных решений, описывающих различные типы диссипативных структур, которые могут существовать в данной нелинейной среде. Он вел понятие собственных функций нелинейной среды и выдвинул принцип объединения простых структур в сложные [1]. Его поразило, что при определенных условиях возникает дискретный спектр локализованных диссипативных структур разной сложности, образующих, как он заметил, некоторую организацию в нелинейной среде. Он увидел здесь аналогию с квантовой механикой. Более того, в одном из случаев, используя линейное приближение, привел автомодельное уравнение к виду стационарного уравнения Шрёдингера для атома водорода [1–3] ([3] есть в этом сборнике). Развивая эту аналогию, связь с уравнением Шрёдингера удастся найти и мне в некоторых других случаях в моей кандидатской диссертации 1982 г.

Связь собственных функций с Ψ -функциями уравнения Шрёдингера наводит Сергея Павловича на мысль о существовании спектра многомерных автомодельных решений, имеющих вид различных оболочек в атоме. Он предсказывает существование двумерных и трехмерных тепловых структур с областями локализации, имеющих формы гантели, бублика, связанных шаров и других. Несмотря на отсутствие быстродействующей вычислительной техники, А. Б. Потапову с соавторами удалось тогда разработать метод и построить целый ряд двумерных структур (см. сборник). К сожалению, ставится под сомнение их существование, поскольку двумерные структуры были получены численно на грубых сетках. Вообще падает интерес к изучению неустойчивых метастабильных структур, и эти исследования уходят на второй план.

Однако идея развить квантово-механическую аналогию и построить атом водорода как диссипативную структуру, являющуюся порождением некоторой нелинейной среды, не оставляет Сергея Павловича. Связать синергетику с квантовой механикой, объяснить, описать квантовые явления непосредственно с помощью нелинейных дифференциальных уравнений параболического типа, он считает важнейшей фундаментальной задачей нашего времени. И в 2001 г. он обращается ко мне с предложением возобновить работы, описанные выше. Но приступить к ним мне удастся только в феврале 2003 г. Я начинаю с исследования спектров одномерных, радиально-симметричных и многомерных структур, используя современные вычислительные алгоритмы. Применяю метод продолжения по параметру и провожу бифуркационный анализ автомо-

дельных решений, который позволяет получить новые результаты по строению спектров тепловых структур. Кроме того, провожу исследование устойчивости автомодельных решений. Основные результаты по спектрам радиально-симметричных собственных функций описаны в наших двух работах с Сергеем Павловичем [4] и [5], новые результаты по спектрам многомерных структур частично отражены в представляемой работе и в работах [6–8]. Методы сгущения сеток, использование разных систем координат для получения одной и той же двумерной структуры, а также применение методов продолжения по параметру, отслеживающих эволюцию структур, позволяют снять все сомнения в существовании этих решений. Сергей Павлович приходит в восторг от вида красивой архитектуры двумерных структур и, наконец, трехмерных. А вот и предсказанная структура в форме гантели!

Работа с Сергеем Павловичем просто захватывает меня и приносит огромное наслаждение. Долгие живые обсуждения в его гостеприимном доме, высказывание самых невероятных предположений и затаенных мыслей, радость общения с Учителем навсегда останутся в моей памяти как самые светлые воспоминания.

Сергей Павлович подталкивает меня на попытку построения не просто некоторой тепловой модели атома, а реальной модели элементарной частицы. Он пытается осмыслить притяжение и отталкивание между локализованными структурами в нелинейной диссипативной среде через автомодельный закон, связывающий пространство и время. Он высказывает предположения, что спин — это диссипативная структура в виде спиральной волны. Задает вопросы: если собственные функции описывают электронные оболочки атома, то что описывает ядро? Как интерпретировать наблюдаемую асимметрию в модели по отношению к четным и нечетным собственным функциям, при которой в рассматриваемом случае не существует нечетных собственных функций с небольшими номерами (они все распадаются), а в спектре остаются только четные радиально-симметричные собственные функции в виде выделенных сферических слоев? Это что — состояния электрона и позитрона? Пытается понять, устойчив ли вечно атом, или у него, как в нашей модели, есть свое время обострения, пусть и очень большое? Как подтвердить экспериментально нашу модель атома? Возможно ли это сделать по смещению спектральных линий в свете от далеких звезд? Ведь по нашей модели происходит пусть очень медленное, но движение оболочек к центру атома? И т. д. ...

Много дискуссий проходило по поводу интерпретации констант энергий E_n и заряда Z , фигурирующих в уравнении Шрёдингера. Сергей Павлович первоначально предполагал, что число Z должно приблизительно равняться числу известных на Земле элементов, а набор констант E_n должен быть пропорциональным энергиям, заключенным в структурах. Но все оказалось совсем не так. Мне

удалось, в конце концов, «распутать» параметры нелинейной среды и найти аналоги константам E_n и Z (см. статью).

В этой работе подтвердилась идея Сергея Павловича, что сложные структуры есть не просто немонотонные распределения температуры, а объединения простых структур, причем совокупность всех собственных функций определяет некоторую организацию в среде. Действительно, как он и писал еще в [1], «возникновение организации в нелинейной среде обусловлено возникновением локализованных процессов, которые, в свою очередь, по определенным законам могут быть объединены в более сложные организации процессов».

Эта работа — только первый шаг в направлении построения атома как диссипативной структуры в частности, и в синергетической трактовке квантово-механических явлений вообще. Я буду очень счастлива, если удастся выполнить научное завещание Сергея Павловича и сделать еще несколько шагов в этом направлении.

2006 г.

Е. С. Куркина

Список литературы

1. Курдюмов С. П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации // Препринт ИПМ АН СССР. — 1979. — № 29.
2. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г. Диссипативные структуры в средах с распределенными параметрами // Препринт ИПМ АН СССР. — 1979. — № 16.
3. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Диссипативные структуры в неоднородной нелинейной горячей среде // ДАН СССР. — 1980. — Т. 251, № 3.
4. Куркина Е. С., Курдюмов С. П. Спектр диссипативных структур, развивающихся в режиме с обострением // ДАН. — 2004. — Т. 395, № 6. — С. 1–6.
5. Курдюмов С. П., Куркина Е. С. Спектр собственных функций автоматической задачи для нелинейного уравнения теплопроводности с источником // ЖВМиМФ. — 2004. — Т. 44, № 9. — С. 1619–1637.
6. Куркина Е. С. Двумерные и трехмерные тепловые структуры в среде с нелинейной теплопроводностью // Прикладная математика и информатика. — М.: Изд-во фак-та ВМиК МГУ, 2004. — № 17. — С. 84–112.
7. Курдюмов С. П., Куркина Е. С. Тепловые структуры в среде с нелинейной теплопроводностью // Будущее прикладной математики. Лекции для молодых исследователей: Сб. — М.: Едиториал УРСС, 2005. — С. 10–39.
8. Куркина Е. С., Никольский И. М. Бифуркационный анализ спектра двумерных тепловых структур, развивающихся в режиме с обострением // Прикладная математика и информатика. — М.: Изд-во фак-та ВМиК МГУ, 2005. — № 22. — С. 40–65.

III. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СТРУКТУР (СИММЕТРИИ, ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ, ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ)

Разностные аналоги теоремы Э. Нётер

В. Л. Дородницын

Известная теорема Э. Нётер [1] устанавливает связь между инвариантностью вариационного функционала и консервативностью соответствующих дифференциальных уравнений Эйлера, т. е. выполнением законов сохранения на их решениях. В работах [2–4] строятся разностные аналоги этой конструкции, которые, вообще говоря, имеют существенные отличия от непрерывного варианта. Настоящая работа представляет собой переработанный вариант публикаций [2, 3], дополненный новыми результатами [4].

Введение. Инвариантность дифференциальных уравнений относительно непрерывной группы преобразований является, безусловно, фундаментальным, глубинным свойством математических моделей физики. Мы напомним, что знание непрерывной симметрии дает значительную информацию об исследуемой системе уравнений:

— действие группы переводит множество всех решений в себя, это позволяет находить новые решения из уже известных;

— стандартная процедура вычисления инвариантов группы позволяет представить дифференциальные уравнения в инвариантной форме, а также находить форму инвариантно-групповых решений, поиск которых приводит к интегрированию уравнений меньшей размерности;

— для обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих симметрией, существуют процедуры понижения порядка вплоть до полной интегрируемости, если размерность симметрии равна или больше (в определенном смысле) порядка уравнения;

— инвариантность уравнений в частных производных является необходимым условием применения теоремы Э. Нётер для получения законов сохранения (первых интегралов для ОДУ).

При конструировании разностных уравнений и сеток инвариантность относительно групп Ли преобразований играет также большую роль. Сохранение симметрии исходной дифференциальной модели в ее разностном аналоге приводит к тем же качественным результатам, которые перечислены выше. Однако здесь есть своя специфика, присущая только разностным (т. е. нелокальным) объектам. Группа преобразований может деформировать структуру разностной сетки, что повлияет на аппроксимацию и алгебраические свойства разностной схемы. Особенность нашего подхода к симметрии разностных моделей заключается в том, что к разностному уравнению, аппроксимирующему исходное дифференциальное, добавляется еще одно уравнение, характеризующее геометрическую структуру разностной сетки. В работах [5, 6] были выделены классы преобразований, сохраняющих равномерность, ортогональность и другие геометрические характеристики разностных сеток. Это послужило основой для построения серии разностных моделей, в которых полностью сохранена симметрия исходных дифференциальных уравнений [6–9].

В настоящей работе рассматривается связь симметрии разностных вариационных моделей с их консервативностью.

Инвариантность разностных уравнений Эйлера и разностных функционалов. Разностное представление оператора Эйлера существенно зависит от типа разностной сетки, на которой он рассматривается (см. [2–4]). В случае одной независимой переменной x и одной или нескольких зависимых переменных $(u^1, u^2, u^3, \dots, u^m)$ оператор Эйлера на *равномерной сетке* выражается следующим образом:

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} - \sum_{s=1}^{\infty} (-h)^{s-1} D^s \left(\frac{\partial}{\partial u_x} \right) = \frac{\partial}{\partial u} - D_{-h} \left(\frac{\partial}{\partial u_x} \right), \quad (1)$$

где

$$D_{-h} = \sum_{s \geq 1} \frac{(-h)^{s-1}}{s!} D^s$$

— оператор разностного дифференцирования влево, коммутирующий на равномерной сетке с разностным дифференцированием вправо

$$D_{+h} = \sum_{s \geq 1} \frac{h^{s-1}}{s!} D^s, \quad D = \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + \dots$$

— оператор полного дифференцирования по x, u_x — правая разностная производная. В (1) предполагается, что оператор Эйлера применяется к функциям $\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(x, u, \underset{h}{u_x} \right)$.

Конечно-разностное уравнение

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - D_{-h} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right) = 0 \quad (2)$$

мы будем называть *разностным уравнением Эйлера* на равномерной сетке, функцию $\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(x, u, u_x \right)$ — разностной функцией Лагранжа, любое решение уравнения (2) — экстремалью.

В случае неравномерной одномерной сетки разностное дифференцирование зависит от локальных шагов h^+ и h^- (правых и левых) в данной точке x .

Уравнение Эйлера на неравномерной сетке записывается так (см. [1-4]):

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} - \left(\frac{h^-}{h^+} \right) D_{-h} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right) = 0. \quad (3)$$

Множитель (h^-/h^+) в (3) характеризует пропорции *разностного шаблона* в данной точке:

$$h^-/h^+ = \varphi(x).$$

Уравнение Эйлера на неравномерной сетке можно записать также в виде:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} - \frac{1}{h^+} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial u_x} \right) = 0, \quad (3^*)$$

где $\tilde{\mathcal{L}} = S_{-h}(\mathcal{L}) = \mathcal{L} \left(x^-, u^-, u_x^- \right)$, S_{-h} — оператор сдвига влево; u_x^- — левая разностная производная.

Рассмотрим уравнение Эйлера в двумерном случае. Разностная сетка предполагается ортогональной и равномерной по обоим направлениям. Пусть лагранжиан

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(x^1, x^2, u, u_1, u_2 \right)$$

зависит лишь от первых правых разностных производных u_1 и u_2 . Тогда разностное уравнение Эйлера можно записать так:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - D_{-h} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} \right) - D_{+h} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_2} \right) = 0. \quad (4)$$

Если лагранжиан зависит также и от левых разностных производных $u_{\bar{i}}$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(x^1, x^2, u, u_1, u_{\bar{1}}, u_2, u_{\bar{2}} \right),$$

тогда уравнение Эйлера на неравномерной ортогональной сетке будет таким:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{h_i^-}{h_i^+} D_i^- \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \right) - \frac{h_i^+}{h_i^-} D_i^+ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i^-} \right) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Рассмотрим теперь инвариантность конечно-разностных функционалов вида:

$$L = \sum_{\Omega} \mathcal{L} \left(x, u, u_x \right) h^+, \quad (6)$$

где u_x — первая правая разностная производная. Пусть функционал (6) определен в области Ω разностной сетки ω , где шаг сетки h^+ в данной точке может зависеть от решения:

$$h^+ = \varphi(x, u). \quad (7)$$

Пусть в $\left(x, u, u_x, u_{xx}, \dots, h^+ \right)$ задана однопараметрическая группа G_1 точечных преобразований с оператором

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \dots + h^+ D_{+h}(\xi) \frac{\partial}{\partial h^+} + h^- D_{-h}(\xi) \frac{\partial}{\partial h^-}. \quad (8)$$

Действие группы G_1 с оператором (8) преобразует разностный функционал (6) и разностную сетку ω вместе с областью $\Omega \subset \omega$. Поэтому преобразование сетки ω должно быть включено в определение преобразования разностного функционала.

Мы будем называть преобразованным значением функционала (6) на сетке (7) следующее выражение:

$$L^* = \sum_{\Omega^*} \mathcal{L}^* \left(x^*, u^*, u_x^* \right) h^{+*}, \quad h^{+*} = \varphi^*(x^*, u^*),$$

где, вообще говоря, $\varphi \neq \varphi^*$ и $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}^*$.

Заметим, что преобразованная область Ω^* может зависеть от решения u , если преобразование x^* зависит от u .

Мы будем говорить, что разностный функционал L инвариантен относительно группы G_1 , если для любого преобразования G_1 и для любой области Ω справедливо:

$$\sum_{\Omega} \mathcal{L} \left(x, u, u_x \right) h^+ = \sum_{\Omega^*} \mathcal{L}^* \left(x^*, u^*, u_x^* \right) h^{+*}, \quad (9)$$

$$h^{+*} = \varphi^*(x^*, u^*).$$

Условия инвариантности (6) на сетке (7) следующие [2, 3]:

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \eta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + \left(D_{+h}(\eta) - u_x D_{+h}(\xi) \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} + \mathcal{L} D_{+h}(\xi) = 0, \\ S_{+h}(\xi) - \xi(1 + \varphi_x) - \eta \varphi_u = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где S_{+h} — оператор сдвига вправо; $h^+ D_{+h} = S_{+h} - 1$.

В работах [2, 3] было получено, что разностный функционал

$$L = \sum_{\Omega_h} \mathcal{L} \left(x^1, x^2, u, u_1, u_2 \right) h_1^+ h_2^+ \tag{11}$$

на двумерной равномерной ортогональной сетке $\omega_{h_1 \times h_2}$, $h_i^+ = h_i^-$, с постоянными шагами h_1 и h_2 , инвариантен относительно G_1 тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} X(\mathcal{L}) + \mathcal{L} \left(D_{+h}(\xi^1) + D_{+h}(\xi^2) \right) = 0, \\ D_{+h-h} D_1(\xi^1) = 0, \quad D_{+h-h} D_2(\xi^2) = 0, \quad D_{\pm h}(\xi^2) = -D_{\pm h}(\xi^1), \end{aligned} \tag{12}$$

где $D_{\pm h}$ — полное дифференцирование в i -м направлении; X — оператор группы G_1 :

$$\begin{aligned} X = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \zeta_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \dots + \\ + \left(S_{+h}(\xi^1) - \xi^1 \right) \frac{\partial}{\partial h_1^+} + \left(S_{+h}(\xi^2) - \xi^2 \right) \frac{\partial}{\partial h_2^+}, \end{aligned} \tag{13}$$

где ζ_i — линейные формы от ξ^1, ξ^2, η (см. [5, 9]).

Известно [1] (см. также [10–12]), что в непрерывном случае инвариантность уравнений Эйлера является следствием инвариантности (или дивергентной инвариантности (см. [13])) соответствующего функционала. Эта ситуация существенно меняется при переходе к разностному случаю.

Для простоты мы рассмотрим одномерный случай. Для того чтобы разностное уравнение Эйлера (2) инвариантного разностного функционала (6) на равномерной сетке ω_h было инвариантно, необходимо и достаточно, чтобы (см. [2, 3]):

$$\xi_u \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + u_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + u_{x\bar{x}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} - D_{-h}(\mathcal{L}) \right) = 0, \quad D_{-h+h} D(\xi) = 0. \tag{14}$$

Это условие «исчезает» в континуальном пределе, так как оператор в скобках стремится к нулю при $h \rightarrow 0$. Поэтому в непрерывном случае уравнения Эйлера допускают любую симметрию соответствующего функционала (обратное утверждение неверно).

В дискретном случае условия (14) выполняются для вырожденных линейных функционалов, а также для специального класса преобразований:

$$\xi_u = 0, \quad D_{-h+h} D(\xi) = 0. \quad (15)$$

Группы преобразований, для которых $\xi_u = 0$, были названы Л. В. Овсянниковым в работе [14] x -автономными.

Квазиэкстремали инвариантного функционала. Итак, лишь случай (14) вполне аналогичен нетеровскому непрерывному варианту, когда инвариантность функционала ведет к инвариантности уравнений Эйлера. Преобразования, не меняющие независимую переменную x (т. е. $\xi = 0$), удовлетворяют, разумеется, условиям (14); этот случай был рассмотрен в работах [15, 16]. В то же время ясно, что многие преобразования не удовлетворяют условиям (14). Это означает, что такие преобразования могут преобразовать разностное уравнение Эйлера в некоторое другое уравнение, не меняя при этом разностного функционала.

В работах [2, 3] было получено новое уравнение, названное *квазиэкстремальным*, на котором достигается стационарное значение функционала при преобразованиях группы:

$$\xi_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + D_{-h} \left(u_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} - \mathcal{L} \right) \right) + \eta_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - D_{-h} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} - \mathcal{L} \right) \right) = 0. \quad (16)$$

Заметим, что *квазиэкстремальные уравнения явным образом зависят от оператора группы*, т. е. квазиэкстремальные уравнения инвариантного функционала для разных подгрупп различны.

Квазиэкстремальные уравнения можно переписать в другом виде:

$$\xi_\alpha \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x} + \eta_\alpha \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, \quad (17)$$

где

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x} h^+ + \frac{\delta \mathcal{L}^-}{\delta x} h^- + \mathcal{L}^- - \mathcal{L}, \quad \mathcal{L}^- = S_{-h}(\mathcal{L}), \quad (18)$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = h^+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + h^- \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial u}, \quad (19)$$

В (17), (18), (19) предполагается, что лагранжиан $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, x^+, u, u^+)$.

Легко показать, что в континуальном пределе разница между квазиэкстремальными уравнениями исчезает, — все они стремятся к одному и тому же дифференциальному уравнению Эйлера.

Пример. Рассмотрим конечно-разностную модель обыкновенного дифференциального уравнения

$$u_{xx} = u^{-3}. \quad (20)$$

Уравнение (20) можно рассматривать как уравнение Эйлера инвариантного функционала с функцией Лагранжа $\left(\frac{1}{u^2} - u_x^2\right)$.

Уравнение (20) допускает трехпараметрическую группу точечных преобразований с операторами

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}; \\ X_2 &= 2x \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial u}; \\ X_3 &= x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xu \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (21)$$

В соответствии с теоремой Нётер у уравнения (20) есть три первых интеграла:

$$\begin{aligned} J_1 &= u_x^2 + \frac{1}{u^2} = A^0, \\ J_2 &= 2 \frac{x}{u^2} - 2(u - u_x x)u_x = 2B^0, \\ J_3 &= \frac{x^2}{u^2} + (u - xu_x)^2 = C^0. \end{aligned}$$

Известно [10, 11], что на множестве законов сохранения (первых интегралов ОДУ) можно ввести дополнительную операцию — действие присоединенной алгебры Ли, которая переводит один закон сохранения в другой закон сохранения. Это позволяет выделить минимальное число законов (базис), из которых остальные получаются с помощью соответствующих операторов. Структура действия присоединенной алгебры Ли для уравнения (20) позволяет выделить третий интеграл в качестве базисного:

$$X_1(J_3) = J_2; \quad X_1(J_2) = 2J_1.$$

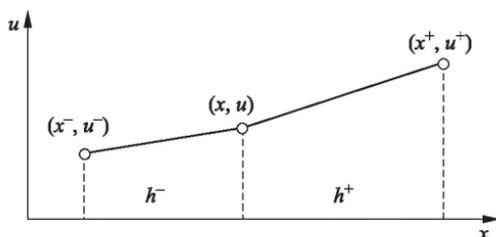
В качестве разностного аналога лагранжиана $\left(\frac{1}{u^2} - u_x^2\right)$ мы выберем следующий:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{uu^+} - \left(\frac{u^+ - u}{h^+}\right)^2, \quad (22)$$

который определен на двух точках некоторой разностной сетки (см. рисунок).

Прежде всего, проверим вариационную инвариантность лагранжиана (22) относительно исходной группы уравнения (20). Разностный функционал

$$L = \sum_{\Omega} \left(\frac{1}{uu^+} - \left(\frac{u^+ - u}{h^+}\right)^2 \right) h^+ = \sum_{\Omega} \left(\frac{h^+}{uu^+} - \frac{(u^+ - u)^2}{h^+} \right), \quad (23)$$



где $h^+ = x^+ - x$, очевидно, допускает трансляцию X_1 . Инвариантность элементарного действия $\mathcal{L}h^+$:

$$X\mathcal{L} + \mathcal{L}D_{+h}(\xi) = 0, \quad (24)$$

также легко проверяется для растяжения X_2 . В случае оператора X_3 мы получим «дивергентную инвариантность», т. е. действие оператора X_3 дает не ноль, а разностную дивергенцию некоторого выражения:

$$X_3\mathcal{L} + \mathcal{L}D_{+h}(x^2) = \frac{u^{+2} - u^2}{h^+} \equiv D_{+h}(u^2). \quad (25)$$

Выпишем экстремальное разностное уравнение, соответствующее функционалу (20):

$$2u_x - 2u_{\bar{x}} - \frac{1}{u^2} \left(\frac{h^+}{u^+} + \frac{h^-}{u^-} \right) = 0, \quad (26)$$

где $u_x = \frac{u^+ - u}{h^+}$, $u_{\bar{x}} = \frac{u - u^-}{h^-}$.

Заметим, что сетка ω_h до сих пор не определена:

$$h^+ = \varphi(x, u, u^+). \quad (27)$$

Поскольку группа G_{3x} автономна, то уравнение Эйлера (26) допускает операторы (22) при условии, что сетка (27) также инвариантна.

Займемся теперь квазиэкстремальями функционала (23). Оператор X_1 дает нам следующую квазиэкстремаль:

$$\frac{1}{u} \left(\frac{1}{u^-} - \frac{1}{u^+} \right) + u_x(u^+ - u) - u_{\bar{x}}(u - u^-) = 0. \quad (28)$$

Квазиэкстремаль, соответствующая оператору растяжения X_2 , определяется уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{x}{u} \left(\frac{1}{u^-} - \frac{1}{u^+} \right) + \frac{1}{u} \left(\frac{x - h^-}{u^-} - \frac{x + h^+}{u^+} \right) + \\ + 2x \left(\frac{u_x^2}{h^2} - \frac{u_x^2}{h^2} \right) + 2u \left(\frac{u_x}{h} - \frac{u_{\bar{x}}}{h} \right) = 0. \quad (29) \end{aligned}$$

Третье квазиэкстремальное уравнение, на решениях которого достигается стационарность функционала (23) при преобразованиях X_3 , таково:

$$x^2 \left(\frac{1}{uu^-} - \frac{1}{uu^+} - \frac{u_x^2}{h} - \frac{u_x^2}{h} \right) + xu \left(\frac{2u_x}{h} - \frac{2u_x}{h} - \frac{h^+}{u^2 u^+} - \frac{h^-}{u^2 u^-} \right) = 0. \quad (30)$$

Заметим, что все три квазиэкстремальных уравнения можно записать в единообразной форме:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x} = 0, \\ 2) \quad & 2x \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x} \right) + u \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} \right) = 0, \\ 3) \quad & x^2 \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x} \right) + xu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} \right) = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

где введены новые обозначения:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} h^+ + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} h^- + \mathcal{L}^- - \mathcal{L}, \quad (32)$$

где $\mathcal{L}^- = \underset{-h}{S}(\mathcal{L})$,

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = h^+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + h^- \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}. \quad (33)$$

Легко проверить, что запись квазиэкстремалей в форме (31) полностью соответствует ранее введенной форме (16), использующей дифференцирование по разностным производным.

Свойства квазиэкстремальных уравнений. Квазиэкстремальные уравнения

$$\xi_\alpha \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x} + \eta_\alpha \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, \quad (34)$$

имеют, очевидно, общую область пересечения:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = 0. \quad (35)$$

Точнее, всякое решение системы (35) является решением системы (34). Замечательно, что множество решений системы (35) допускает ту же группу, что и исходный функционал. Справедлива следующая теорема [17].

Теорема 1. Пусть задан разностный функционал

$$L = \sum \mathcal{L}(x, x^+, u, u^+) h^+, \quad (36)$$

инвариантный относительно группы G_1 с оператором

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \xi^+ \frac{\partial}{\partial x^+} + \eta^+ \frac{\partial}{\partial u^+}. \quad (37)$$

Тогда система (35) допускает ту же симметрию G_1 .

Доказательство см. в [4, 17].

Следствие. Если пересечение квазиэкстремалей (35) соответствует функционалу (36), инвариантному относительно r -параметрической группы G_r , то система (35) также инвариантна относительно G_r . Заметим, что, как всякое инвариантное многообразие, система (35) может быть записана через разностные инварианты группы G_r .

Еще одно свойство квазиэкстремалей инвариантного функционала дается следующей теоремой (см. [4]):

Теорема 2. Пусть квазиэкстремальное уравнение

$$\xi \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x} + \eta \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x} = 0 \quad (38)$$

соответствует стационарным значениям функционала (36) при варьировании вдоль орбиты подгруппы G_1 с оператором (37). Тогда уравнение (38) допускает ту же подгруппу G_1 . Иначе говоря, каждое квазиэкстремальное уравнение инвариантно относительно «своей» подгруппы.

Итак, квазиэкстремальные уравнения инвариантны относительно «своих» подгрупп, а их пересечение допускает всю совокупность симметрии инвариантного функционала.

Возникает естественный вопрос: как действует на квазиэкстремальное уравнение «чужая» подгруппа, которой соответствует другая квазиэкстремаль?

Частично на этот вопрос можно ответить с помощью следующего равенства, справедливого для инвариантного лагранжиана и позволяющего записать квазиэкстремальное уравнение в дивергентном виде:

$$\begin{aligned} \xi \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \frac{h^-}{h^+} \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial x} - D_{+h}(\mathcal{L}^-) \right) + \eta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + \frac{h^-}{h^+} \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial u} \right) = \\ = -D_{+h} \left(h^- \eta \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial u} + h^- \xi \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial x} + \xi \mathcal{L}^- \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Легко проверить, что равенство (39) эквивалентно условию инвариантности функционала (36):

$$\xi \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x} + \xi^+ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x^+} + \eta \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} + \eta^+ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^+} + \mathcal{L} D_{+h}(\xi) = 0. \quad (40)$$

Равенство (39) позволяет установить следующий факт.

Теорема 3. Пусть квазиэкстремальное уравнение (38) инвариантного функционала (36) соответствует группе с оператором X .

Пусть существует оператор \bar{X} , коммутирующий на решениях (38) с оператором разностного дифференцирования:

$$\left[\bar{X}, D_{+h} \right] = 0. \quad (41)$$

Тогда действие оператора \bar{X} преобразует квазиэкстремаль (38) в другую квазиэкстремаль того же функционала.

Следствие. Свойством (41) обладают операторы присоединенной алгебры Ли операторов, допускаемых (36). Таким образом, на множестве всех квазиэкстремалей инвариантного функционала вводится **новая дополнительная операция** — действие присоединенной алгебры. В связи с этим возможно ввести новое понятие: **базис квазиэкстремальных уравнений**, — минимальный набор квазиэкстремалей, из которых действием операторов \bar{X} можно получить все остальные квазиэкстремальные уравнения.

Заметим, что все перечисленные свойства квазиэкстремальных уравнений носят чисто разностный характер, — в континуальном пределе все квазиэкстремальные уравнения переходят в одно и то же уравнение Эйлера, которое инвариантно относительно всей совокупности симметрии соответствующего лагранжиана.

Пример. Проиллюстрируем теперь все эти свойства на примере уравнения (20)

$$u_{xx} = u^{-3}.$$

Инвариантный лагранжиан (23) сохраняет постоянство значений при преобразованиях (21) на решениях соответствующих квазиэкстремальных уравнений (28), (29) и (30). Система (35) будет для них такой:

$$\begin{cases} \frac{1}{ui^-} - \frac{1}{ui^+} + \frac{u_x(u^+ - u)}{h} - \frac{u_x(u - u^-)}{h} = 0, \\ \frac{2u_x}{h} - \frac{2u_x}{h} - \frac{h^+}{u^2 u^+} - \frac{h^-}{u^2 u^-} = 0. \end{cases} \quad (42)$$

Легко проверить, что система (42) допускает всю симметрию (22). Квазиэкстремальные уравнения (28), (29), (30), записанные в виде (42), позволяют проверить второе свойство квазиэкстремалей. Можно убедиться, что первое уравнение в системе (28)–(30) допускает оператор X_1 , второе — оператор X_2 , третье — X_3 , т. е. каждая квазиэкстремаль инвариантна относительно своей подгруппы.

Также легко увидеть третье свойство квазиэкстремалей: оператор $\frac{\partial}{\partial x}$ переводит третье уравнение во второе, а действие оператора $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}$ преобразует второе уравнение в первое. Таким образом, третье уравнение в системе (28)–(30) образует базис квазиэкстремалей. Это же соотношение справедливо и для законов сохранения.

Заметим, что разностная сетка до сих пор не определена. Из инвариантности системы (31) мы знаем, что ее можно представить с помощью набора разностных инвариантов. Стандартная процедура позволяет вычислить следующие разностные инварианты группы G_3 :

$$J_1 = \frac{h^+}{uu^+}, \quad J_2 = \frac{h^-}{uu^-}, \quad J_3 = u^2 u^- \frac{u_x - u_{\bar{x}}}{h^-}. \quad (43)$$

Эти инварианты позволяют выписать общие уравнения для семейства инвариантных сеток:

$$F_\alpha \left(\frac{h^+}{uu^+}, \frac{h^-}{uu^-}, u^2 u^- \frac{u_x - u_{\bar{x}}}{h^-} \right) = 0, \quad (44)$$

где F_α — произвольные функции своих аргументов.

Мы выберем простейший случай инвариантной сетки:

$$\frac{h^+}{uu^+} = \varepsilon, \quad \frac{h^-}{uu^-} = \varepsilon, \quad \varepsilon = \text{const}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (45)$$

или $J_1 = J_2 = \varepsilon$.

Подстановка сетки (45) в систему (42) дает следующее отображение:

$$u^+ u^- (2 - \varepsilon^2) = u(u^+ + u^-).$$

Это отображение на сетке (45) эквивалентно разностному уравнению:

$$\frac{u_x - u_{\bar{x}}}{h^-} = \frac{1}{u^2 u^+}, \quad (46)$$

или $J_3 = 1$.

Можно показать, что уравнение (46) на сетке (45) аппроксимирует уравнение (20) со вторым порядком.

Заметим, что полученная система (45), (46) отлична от разностного уравнения Эйлера:

$$\frac{u_x}{h} - \frac{u_{\bar{x}}}{h} = \frac{1}{2u^2} \left(\frac{h^+}{u^+} + \frac{h^-}{u^-} \right).$$

I-й разностный аналог теоремы Нётер. Как уже отмечалось, в разностных вариационных задачах при моделировании исходной инвариантной задачи возможно рассматривать следующую ситуацию: имеется сеточный функционал, допускающий ту же группу, что и исходный непрерывный функционал, и квазиэкстремальные уравнения, на которых функционал неизменен; это ведет к наличию у квазиэкстремалей законов сохранения.

Лемма 1. Справедливо следующее операторное тождество для одномерных неравномерных сеток:

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \xi^+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^+} + \eta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + \eta^+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^+} + \mathcal{L} D_{+h}(\xi) &\equiv \\ &\equiv \xi \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \frac{h^-}{h^+} \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial x} - D_{+h}(\mathcal{L}^-) \right) + \eta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + \frac{h^-}{h^+} \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial u} \right) + \\ &+ D_{+h} \left(h^- \eta \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial u} + h^- \xi \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial x} + \xi \mathcal{L}^- \right). \end{aligned} \quad (47)$$

Справедливость тождества (47) устанавливается прямым вычислением.

Это тождество при $h \rightarrow 0$ обращается в соответствующее тождество Нётер (см. [10]). Тождество (47) позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 4. Пусть разностное уравнение (или система)

$$F_\alpha(x, u, u^+, u^-, \dots, h^+, h^-) = 0 \quad (48)$$

задано на сетке ω_h :

$$\Omega_\beta(x, u, u^+, u^-, \dots, h^+, h^-) = 0, \quad (49)$$

где F_α и Ω_β — некоторые гладкие функции. Пусть решения уравнения (48) на сетке (49) являются **квазиэкстремалиями** функционала (36), связанными с координатами ξ, η оператора группы G_1 . Тогда инвариантность функционала (36) на квазиэкстремалиях (48), (49) является необходимым и достаточным условием консервативности системы (48), (49):

$$D_{+h} \left(h^- \eta \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial u} + h^- \xi \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial x} + \xi \mathcal{L}^- \right) \Big|_{(48), (49)} = 0. \quad (50)$$

В классическом непрерывном варианте известно обобщение условий инвариантности функционала [4], когда действие группы на элементарное действие дает не ноль, а дивергенцию некоторой функции. Это же обобщение справедливо и для разностного функционала. Пусть

$$\xi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \xi^+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^+} + \eta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + \eta^+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^+} + \mathcal{L} D_{+h}(\xi) = D_{+h}(B(x, u, u^+, \dots)),$$

где B — некоторая гладкая функция; тогда функция B должна быть добавлена в первый интеграл в формуле (50).

Замечание. Инвариантность функционала на решениях квазиэкстремального уравнения ведет к инвариантности последнего. В слу-

чае многопараметрической группы G_r инвариантный невырожденный функционал порождает r различных квазиэкстремальных уравнений, каждое из которых инвариантно относительно соответствующей однопараметрической подгруппы и обладающее своим законом сохранения.

Теоремы 3 и 4 имеют важное практическое следствие, которое можно рассматривать как *разностный аналог теоремы Э. Нётер*.

Следствие. Пусть невырожденный функционал (36) допускает r -параметрическую группу G_r (т.е. имеется вариационная симметрия или дивергентная инвариантность функционала). Пусть имеется r квазиэкстремальных уравнений

$$\xi^\alpha \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x} + \eta^\alpha \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, r. \quad (51)$$

Тогда система

$$\begin{cases} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x} = 0, \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = 0, \end{cases} \quad (52)$$

лежащая в пересечении квазиэкстремалей (51), обладает r законами сохранения вида (50).

Заметим, что этот вариант разностного аналога теоремы Нётер существенно отличается от ранее полученного в [2, 3].

Пример. Применение разностного варианта теоремы Нётер к разностной модели (45), (46) дает следующие три первых интеграла:

$$\begin{aligned} 1) \quad & u_x^2 + \frac{1}{uu^+} = A = \text{const}, \\ 2) \quad & \frac{2x+h^+}{2} u_x^2 + \frac{2x+h^+}{2uu^+} - \frac{u+u^+}{2} u_x = B = \text{const}, \\ 3) \quad & \frac{x(x+h^+)}{uu^+} + \left(\frac{u+u^+}{2} - \frac{2x+h^+}{2} \frac{u_x}{h} \right)^2 = C = \text{const}. \end{aligned} \quad (53)$$

Сохраненная в разностной модели групповая структура позволяет использовать действие присоединенной алгебры для выделения базисного первого интеграла. Так же, как и в непрерывном варианте, первые интегралы могут быть найдены из J_3 :

$$X_1(J_3) = J_2; \quad X_1(J_2) = 2J_1.$$

С помощью первых интегралов легко найти общее решение разностной модели (46), (47):

$$Au^2 = (Ax + B)^2 + 1 - \varepsilon^2/4, \quad (54)$$

где $A = \text{const}$, $B = \text{const}$.

Таким образом, полученная разностная схема (45), (46):

- инвариантна относительно той же группы Ли точечных преобразований G_3 , что и исходное дифференциальное уравнение;
- обладает тремя разностными первыми интегралами с одним базисным и тем же действием присоединенной алгебры Ли;
- полностью интегрируема и ее общее решение отличается на $\varepsilon^2/4$ от общего решения уравнения (20).

Дискретное представление ОДУ и его интегралы. Точное решение (54) равномерно близко к точному решению исходного ОДУ (20):

$$A_0 u^2 = (A_0 x - B_0)^2 + 1. \quad (55)$$

В связи с этим возникает вопрос: нельзя ли построить *точную* разностную схему для уравнения (20)?

Если да, то такая схема обязана допускать ту же группу преобразований, что и ОДУ (20). Будучи инвариантной, такая схема и сетка должны быть представимы с помощью разностных инвариантов группы:

$$J_1 = \frac{h^+}{uu^+}, \quad J_2 = \frac{h^-}{uu^-}, \quad J_3 = u^2 u^- \frac{u_x - u_{\bar{x}}}{h^-}.$$

Попробуем построить точную схему исходя из следующего лагранжиана:

$$\mathcal{L} = \frac{\delta}{uu^+} - \left(\frac{u^+ - u}{h^+} \right)^2, \quad (56)$$

где $\delta = \text{const}$ пока не определена.

Выберем ту же инвариантную разностную сетку:

$$\frac{h^+}{uu^+} = \varepsilon, \quad \frac{h^-}{uu^-} = \varepsilon, \quad \varepsilon = \text{const}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (57)$$

Точно такая же вариационная процедура, которая была использована при построении схемы (45), (46), приводит к следующей системе пересечения квазиэкстремалей:

$$\frac{u_x - u_{\bar{x}}}{h^-} = \frac{\delta}{u^2 u^-}. \quad (58)$$

Подстановка точного решения (55) в схему (57), (58) определяет константу δ :

$$\delta = 2 \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon^2}. \quad (59)$$

Таким образом, полученная схема (57), (58) с константой (59) представляет собой точную схему для ОДУ (20), т. е. семейство решений (55) ОДУ (20) удовлетворяет этой схеме тождественно. Разумеется, точная схема (57), (58) дает множество точек на точной кривой, а не

гладкую кривую; при этом плотность точек на кривых зависит от параметра ε .

Заметим, что полученное пересечение квазиэкстремалей (58) существенно отличается от уравнения Эйлера для (56):

$$u_x - \frac{u_x}{h} = \frac{\delta}{2u^2} \left(\frac{h^+}{u^+} + \frac{h^-}{u^-} \right). \quad (60)$$

Применение разностного аналога теоремы Нётер дает следующие первые интегралы:

$$\begin{aligned} 1) \quad & u_x^2 + \frac{\delta}{uu^+} = A^0 = \text{const}, \\ 2) \quad & \frac{2x+h^+}{2} u_x^2 + \delta \frac{2x+h^+}{2uu^+} - \frac{u+u^+}{2} u_x = B^0 = \text{const}, \\ 3) \quad & \delta \frac{x(x+h^+)}{uu^+} + \left(\frac{u+u^+}{2} - \frac{2x+h^+}{2} \frac{u_x}{h} \right)^2 = C^0 = \text{const}. \end{aligned} \quad (61)$$

Важно отметить, что первые интегралы (61) являются разностными, т.е. нелокальными, и они не могут быть получены из классической теоремы Нётер.

Замечания

1) Оказывается, инвариантная приближенная схема и точная схема связаны преобразованием подобия. Точнее, растяжение x или u , или их комбинация

$$\tilde{x} = x\alpha^2 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}, \quad \tilde{u} = u\alpha,$$

где $\alpha \neq 0$ — произвольная константа, переводит инвариантную схему (45), (46) в точную схему (57), (58).

2) Преобразуя ОДУ (20), можно найти *дифференциальное уравнение, для которого приближенная инвариантная схема (45), (46) является точной*. Для любого фиксированного ε это уравнение выглядит так:

$$u_{xx} = \frac{1}{u^3} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \right). \quad (62)$$

Таким образом, приближенная инвариантная схема (45), (46) является точной для приближенного дифференциального уравнения (62).

3) Точная схема (57), (58) имеет «бесконечный порядок аппроксимации», т.е. точность расчета по ней не зависит от шагов сетки h^+ , h^- или от числа точек на заданном отрезке. Минимальное число точек на отрезке в расчете может быть равным трем.

II-й разностный аналог теоремы Нётер. Другой подход к консервативности разностных уравнений, развитый в [2, 3], заключается в следующем. Отказавшись от строгой инвариантности разностного функционала, можно вывести условия, приводящие к инвариантности соответствующего уравнения Эйлера. Выполнение этих условий приводит к консервативности уравнений Эйлера.

Рассмотрим на двумерной ортогональной равномерной разностной сетке функционал с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(x^1, x^2, u, u_{\underset{h}{h}}, u_{\underset{h}{h}} \right), \quad (63)$$

который зависит от первых правых разностных производных $u_{\underset{h}{h}}$ и $u_{\underset{h}{h}}$.

О п р е д е л е н и е. Сеточный функционал (63), удовлетворяющий на инвариантной ортогональной равномерной сетке условию

$$\bar{\eta}_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + D_{1+\hbar}(\bar{\eta}_\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} + D_{2+\hbar}(\bar{\eta}_\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_2} + D_{1+\hbar}(B_\alpha^1) + D_{2+\hbar}(B_\alpha^2) = 0, \quad (64)$$

где $B_\alpha^i = B_\alpha^i \left(x, u, u_{\underset{h}{h}}, u_{\underset{h}{h}}, \dots \right)$ — произвольные гладкие функции; $\bar{\eta}_\alpha = \eta_\alpha - \xi_\alpha^1 \left(u_{\underset{h}{h}} + u_{\underset{h}{h}} \right) - \xi_\alpha^2 \left(u_{\underset{h}{h}} + u_{\underset{h}{h}} \right)$, α — номер подгруппы группы G_r , будем называть *квазиинвариантным*.

Заметим, что координаты оператора (64) содержат разностные производные, поэтому оператор в левой части (64) генерирует группу *неточечных преобразований*.

В работах [2, 3] показано, что если сеточный функционал с функцией Лагранжа (63) удовлетворяет требованию квазиинвариантности (64) с некоторыми функциями B_α^i на инвариантной ортогональной равномерной сетке ω , то уравнение Эйлера допускает оператор

$$X_\alpha = \xi_\alpha^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi_\alpha^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \eta_\alpha \frac{\partial}{\partial u} + \dots + \left(S_{1+\hbar}(\xi_\alpha^1) - \xi_\alpha^1 \right) \frac{\partial}{\partial h_1^+} + \left(S_{2+\hbar}(\xi_\alpha^2) - \xi_\alpha^2 \right) \frac{\partial}{\partial h_2^+} \quad (65)$$

на той же сетке ω .

Таким образом, условие квазиинвариантности функционала позволяет рассматривать одно и то же уравнение Эйлера для различных подгрупп, допускаемых разностным лагранжианом.

Теперь перейдем к теореме, в которой идет речь об *экстремальных квазиинвариантного функционала*.

Лемма 2. Справедливо следующее операторное тождество для двумерных равномерных прямоугольных сеток:

$$\begin{aligned} & \bar{\eta}_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + D_{1,+h}(\bar{\eta}_\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} + D_{2,+h}(\bar{\eta}_\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_2} + D_{1,+h}(B_\alpha^1) + D_{2,+h}(B_\alpha^2) \equiv \\ & \equiv \bar{\eta}_\alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - D_{1,-h} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} \right) - D_{2,-h} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_2} \right) \right] + D_{1,+h} \left[\bar{\eta}_\alpha S_{1,-h} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} \right) + B_\alpha^1 \right] + \\ & \quad + D_{2,+h} \left[\bar{\eta}_\alpha S_{2,-h} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_2} \right) + B_\alpha^2 \right], \quad \alpha = 1, 2, \dots \quad (66) \end{aligned}$$

Справедливость тождества (66) устанавливается прямым вычислением.

Тождество (66) позволяют сформулировать второй разностный аналог теоремы Нётер (см. [2, 3]).

Теорема 5. Пусть разностное уравнение (или система):

$$F \left(x, u, u_1, u_2, \dots \right) = 0, \quad (67)$$

задано на разностной сетке ω :

$$\omega \left(x, u, u_1, u_2, \dots, h \right) = 0. \quad (68)$$

Пусть (67) являются уравнениями Эйлера для лагранжиана (63) на сетке (68) и задают многообразие, инвариантное относительно группы G_r с операторами вида (65).

Тогда квазиинвариантность разностного функционала с функцией Лагранжа (63) на решениях экстремального уравнения (67) на сетке (68) с некоторыми функциями B_α^i ($i = 1, 2, \dots$) является необходимым и достаточным условием консервативности (67) на сетке (68) с вектором \mathbf{A} , имеющим координаты:

$$A_i = B_\alpha^1 + \bar{\eta}_\alpha S_{i,-h} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \right) + S_{i,-h}(\bar{\eta}_\alpha) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \right), \quad i = 1, 2, \dots \quad (69)$$

Обобщение этой теоремы на случай, когда условие квазиинвариантности функционала включает дивергентную добавку, совершенно очевидно. Следующий пример иллюстрирует такое обобщение.

Пример. Рассмотрим конечно-разностное волновое уравнение

$$u_{1\bar{1}} - u_{2\bar{2}} = 0, \quad (70)$$

где $u_{1\bar{1}}$, $u_{2\bar{2}}$ — вторые разностные производные на ортогональной и равномерной по обоим направлениям сетке с шагами h_1 и h_2 . Воспользуемся предыдущей теоремой для построения законов сохранения для уравнения (70), соответствующих следующей группе преобразований: $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ — перенос по времени, $X_2 = \frac{\partial}{\partial x}$ — перенос по пространственной переменной. Оба оператора сохраняют ортогональность и равномерность разностной сетки (условия (12) выполнены).

В качестве функции Лагранжа возьмем

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} u_2^2 - \frac{1}{2} u_1^2. \quad (71)$$

Легко убедиться, что уравнение (70) является уравнением Эйлера разностного функционала с функцией Лагранжа (71) и допускает операторы X_1 и X_2 . Нётерово тождество (66) для обоих операторов выполняется для специально подобранных функций B_α^1 , B_α^2 . Перечислим $\bar{\eta}_\alpha$, B_α^1 , B_α^2 , соответствующие операторам X_1 , X_2 :

$$\begin{aligned} \alpha = 1: \quad & \bar{\eta}_1 = -u_1 - \frac{u_{1\bar{1}}}{h}, \\ & B_1^1 = 0, \quad B_1^2 = \frac{u_2}{h} S_1 \left(\frac{u_2}{h} \right) - \frac{u_1}{h} \frac{u_{1\bar{1}}}{h}, \\ \alpha = 2: \quad & \bar{\eta}_2 = -u_2 - \frac{u_{2\bar{2}}}{h}, \\ & B_2^1 = \frac{u_2}{h} \frac{u_{2\bar{2}}}{h} - \frac{u_1}{h} S_2 \left(\frac{u_1}{h} \right), \quad B_2^2 = 0. \end{aligned}$$

Легко проверить, что в обоих случаях левая часть равенства (66) тождественно обращается в нуль, т. е. разностный функционал квазиинвариантен не только на экстремальных, но и во всем пространстве. Из квазиинвариантности функционала следует выполнение следующих законов сохранения на решениях уравнения (70):

$\alpha = 1$:

$$D_{+\bar{h}} \left(\frac{u_1^2}{h} + \frac{u_2}{h} S_1 \left(\frac{u_2}{h} \right) \right) + D_{+\bar{h}} \left(-\frac{u_{2\bar{2}}}{h} \left(\frac{u_1 + u_{1\bar{1}}}{h} \right) \right) = 0,$$

$\alpha = 2$:

$$D_{+\bar{h}} \left(-\frac{u_{1\bar{1}}}{h} \left(\frac{u_2 + u_{2\bar{2}}}{h} \right) \right) + D_{+\bar{h}} \left(\frac{u_2^2}{h} + \frac{u_1}{h} S_2 \left(\frac{u_1}{h} \right) \right) = 0.$$

Заметим, что в обоих случаях использована одна и та же функция Лагранжа (71). Однако условия квазиинвариантности функционала в этих случаях различны, поскольку различны векторы (B_α^1, B_α^2) .

Другие примеры применения разностных аналогов теоремы Нётер можно найти в [18].

Список литературы

1. Нётер Э. Инвариантные вариационные задачи // Вариационные принципы механики. — М.: Физматгиз, 1959. — С. 611–630.
2. Дородницын В. А. Инвариантные вариационные задачи и консервативность разностных схем // Препринт ИПМ. — М., 1991. — № 121. — 28 с.
3. Дородницын В. А. Конечно-разностный аналог теоремы Нётер // ДАН СССР. — 1993. — Т. 328, № 6. — С. 678.
4. Dorodnitsyn V. Noether-type theorems for difference equations // Preprint of Institut des Hautes Etudes Scientifiques. — Bures-sur-Yvette (France), 1998.
5. Дородницын В. А. Группы преобразований в сеточных пространствах // Современные проблемы математики. (Новейшие достижения. Т. 34). — Итоги науки и техники. ВИНТИ АН СССР. — М., 1989. — С. 149–190.
6. Dorodnitsyn V. A. Finite-difference models entirely inheriting symmetry of original differential equations. *Modern Group Analysis: Advanced Analytical and Computational Methods in Mathematical Physics*. — Kluwer Academic Publishers, 1993. — P. 191.
7. Bakirova M. I., Dorodnitsyn V. A., Kozlov R. V. Symmetry preserving difference schemes for some heat transfer equations // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1997. — V. 30. — P. 8139–8155.
8. Dorodnitsyn V., Kozlov R. The whole set of symmetry preserving discrete versions of a heat transfer equation with a source // Preprint NUMERICS NO. 41997. — NTNU, Trondheim (Norway), 1997.
9. Ames W. F., Anderson R. L., Dorodnitsyn V. A., Ferapontov E. V., Gazizov R. K., Ibragimov N. H., Svirshchevskii S. R. *CRC Hand-book of Lie Group Analysis of Differential Equations. V. 1: Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws*. — CRC Press, 1994.
10. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983. — 280 с.
11. Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. — 639 с.
12. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 416 с.
13. Bessel-Hagen E. Über die Erhaltungssätze der Elektrodynamik // *Math. Ann.* — 1921. — № 84. — S. 258–276.
14. Овсянников Л. В. О свойствах x -автономии // ДАН СССР. — 1993. — Т. 330, № 5. — С. 559–561.
15. Maeda S. Extension of discrete Noether theorem // *Math. Japonica*. — 1981. — V. 26, No. 1. — P. 85–90.
16. Maeda S. The similarity method for difference equations // *J. Inst. Math. Appl.* — 1987. — V. 38. — P. 129–134.
17. Артамонов Ю. В. Дипломная работа. — М.: Физ. фак. МГУ им. М. В. Ломоносова, 1995.
18. Dorodnitsyn V., Kozlov R. Second-order ordinary difference equations admitting Lie point symmetries // Preprint NTNU. — Trondheim (Norway), 1998.

О неограниченных решениях полулинейных параболических уравнений

*В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов,
А. А. Самарский*

Исследуются неограниченные решения (т. е. не существующие в «целом») задачи Коши для полулинейных параболических уравнений. Для общего уравнения с выпуклой нелинейностью методом операторного сравнения определены условия неограниченности его решений. С помощью построения верхних и нижних решений уравнений с некоторыми частными видами нелинейностей устанавливаются ограничения на краевые данные, обеспечивающие глобальное существование решений. Для уравнения с логарифмической нелинейностью определены условия существования локализованных неограниченных решений и дан метод описания эволюции их структуры с помощью построения автомодельных решений соответствующей «усеченной» задачи.

Введение. Настоящая работа посвящена исследованию неограниченных решений задачи Коши для полулинейных параболических уравнений

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u + Q(u), & Q(u) > 0, & \quad u > 0; & \quad Q(0) = 0, \\ u(0, x) &= u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^N, & \quad u_0(x) \in C(\mathbb{R}^N). \end{aligned} \tag{A}$$

Неограниченными решениями задачи (A) мы называем такие решения, которые обращаются в бесконечность за конечное время.

Уравнение (A) при условии $Q(0) = Q(1) = 0$, $Q(u) \equiv 0$ при $u > 1$ изучалось в известной работе [29] и в большом количестве последующих работ, которые посвящены распространению бегущих волн в биологических, химических и других процессах.

В отличие от этого круга работ, в рассматриваемом случае ограничение на рост $Q(u)$ отсутствует, что в ряде случаев приводит к появлению неограниченных решений (в терминологии [13–45] — режимов с обострением).

Отметим, что вопрос о неограниченных решениях уравнений параболического типа рассматривался рядом авторов в связи с проблемой существования решений в «целом» [1, 4, 9].

Наш интерес к неограниченным решениям связан прежде всего с целым рядом их необычных свойств. Так, в работах [12–16] на примере одного частного случая уравнения $u_t = (k(u)u_x)_x + Q(u)$, $k(u) > 0$ при $u > 0$, $k(0) = 0$, было показано, что развитие режимов с обострением приводит к метастабильной локализации тепла и горения в нелинейной среде, образованию и взаимодействию тепловых структур (если u — температура среды, $k(u)$ — коэффициент теплопроводности,

$Q(u)$ — мощность источников выделения энергии). В данной работе некоторые аналогичные результаты получены для случая полулинейных параболических уравнений.

В работе определяются достаточные условия неограниченности решений задачи (А) в зависимости от функций $Q(u)$ и $u_0(x)$. Устанавливаются точные оценки сверху для времени существования решений (величины T_0). Рассмотрен также вопрос о существовании в «целом» решений некоторых уравнений типа (А), которые в то же время (в зависимости от $u_0(x)$) допускают и неограниченные решения. Для уравнений (А) специального вида получены условия локализации неограниченных решений (§ 5), резонансного взаимодействия элементарных возмущений (§ 3, п. 3) и дано описание асимптотической стадии (при $t \rightarrow T_0^-$) развития неограниченных решений (§ 5).

В § 1 формулируются вспомогательные утверждения; в частности, теорема сравнения решений различных параболических уравнений ([5, 6, 12]), которая позволяет распространить некоторые результаты настоящей работы на широкий класс квазилинейных уравнений.

В § 2 методом операторного сравнения решений различных уравнений получен следующий результат:

пусть $F(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} d\xi/Q(\xi) < \infty$ при $\lambda > 0$ и $F(0) = \infty$;

пусть, кроме того, $Q''(u) \geq 0$ при всех $u > 0$; если

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma^{(N+2)/N} / Q(\sigma) = \omega < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) dx > [2\pi N \omega]^{N/2},$$

то решение задачи (А) является неограниченным.

Для доказательства этого утверждения выводится специальная точечная оценка решения.

В § 3, 4 методом построения верхних и нижних решений уравнения (А) при $Q(u) = u^\beta$ и $Q(u) = (1+u) \ln^\beta(1+u)$ соответственно определяются условия на функцию $u_0(x)$, обеспечивающие неограниченность или существование в «целом» решений задачи. В § 3 также рассматривается задача резонансного взаимодействия элементарных возмущений, постановка которой непосредственно связана с результатами работ [14–16]. Установлены оценки энергии и линейного размера системы, состоящей из двух одинаковых элементарных (δ -образных) возмущений, обуславливающие их слияние и неограниченный рост решения в точке симметрии системы.

В § 5 исследуются условия локализации неограниченных решений уравнения

$$u_t = u_{xx} + (1+u) \ln^\beta(1+u), \quad \beta > 1. \quad (B)$$

В соответствии с [13–15] локализованными называются такие неограниченные решения, которые обращаются в бесконечность на

множестве конечной меры (т.е. функция $u(T_0^-, x)$ существует всюду в \mathbb{R}^1/G , где $\text{mes } G < \infty$).

Показано, что при $\beta \in (1, 2)$ решения не являются локализованными ($u(T_0^-, x) = \infty$ всюду в \mathbb{R}^1), при $\beta = 2$ $u(T_0^-, x) = \infty$ на множестве из \mathbb{R}^1 с мерой, равной 2π , и при $\beta > 2$ неограниченные решения обращаются в бесконечность на множестве меры нуль (например, в одной точке).

В § 5 также выясняется вопрос о структурной устойчивости неограниченных и существующих в «целом» решений уравнения (В). Показано, что при $t \rightarrow T_0^-$ асимптотика неограниченных решений описывается временными закономерностями автомодельных решений следующего «вырожденного» «усеченного» уравнения Гамильтона–Якоби:

$$u_t = u_x^2 / (1 + u) + (1 + u) \ln^\beta (1 + u), \quad \beta > 1, \tag{C}$$

причем при $t = T_0^-$ структуры автомодельных представлений этих решений совпадают. Аналогичный вывод сделан для решений, существующих в «целом». Установлено, что эти решения при $t \rightarrow \infty$ имеют в качестве усеченного (но уже не вырожденного) такое уравнение:

$$u_t = u_{xx} - u_x^2 / (1 + u) + (1 + u) \ln^\beta (1 + u), \quad \beta > 3. \tag{D}$$

Структуры существующих в «целом» решений уравнений (В) и (D) совпадают. Таким образом, асимптотические характеристики решений уравнения (В) совпадают с временными закономерностями автомодельных решений совсем других уравнений. Заметим, что точных автомодельных решений, в построении которых обычно состоит традиционный аппарат исследования, уравнение (В) не имеет [21]. Приложения и исследование эффекта локализации можно найти также в [31–39].

§ 1. Постановка задачи и теоремы сравнения.

1.1. *Постановка задачи.* Рассмотрим в $Q_{T_0}^{N+1} = [0, T_0) \times \mathbb{R}^N$ задачу Коши для уравнения

$$\Delta u = u_t - \Delta u - Q(u) = 0, \quad \left(\Delta = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right) \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N. \tag{2}$$

Будем считать, что функция $Q(u)$ в уравнении (1) определена для $u \geq 0$, $Q(u) > 0$ при $u > 0$, $Q(0) = 0$ и $Q(u) \in C^2([m, \infty))$ для $\forall m > 0$. Также предполагаем, что функция $u_0(x)$ в (2) принадлежит классу $C(\mathbb{R}^N)$, причем $\|u_0(x)\| < \infty$, где символом $\| \cdot \|$ обозначается норма в C по пространству \mathbb{R}^N , так что $\|u(t, x)\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} [u(t, x)]$ (в этом выражении t фиксировано).

Определение. Решение задачи (1), (2) называется неограниченным в $Q_{T_0}^{N+1}$, если $\|u(t, x)\| < \infty$ при $\forall t \in (0, T_0)$ и $\lim_{t \rightarrow T_0} \|u(t, x)\| = \infty$. Константу T_0 в этом случае будем называть временем существования решения. В соответствии с терминологией, введенной в [13–15], неограниченные решения будем также называть режимами с обострением, а время существования — моментом обострения.

В этом параграфе будут определены условия существования неограниченных решений задачи (1), (2).

Необходимым условием существования неограниченных решений (см. критерий Оsgуда [1]) является ограниченность интеграла

$$F(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} dz/Q(z), \quad \lambda > 0. \tag{3}$$

При этом для T_0 справедлива оценка снизу

$$T_0 \geq F(\overline{u_m^0}), \quad \overline{u_m^0} = \|u_0(x)\|. \tag{4}$$

В том случае, когда $\underline{u_m^0} = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} u_0(x) > 0$, установление факта о неограниченности решения задачи (1), (2) является тривиальным и справедлива оценка сверху

$$T_0 \leq F(\underline{u_m^0}). \tag{5}$$

Вследствие этого будем считать, что $\underline{u_m^0} = 0$ (этому условию удовлетворяют, например, финитные функции: $\text{mes sup} u_0(x) < \infty$).

Отметим, что функция (3) при $\forall m > 0$ удовлетворяет включению $F(\lambda) \in C^3([m, \infty))$.

1.2. Теоремы сравнения. Здесь будут сформулированы некоторые вспомогательные утверждения.

1. Оценка решения снизу в области с криволинейными границами. Обозначим через H_T^{N+1} область, заданную неравенствами $0 < t < T$, $\underline{x}_j(t) < x_j < \overline{x}_j(t)$, $j = 1, \dots, N$, где функции $\underline{x}_j, \overline{x}_j$ — непрерывные. Через ∂H_T^{N+1} обозначим ее параболическую границу.

Лемма 1. Пусть $u(t, x) \in C_{t,x}^{1,2}(Q_T^{N+1})$ — решение задачи (1), (2), а $\overline{v}(t, x) \in C_{t,x}^{1,2}(\overline{H}_T^{N+1} \setminus \partial H_T^{N+1}) \cap C(\overline{H}_T^{N+1})$, причем $u(t, x) \geq \overline{v}(t, x)$ при всех $(t, x) \in \partial H_T^{N+1}$, а в $\overline{H}_T^{N+1} \setminus \partial H_T^{N+1}$ выполнено неравенство $\underline{A}\underline{v}(t, x) \leq 0$. Тогда $u(t, x) \geq \underline{v}(t, x)$ всюду в H_T^{N+1} .

Функцию $\underline{v}(t, x)$ в соответствии с [2, 3, 23] будем называть нижним решением задачи (1), (2) в H_T^{N+1} .

2. Аналогичная лемма имеет место при оценке решения сверху.

Лемма 2. Пусть $u(t, x) \in C_{t,x}^{1,2} (Q_T^{N+1})$ — решение задачи (1), (2), а $\bar{v}(t, x) \in C_{t,x}^{1,2} (\bar{H}_T^{N+1} \setminus \partial H_T^{N+1}) \cap C(\bar{H}_T^{N+1})$, причем $u(t, x) \leq \bar{v}(t, x)$ при всех $(t, x) \in \partial H_T^{N+1}$, а в $\bar{H}_T^{N+1} \setminus \partial H_T^{N+1}$ выполнено неравенство $\Delta \bar{v}(t, x) \geq 0$. Тогда $u(t, x) \leq \bar{v}(t, x)$ всюду в H_T^{N+1} .

Функцию $\bar{v}(t, x)$ будем называть верхним решением задачи (1), (2) в H_T^{N+1} . Заметим, что область H_T^{N+1} может быть неограниченной по отдельным направлениям, а также совпадать с Q_T^{N+1} . Доказательство лемм 1 и 2 проводится методами, изложенными, например, в [4, 5].

3. Сравнение с решением другого уравнения. Рассмотрим в Q_T^{N+1} две задачи Коши для равномерно параболических уравнений ($\nu = 1, 2$)

$$v_t^{(\nu)} = \mathcal{L}^{(\nu)}(v^{(\nu)}) = L^{(\nu)}(v^{(\nu)}, \nabla v^{(\nu)}, \Delta v^{(\nu)}) \tag{6}$$

с начальными условиями

$$v^{(\nu)}(0, x) = v_0^{(\nu)}(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad v_0^{(\nu)}(x) \in C(\mathbb{R}^N). \tag{7}$$

Будем считать функции $L^{(\nu)}(p, q, r)$, $q = (q_1, \dots, q_N)$ дифференцируемыми по всем аргументам. Справедлива следующая теорема сравнения.

Теорема 1. Пусть при $\nu = 1, 2$ $u^{(\nu)}(t, x) \in C_{t,x}^{1,2} (Q_T^{N+1})$, $v_0^{(2)} \geq v_0^{(1)}$ при всех $x \in \mathbb{R}^N$. Пусть, кроме того, для всех функций $f(t, x) \in C_{t,x}^{1,2} (Q_T^{N+1})$ $\mathcal{L}^{(2)}(f) \geq \mathcal{L}^{(1)}(f)$. Тогда $u^{(2)}(t, x) \geq u^{(1)}(t, x)$ всюду в Q_T^{N+1} .

Доказательство этой теоремы проводится методами [4]. Теорема 1 в ряде случаев позволяет сравнивать решения таких уравнений (6), операторы которых удовлетворяют условию

$$\mathcal{L}^{(2)}(f) = \mathcal{L}^{(1)}(f) + l(f, \Delta f),$$

в котором функция l не зависит от Δf . В противном случае необходимо иметь поточечную оценку $\Delta v^{(2)}$ через $\nabla v^{(2)}$ и $v^{(2)}$. Такой подход к сравнению решений параболических уравнений излагается ниже.

Рассмотрим в Q_T^{N+1} две задачи Коши для равномерно параболических уравнений ($\nu = 1, 2$)

$$v_t^{(\nu)} = \mathcal{L}^{(\nu)}(v^{(\nu)}) = k^{(\nu)}(v^{(\nu)})\Delta v^{(\nu)} + k^{(\nu)'}(v^{(\nu)})(\nabla v^{(\nu)})^2 + Q^{(\nu)}(v^{(\nu)}) \tag{8}$$

с начальными условиями (7). Будем считать, что функции $k^{(\nu)}(v) > 0$ при $v \geq 0$, $k^{(\nu)}(v) \in C^3([m, \infty))$, $Q^{(\nu)}(v) \in C^1([m, \infty))$ для $\forall m > 0$.

Для вывода априорных оценок старшей производной нам понадобится следующее определение.

Определение. Начальное распределение в задаче (8), (7) при $\nu = 2$ назовем *критическим*, если всюду в Q_T^{N+1} справедливо неравенство $v_t^{(2)}(t, x) \geq 0$.

Лемма 3. Пусть $v_0^{(2)}(x) \in C^2(\mathbb{R}_0^N(v)) \cap C(\mathbb{R}^N)$, где $\mathbb{R}_0^N(v_0) = \mathbb{R}_0^N \cap \{x : v_0(x) > 0\}$, $v^{(2)}(t, x) \in C_{t,x}^{2,4}(Q_T^{N+1})$.

Тогда для критичности начального распределения (7) при $\nu = 2$ необходимо и достаточно, чтобы в \mathbb{R}^N было справедливо неравенство

$$\mathcal{L}^{(2)}(v_0^{(2)}(x)) = k^{(2)}(v_0^{(2)})\Delta v_0^{(2)} + k^{(2)'}(v_0^{(2)})(\nabla v_0^{(2)})^2 + Q^{(2)}(v_0^{(2)}) \geq 0. \quad (9)$$

Следствие. В условиях леммы 3 всюду в Q_T^{N+1} справедлива поточечная оценка старшей производной (лапласиана) решения задачи (8), (7) ($\nu = 2$) через младшие

$$\Delta v^{(2)} \geq -(k'(v^{(2)})/k(v^{(2)}))(\nabla v^{(2)})^2 - Q^{(2)}(v^{(2)})/k^{(2)}(v^{(2)}). \quad (10)$$

На основе оценки (10) формулируется следующая теорема сравнения по коэффициентам.

Теорема. Пусть $v^{(1)}(t, x) \in C_{t,x}^{1,2}(Q_T^{N+1})$, $v^{(2)}(t, x) \in C_{t,x}^{2,4}(Q_T^{N+1})$ и краевые условия (7) для $\nu = 2$ являются критическими (при этом $v_0^{(2)}(x) \in C^2(\mathbb{R}^N)$). Пусть, кроме того, справедливы неравенства

$$v_0^{(2)}(x) - v_0^{(1)}(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N; \quad (11)$$

$$k^{(2)}(v) - k^{(1)}(v) \geq 0, \quad [k^{(2)}(v)/k^{(1)}(v)]' \geq 0,$$

$$Q^{(2)}(v)/k^{(2)}(v) - Q^{(1)}(v)/k^{(1)}(v) \geq 0, \quad 0 < v < \infty. \quad (12)$$

Тогда $v^{(2)}(t, x) \geq v^{(1)}(t, x)$, $(t, x) \in Q_T^{N+1}$.

Уравнения (8) в приведенной теории сравнения решений выбраны в качестве модельных. Изложенный метод работает в других, более общих, ситуациях ([5, 12]).

§ 2. Общая теорема существования неограниченных решений.

2.1. *Общая теорема.* Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим в Q_T^{N+1} задачу Коши для уравнения

$$v_t = \Delta v \quad (13)$$

с начальным условием (2). Решение этой задачи представимо в виде

$$v(t, x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(t, y) u_0(x + y) dy, \quad (14)$$

где $\Gamma(t, y)$ — фундаментальное решение для оператора теплопроводности

$$\Gamma(t, y) = (4\pi t)^{-N/2} \exp \{-\|y\|^2/(4t)\}, \quad t \geq 0, \quad y \in \mathbb{R}^N. \quad (15)$$

Пусть $E(p, \tau)$ — некоторая функция, осуществляющая при каждом $\tau \in (0, T)$ отображение множества $\{p: 0 \leq p < \infty\}$ на себя. Пусть, кроме того, это отображение монотонно и для $\forall m > 0$ $E(p, \tau) \in C_{p, \tau}^{2,1}([m, \infty) \times (0, T))$. Функция $E(p, \tau)$ (пока неизвестная) будет использована для операторного сравнения решений задач (1), (2) и (13), (2). Суть этого метода сравнения состоит в следующем. В результате замены

$$u(t, x) = E(U(t, x)t), \quad (t, x) \in Q_T^{N+1}, \quad (16)$$

уравнение (1) применительно к новой функции U приобретает вид

$$U_t = \Delta U + [E''_{UU}/E'_U](\nabla U)^2 + (Q(E) - E'_t)/E'_U. \quad (17)$$

В силу теоремы 1 § 1 сравнение решений уравнений (13), (17) (пока без учета условий на краевые данные) имеет место в том случае, когда при $\forall(p, \tau)$

$$E''_{pp}(p, \tau) \geq 0, \quad Q(E(p, \tau)) - E'_\tau(p, \tau) \geq 0. \quad (18)$$

Лемма 4. Пусть функция $Q(u)$ в (1) — выпуклая (т. е. $Q''(u) \geq 0$ при $u > 0$). Тогда функция

$$E(p, \tau) = F^{-1}(F(p) - \tau) \quad (19)$$

является решением системы обыкновенных дифференциальных неравенств (18) (функция F определяется формулой (3)).

Доказательство. Функция (19) превращает второе неравенство (18) в тождество. Первое неравенство (18) запишем в эквивалентном виде:

$$F''(p) + Q'(F^{-1}(F(p) - \tau))F'^2(p) \geq 0.$$

При $\tau = 0$ это неравенство превращается в тождество. Поэтому оно выполняется в силу выпуклости Q и монотонности F (F — монотонно убывающая). Лемма доказана.

Оператор (19) оставляет в неподвижности множество, соответствующее $\tau = 0$. Поэтому $U(0, x) \equiv u_0(x)$ и справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть функция $Q(u)$ в уравнении (1) выпуклая. Тогда для решения задачи (1), (2) справедлива оценка в Q_T^{N+1}

$$u(t, x) \geq F^{-1}\{F(v(t, x)) - t\}, \quad (20)$$

в которой функции $v(t, x)$ вычисляется по формулам (14), (15).

Замечание. Неравенство (20) эквивалентно следующему

$$F(v(t, x)) - F(u(t, x)) \geq t, \quad (t, x) \in Q_T^{N+1}, \quad (20)$$

При $Q(u) = u^\beta$, $\beta > 1$, $F(\lambda) = \lambda^{1-\beta}/(\beta - 1)$, $\lambda > 0$ и неравенство (20) принимает вид

$$v^{1-\beta} - u^{1-\beta} \geq (\beta - 1)t, \quad (t, x) \in Q_T^N. \quad (21)$$

Это неравенство было также получено в [7, 8] способом, отличным от применяемого здесь.

Символом $\|\cdot\|_1$ будем обозначать норму в $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, так что

$$\|v(t, x)\|_1 = \int_{\mathbb{R}^N} |v(t, y)| dy.$$

На основе неравенство (20) сформулируем следующую общую теорему существования неограниченных решений.

Теорема 4. Пусть $F(0) = \infty$. Пусть, кроме того, $Q''(u) \geq 0$ при $\forall u > 0$ и выполнено предельное равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma^{(N+2)/N} / Q(\sigma) = \omega < \infty. \quad (22)$$

Тогда, если функция (2) удовлетворяет неравенству

$$\|u_0(x)\|_1 > [2\pi N\omega]^{N/2}, \quad (23)$$

то существует такое $T_0 < \infty$, что в $Q_{T_0}^{N+1}$ решение задачи (1), (2) будет неограниченным.

Доказательство. В силу условия $F(0) = \infty$ из неравенства (20) следует, что $u(t, x)$ не существует (неограничена) в тех точках Q_T^{N+1} , в которых $F(v(t, x)) - t \leq 0$. Анализируя асимптотику функции $F(v(t, x))/t$ при $t \rightarrow \infty$, получим, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(v(t, x))/t = 2\pi N \|u_0(x)\|_1^{-2/N} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left\{ \sigma^{(N+2)/N} / Q(\sigma) \right\},$$

откуда в силу (22) и (23) следует утверждение теоремы.

Следствие. Как следует из неравенства (23), в случае, когда $\omega = 0$, любое начальное возмущение с $\|u_0(x)\|_1 > 0$ приведет к существованию неограниченного решения (этот же результат доказан другим способом в [8]), при $\omega \in (0, \infty)$ появляется понятие некоторой минимальной энергии: $\|u_0(x)\|_1 > [2\pi N\omega]^{N/2}$ и лишь при $\omega = \infty$ вопрос о неограниченности решения задачи (1), (2) остается открытым (не асимптотический анализ неравенства (20) будет

проведен в следующем параграфе для одного частного случая уравнения (1)).

Замечание. Для случая $Q(u) = u^\beta$, $\beta > 1$, теорема 4 устанавливает неограниченность любого ($\|u_0(x)\|_1 > 0$) решения задачи (1), (2) при $\beta \in (1, (N+2)/N)$. Этот же результат получен в [7] (см. также [9–11], где такой результат получен для частных случаев N и β); в [22] для случая $N = 1$ и $N = 2$ доказана неограниченность любого решения при $\beta = (N+2)/N$. В [30] проведена классификация некоторых методов отыскания неограниченных решений.

2.2. Неограниченные решения некоторых квазилинейных уравнений.

1. С помощью теоремы 4 мы распространим некоторые результаты предыдущего пункта на квазилинейные уравнения вида

$$v_t = \mathcal{L}_1(v) = \nabla(k(v)\nabla v) + q(v) \quad (24)$$

(функции k и q удовлетворяют требованиям на $k^{(\nu)}$ и $Q^{(\nu)}$ в (8)).

Рассмотрим в Q_T^{N+1} задачу Коши для уравнения (24) с начальным условием (2). Тогда, сравнивая решение этой задачи с решением исходной (1), (2) и пользуясь при этом теоремой 2, получим, что $v(t, x) \geq u(t, x)$ всюду в Q_T^{N+1} , если функция $u_0(x)$ является критической в $C^2(\mathbb{R}_0^N(u_0)) \cap C(\mathbb{R}^N)$ и выполнены неравенства

$$k(p) \geq 1, \quad k'(p) \geq 0, \quad q(p) \geq k(p)Q(p), \quad 0 < p < \infty. \quad (25)$$

Выполнение всех этих условий обеспечивает неограниченность решения задачи (24), (2) в том случае, если решение исходной задачи также неограниченно. При этом время существования $v(t, x)$ не превосходит T_0 функции $u(t, x)$. Например, если выполнены неравенства (25) и $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \{\sigma^{(N+2)/N}/Q(\sigma)\} = 0$, то любое критическое начальное распределение (2) приведет к неограниченности решения задачи Коши (24), (2). Это утверждение прямо следует из теоремы 4.

2. Ниже мы определим один класс критических начальных распределений. Предварительно заметим, что критичность функции $u_0(x)$ обеспечивает неубывание решения задачи всюду в Q_T^{N+1} . Как следует из неравенства (9), все критические функции $u_0(x) \in C^2(\mathbb{R}_0^N(u_0)) \cap C(\mathbb{R}^N)$ можно получить из уравнения

$$\nabla(k(u_0)\nabla u_0) + q(u_0) = \alpha(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (26)$$

в котором $\alpha(x)$ — произвольная неотрицательная функция. Мы ограничимся рассмотрением зависящих только от $\|x\|$ и монотонно убывающих (т. е. $u_{x_i}(t, x) \text{ sign } x_i \leq 0$ почти всюду в Q_T^{N+1}) критических начальных распределений. Этот класс описывается уравнениями

$$\frac{1}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{N-1} k(u_0) \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) + q(u_0) = \delta(u_0), \quad r \in \mathbb{R}_+^1, \quad (27)$$

в которых $r = \|x\|$, а функция $\delta(u_0)$ — неотрицательная при $u_0 \in (0, \infty)$, и краевыми условиями

$$u_0(0) = \bar{u}_m^0, \quad \frac{\partial}{\partial r} u_0(0) = 0, \quad \bar{u}_m^0 = \max_{r \in \mathbb{R}_+^1} u_0(r). \quad (28)$$

Рассмотрим одномерный аналог задачи (27), (28), т. е. случай $N=1$. Положим для удобства $\delta(u_0) = \gamma(u_0)q(u_0)$, где функция γ неотрицательна и удовлетворяет при всех $\eta \leq \bar{u}_m^0$ неравенству

$$\int_{\eta}^{\bar{u}_m^0} k(\xi) Q(\xi)(1 - \gamma(\xi)) d\xi \geq 0.$$

Тогда задача (27), (28) всегда имеет решение и с помощью функции

$$R_\gamma(\lambda) = \int_{\lambda}^{\bar{u}_m^0} k(\eta) d\eta / \left\{ 2 \int_{\eta}^{\bar{u}_m^0} k(\xi) Q(\xi)(1 - \gamma(\xi)) d\xi \right\}^{1/2}, \quad (29)$$

$$0 \leq \lambda \leq \bar{u}_m^0,$$

ее решение записывается в виде $u_0(x) = R_\gamma^{-1}(r)$. Из (29) получаем, что при фиксированном \bar{u}_m^0 всегда выполнено неравенство $R_\gamma^{-1}(r) \geq R_0^{-1}(r)$ при $\forall r \in \mathbb{R}_+^1$. Таким образом, в классе монотонных симметричных критических начальных распределений с фиксированным максимумом минимальным является решение стационарного уравнения ($\gamma \equiv 0$). Для этой оценки введем обозначение $\underline{u}_0(x)$. Нетрудно показать, что $\underline{u}_0(x)$ является вообще минимальной среди всех критических начальных распределений, удовлетворяющих условию $u_0(0) \geq \bar{u}_m^0$. Отметим некоторые свойства минимального распределения. Например:

$$\text{mes sup } \underline{u}_0(x) = 2R_0(0), \quad \|\underline{u}_0(x)\|_1 = \int_0^{\bar{u}_m^0} R_0(\eta) d\eta. \quad (30)$$

Таким образом, для того чтобы начальное распределение с фиксированным \bar{u}_m^0 обеспечило рост решения всюду в Q_T^{N+1} , оно должно обладать носителем и «энергией» не меньшими, чем вычисляемые по формулам (30).

Особенно просто выглядит функция (29) при $\gamma \equiv 0$ в случае $k(p) \equiv \equiv 1$ и $Q(p) = p^\beta$

$$R_0(\lambda) = \bar{u}_m^{0(1-\beta)/2} [2(\beta + 1)]^{-1/2} B_y((\beta + 1)^{-1}, 1/2),$$

где $y = (\lambda/\bar{u}_m^0)^{\beta+1}$, $B_y(m, n)$ — неполная бета-функция

$$B_y(m, n) = \int_y^1 s^{m-1}(1-s)^{n-1} ds, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

В этом случае

$$\text{mes suppr } \underline{u}_0(x) = \underline{u}_m^{0(1-\beta)/2} [2\pi(\beta+1)^{-1}]^{1/2} \Gamma((\beta+1)^{-1}) / \Gamma((\beta+1)^{-1} + 1/2),$$

$$\|u_0(x)\|_1 = \underline{u}_m^{0(3-\beta)/2} [2(\beta+1)^{-1}]^{1/2} \int_0^1 \eta^{-\beta(\beta+1)^{-1}} B_\eta((\beta+1)^{-1}, 1/2) d\eta.$$

§ 3. О решениях полулинейного уравнения $u_t = \Delta u + u^\beta$. Рассмотрим задачу (1), (2) случая $Q(u) = u^\beta$. В этом параграфе методом построения нижнего и верхнего решений указанного уравнения будут получены некоторые оценки его неограниченных и ограниченных решений. При этом для анализа свойств будет использовано неравенство (21).

Пусть функция $u_0(x)$ в (2) зависит только от $\|x\|$. Тогда уравнение (1) в результате замены $r = \|x\|$ приобретает вид

$$\Delta u = u_t - \frac{1}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{N-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - u^\beta = 0, \quad \beta > 1. \quad (31)$$

Рассмотрим задачу (31), (2).

3.1. *Построение нижнего решения.* Рассмотрим в $Q_T^2 = (0, T) \times \mathbb{R}^1$ функцию

$$\underline{u}(t, x) = (T-t)^{-(\beta-1)^{-1}} \underline{\theta}(\xi), \quad \xi = r(T-t)^{-1/2}.$$

Пусть $\underline{\theta}(\xi) \in C^2(\mathbb{R}^1)$ и симметрична относительно преобразования $\xi \rightarrow -\xi$. Для того чтобы эта функция была в \mathbb{R}^1 нижним решением уравнения (31), необходимо, чтобы в \mathbb{R}^1

$$\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} \underline{\theta}')' - \frac{1}{2} \underline{\theta}' \xi - \frac{1}{(\beta-1)^{-1}} \underline{\theta} + \underline{\theta}^\beta \geq 0, \quad \left(' = \frac{d}{d\xi} \right). \quad (32)$$

Положим $\underline{\theta}(\xi) = A \exp\{-\alpha\xi^2\}$, где константы $A > 0$, $\alpha > 0$ будут определены позднее. Неравенство (32) после деления обеих его частей на $\underline{\theta}(\xi)$ принимает вид

$$\alpha(4\alpha + 1)\xi^2 + A^{\beta-1} \exp\{\alpha(1-\beta)\xi^2\} \geq 2\alpha N + 1/(\beta-1).$$

На основе анализа этого неравенства формулируется следующая теорема.

Теорема 5. Пусть в задаче (1), (2) начальное распределение таково, что в \mathbb{R}^N выполнено неравенство

$$u_0(x) \geq T^{-(\beta-1)^{-1}} A \exp\{-\alpha\|x\|^2 T^{-1}\},$$

где $T > 0$, $\alpha > 0$, $A \geq [2\alpha N + (\beta-1)^{-1}]^{(\beta-1)^{-1}} \exp\left\{\frac{2\alpha N + (\beta-1)^{-1}}{4\alpha+1}\right\}$.

Тогда существует такое $T_0 \leq T$, что в $Q_{T_0}^{N+1}$ решение задачи неограничено, причем справедлива оценка

$$u(t, x) \geq (T-t)^{-(\beta-1)^{-1}} A \exp \{-\alpha \|x\|^2 (T-t)^{-1}\}, \quad (t, x) \in Q_{T_0}^{N+1}.$$

Замечание. Из оценок теоремы 5 получается уже известный результат о неограниченности любого решения задачи (1), (2) с $\|u_0(x)\|_1 > 0$ при $\beta < (N+2)/N$. Для этого достаточно показать, что функция $v(t, x)$, определяемая формулами (14), (15), будет по истечении конечного времени удовлетворять условию последней теоремы.

3.2. Построение верхнего решения. Как следует из теоремы 4 (см. замечание к ней) ограниченное верхнее решение уравнения (1) при $\beta < (N+2)/N$ построить нельзя. Рассмотрим случай $\beta > (N+2)/N$. Верхнее решение уравнения (31) в Q_T^2 будем искать в виде

$$\bar{u}(t, x) = (T+t)^{-(\beta-1)^{-1}} \bar{\theta}(\xi), \quad \xi = r(T+t)^{-1/2},$$

где $\bar{\theta}(\xi) = \bar{\theta}(-\xi)$ и $\bar{\theta}(\xi) \in C^2(\mathbb{R}^1)$. Для того чтобы эта функция была верхним решением, в \mathbb{R}^1 должно выполняться неравенство

$$\xi^{1/(N-1)} \left(\xi^{N-1} \bar{\theta}' \right)' + \frac{1}{2} \bar{\theta}'' \xi + \frac{1}{\beta-1} \bar{\theta} + \bar{\theta}^\beta \leq 0. \quad (33)$$

Положим $\bar{\theta}(\xi) = A \exp(-\alpha \xi^2)$, где $A > 0$, $\alpha > 0$. Неравенство (33) в этом случае приобретает вид

$$\alpha(4\alpha - 1)\xi^2 + A^{\beta-1} \exp \{ \alpha(1 - \beta)\xi^2 \} \leq 2\alpha N - 1/(\beta - 1),$$

откуда выбираются величины коэффициентов A и α . Таким образом, доказана следующая

Теорема 6. Пусть в задаче (1), (2) $\beta > (N+2)/N$ и пусть начальное распределение таково, что в \mathbb{R}^N

$$u_0(x) \leq T^{-(\beta-1)^{-1}} A \exp \{-\alpha \|x\|^2 T^{-1}\},$$

где $[2N(\beta-1)]^{-1} < \alpha \leq 1/4$, $A \leq [2\alpha N - (\beta-1)^{-1}]^{(\beta-1)^{-1}}$. Тогда решение задачи существует в Q_∞^{N+1} , причем справедлива оценка

$$u(t, x) \leq (T+t)^{(\beta-1)^{-1}} A \exp \{-\alpha \|x\|^2 (T+t)^{-1}\}.$$

Замечание. В работе [7] (см. также [9]) другим, более сложным способом, получена оценка теоремы 6 для частного случая $\alpha = 1/4$.

3.3. Некоторые оценки. Рассмотрим неравенство (21). В § 2 установлено, что, если при некоторых $(t^*, x^*) \in Q_T^{N+1}$ выполняется неравенство $v(t^*, x^*) \geq (\beta-1)^{-(\beta-1)^{-1}} t^{*-(\beta-1)^{-1}}$, то решение задачи (1), (2)

будет неограниченным, причем $T_0 \leq t^*$. Это же неравенство позволяет определить величину x^* , т.е. координату точки, в которой решение стало неограниченным в первую очередь. Переписывая (21), с учетом (14), (15) получим неравенство

$$I = \int_{\mathbb{R}^N} \exp \{-\|y\|^2/(4t)\} u_0(x+y) dy \geq Mt^{(N/2)-1/(\beta-1)}, \quad (34)$$

где $M = (4\pi)^{N/2}(\beta-1)^{-(\beta-1)^{-1}}$. Точно решить (34) удастся в самых редких случаях, поэтому возникает вопрос о приближенном его решении для некоторых частных начальных распределений (2).

1. Анализ элементарного возмущения. Зададим $u_0(x)$ в «элементарном» виде: $u_0(x) = \delta$ при $\|x\| \leq a$ и $u_0(x) = 0$ при $\|x\| > a$, где $\delta > 0$ и $a > 0$ — заданные константы. Используя оценку $\exp \{-\|y\|^2/(4t)\} > 1 - \|y\|^2/4t$, получим для интеграла I в (34) оценку снизу

$$I \geq \int_{\|y\| < b} \{1 - \|y\|^2/4t\} u_0(x+y) dy, \quad b = \min \{a, 2t^{1/2}\}.$$

Очевидно, что в этом случае $x^* = 0$. Предположим сначала, что $t^* > a^2/4$. Тогда $b = a$ и верхняя граница времени существования решения определяется из уравнения

$$\|u_0(x)\|_1 - M_1 t^{-1} = Mt^{(N/2)-1/(\beta-1)}, \\ M_1 = a^{N+2} \pi^{N/2} / 2\Gamma(N/2)(N+2).$$

Для некоторых β это уравнение можно решать точно. Например, при $\beta = (N+2)/N$, $t^* = M_1/(\|u_0(x)\|_1 - M)$, для $\beta = (4+N)/(2+N)$ получаем $t^* = (M + M_1)/\|u_0(x)\|_1$, для $\beta = (3+N)/(1+N)$ $t^* = [M/2\|u_0(x)\|_1] + [(M/2\|u_0(x)\|_1)^2 + M_1]^{1/2}$ и т.д.

Пусть теперь $t^* \leq a^2/4$. Тогда $b = 2t^{1/2}$ и решение неравенства (34) (при $x = 0$) определяется по формуле $t^* = [M/M_2\|u_0(x)\|_1]^{\beta-1}$, где $M_2 = 2^{N+1}/(N+2)a^N$. Заметим, что эта оценка справедлива лишь при $\|u_0(x)\|_1 \geq (a^2/4)^{-(\beta-1)^{-1}} M/M_2$.

2. Для оценки времени существования решения можно воспользоваться при $t > 1$ несколькими членами разложения интеграла I по степеням $1/t$. При этом предполагаем, что функция $u_0(x)$ является финитной. Тогда получаем

$$I = \|u_0(x)\|_1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k E_{2k}/k! t^k + o(t^{-n-1}), \\ E_{2k} = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \|y\|^{2k} dy.$$

Коэффициенты E_{2k} суть моменты начального распределения относительно точки $x = 0$. Фиксируя в последнем выражении $n = 1$, для $\beta = (N + 4)/(N + 2)$ получаем решение (34) в следующем виде $t^* \simeq (M + E_2)/\|u_0(x)\|_1$. Эта оценка справедлива при $\|u_0(x)\|_1 > M + E_2$.

3. Взаимодействие элементарных возмущений. Зададим функцию в виде двух «узких» элементарных возмущений, симметричных относительно точки $x = 0$ (см. рис. 1). Например, пусть $u_0(x) \sim \exp\{-[(x_1 - a)^2 + x_2^2 + \dots + x_u^2]\} + \exp\{-[(x_1 + a)^2 + x_2^2 + \dots + x_u^2]\}$, $a > 0$. Пусть энергия каждого из них равна $\|u_0(x)\|_1/2$.

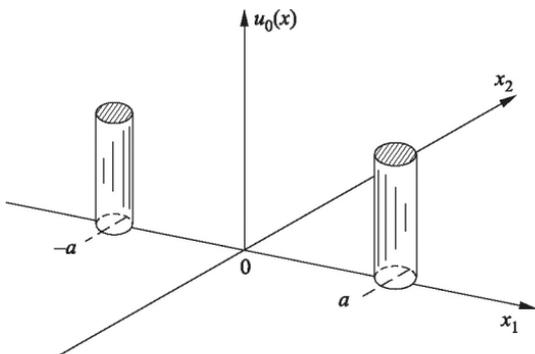


Рис. 1

С точки зрения вопросов, рассмотренных в [13–16], принципиальной является задача определения условий их резонансного взаимодействия, т. е. тех требований на a , $\|u_0(x)\|_1$, выполнение которых обеспечивает неограниченный рост решения в точке (взаимодействие возмущений), а не в окрестностях их первоначального задания (отсутствие взаимодействия). Нетрудно видеть, что $x_2^* = \dots = x_u^* = 0$. Поэтому интеграл в (34) можно считать равным

$$I = [\|u_0(x)\|_1/2] [\exp\{-(x_1 - a)^2/4t\} + \exp\{-(x_1 + a)^2/4t\}].$$

Функция I достигает максимума по x_1 в точке $x_1 = 0$ при $t \geq a^2/2$. В этом случае $\max_{x_1} I = \|u_0(x)\|_1 \exp\{-a^2/4t\}$. При $t < a^2/2$ резонансное взаимодействие невозможно. Корни неравенства (34), обеспечивающие взаимодействие возмущений, определяются условиями

$$\|u_0(x)\|_1 \exp\{-a^2/4t\} = Mt^{N/2 - (\beta - 1)t^{-1}}, \quad t \geq a^2/2. \quad (35)$$

При $\beta = (N + 2)/N$ уравнение (35) решается точно, его корень $t^* = a^2/4 \ln(\|u_0(x)\|_1/M)$ имеет смысл при $\|u_0(x)\|_1 > M$. Учитывая второе условие (35), а также условие существования неограниченных решений (см. теорему 4), получим, что резонансное взаимодействие возмущений осуществляется при

$$(2\pi N)^{N/2} < \|u_0(x)\|_1 \leq (2\pi N)^{N/2} \exp\{1/2\}.$$

Заметим, что эти условия не содержат линейного размера системы — величины a , а зависят только от ее энергии $\|u_0(x)\|_1$.

Пусть теперь $\beta < (N+2)/N$. Тогда резонансное взаимодействие осуществляется при всех

$$0 < \|u_0(x)\|_1 \leq M(a^2/2)^{N/2-(\beta-1)^{-1}} \exp\{1/2\}.$$

Резонансное взаимодействие для $\beta > (N+2)/N$ осуществляется, если выполнены неравенства $M[a^2/4(N/2-(\beta-1)^{-1})]^{N/2-(\beta-1)^{-1}} \times \exp\{-\frac{N}{2} + (\beta-1)^{-1}\} \leq \|u_0(x)\|_1 \leq M(a^2/2)^{N/2-(\beta-1)^{-1}} \exp\{1/2\}$. При этом справедлива оценка $t^* \leq a^2/4(N/2 - (\beta-1)^{-1})$. Ограничение снизу на энергию возмущений связано с условием существования неограниченных решений при $\beta > (N+2)/N$ (см. теорему 4).

§ 4. О решениях полулинейного уравнения $u_t = \Delta u + (1 + u) \times \ln^\beta(1 + u)$. Рассмотрим в Q_T^{N+1} задачи Коши (1), (2) для случая $Q(u) = (1 + u) \ln^\beta(1 + u)$, $\beta > 1$. Исследование этого уравнения представляет большой интерес с точки зрения вопросов, рассмотренных в следующем параграфе. Поскольку в этом случае функция $Q(u)$ выпуклая, $F(\lambda) < \infty$ при $\lambda > 0$ и $F(0) = \infty$ (см. (3)), из теоремы 4 следует, что при $\beta < (N+2)/N$ любое начальное возмущение с $\|u_0(x)\|_1 > 0$ приводит к существованию неограниченного решения, при $\beta = (N+2)/N$ и $\|u_0(x)\|_1 > (2\pi N)^{N/2}$ решение также становится неограниченным и лишь при $\beta > (N+2)/N$ пока неизвестны условия существования неограниченных или ограниченных решений. В этом параграфе методом построения верхних и нижних решений будут получены эти условия.

Пусть $u_0(x)$ является функцией только $\|x\|$. Введем новую функцию $U(t, x) = \ln(1 + u(t, x))$, которая является решением задачи Коши для уравнения ($r = \|x\|$)

$$\begin{aligned} \Delta U = U_t - \frac{1}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{N-1} \frac{\partial U}{\partial r} \right) - \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 - U^\beta = 0, \\ (t, x) \in Q_T^2, \end{aligned} \tag{36}$$

с краевым условием в $\mathbb{R}^1 : U(0, x) = U_0(x) = \ln(1 + u_0(x))$. Дальнейший анализ будем проводить применительно к этой задаче.

4.1. *Построение нижнего решения.* Рассмотрим в $H_T^2 = \{(t, r) : 0 < t < T, 0 \leq r \leq a(T-t)^{(\beta-2)/2(\beta-1)}\}$, где $T > 0$, $a > 0$ — некоторые константы, функцию

$$\begin{aligned} \underline{U}(t, x) &= (T-t)^{-(\beta-1)^{-1}} \underline{\theta}(\xi), \\ \xi &= r(T-t)^{-(\beta-2)/2(\beta-1)}. \end{aligned}$$

Для того чтобы эта функция была нижним решением уравнения (36) в H_T^2 , необходимо, чтобы $\underline{\theta}(\xi) \in C^2((-a, a))$ и

$$(T-t)^{(\beta-1)^{-1}} \xi^{\frac{1}{N-1}} (\xi^{N-1} \underline{\theta}')' + \underline{\theta}'^2 - \frac{\beta-2}{2(\beta-1)} \underline{\theta}' \xi - \frac{1}{\beta-1} \underline{\theta} + \underline{\theta}^\beta \geq 0, \quad \left(' = \frac{d}{d\xi} \right), \quad (37)$$

при $\forall \xi \in (-a, a)$. Обозначим $h(t) = (T-t)^{(\beta-1)^{-1}}$ и будем искать функцию $\underline{\theta}(\xi)$ в виде $\underline{\theta}(\xi) = A(a^2 - \xi^2)$, где $A > 0$. Тогда неравенство принимает вид

$$- [2h(t)N + a^2/(\beta-1)] + \xi^2(4A+1) + A^{\beta-1}(a^2 - \xi^2)^\beta \geq 0.$$

На основе анализа этого неравенства формулируется следующая теорема.

Теорема 7. Пусть в задаче (1), (2) начальное распределение таково, что в \mathbb{R}^N выполнено неравенство

$$u_0(x) \geq \exp \left\{ T^{-(\beta-1)^{-1}} A \left[a^2 - \|x\|^2 T^{-(\beta-2)/(\beta-1)} \right] \right\} - 1, \quad \|x\| < a,$$

где $A > (2-\beta)/4(\beta-1)$, $A^{\beta-1} a^{2\beta} [1 - (\beta-1)^{-1} (1+4A)^{-1}]^\beta \geq 2T^{(\beta-1)^{-1}} \times \times N + a^2/(\beta-1)$. Тогда существует $T_0 \leq T$ такое, что в $Q_{T_0}^{N+1}$ решение задачи неограниченно, причем справедлива оценка

$$u(t, x) \geq \exp \left\{ (T-t)^{-(\beta-1)^{-1}} A \left[a^2 - \|x\|^2 (T-t)^{-(\beta-2)/(\beta-1)} \right] \right\} - 1.$$

4.2. Построение верхнего решения. Верхнее решение уравнения (36) будем строить при $\beta > (N+2)/N$. Рассмотрим в Q_∞^{N+1} функцию

$$\bar{U}(t, x) = (T+t)^{-(\beta-1)^{-1}} \bar{\theta}(\xi), \quad \xi = r(T+t)^{-1/2}.$$

Пусть $\bar{\theta}(\xi) \in C^2(\mathbb{R}_+^1)$. Функция $\bar{U}(t, x)$ будет верхним решением, если в \mathbb{R}^1 выполнено неравенство

$$\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} \bar{\theta}')' + (T+t)^{-(\beta-1)^{-1}} \bar{\theta}'^2 + \frac{1}{2} \bar{\theta}' \xi + \frac{1}{\beta-1} \bar{\theta} + \bar{\theta}^\beta \leq 0. \quad (38)$$

Положим $\bar{\theta}(\xi) = A \exp \{-\alpha \xi^2\}$, где $A > 0$, $\alpha > 0$ — некоторые постоянные величины. Неравенство (38) принимает вид

$$-2\alpha N + 1/(\beta-1) + \alpha(4\alpha-1)\xi^2 + A^{\beta-1} \exp \{-\alpha(\beta-1)\xi^2\} + + 4\alpha^2 A h(t) \xi^2 \exp \{-d\xi^2\} \leq 0,$$

где введено обозначение $h(t) = (T + t)^{-(\beta-1)^{-1}}$. На основе анализа этого неравенства формулируется следующая теорема.

Теорема 8. Пусть в задаче (1), (2) $\beta > (N + 2)/N$ и пусть начальное распределение таково, что

$$u_0(x) \leq \exp \left\{ T^{-(\beta-1)^{-1}} A \exp \left\{ -\alpha \|x\|^2 T^{-1} \right\} \right\} - 1,$$

где $1/2N(\beta - 1) < \alpha \leq 1/4$, $A^{\beta-1} + 4\alpha AT^{-(\beta-1)^{-1}} \exp \{-1\} \leq 2\alpha N - 1/(\beta - 1)$. Тогда решение задачи существует в Q_∞^{N+1} , причем справедлива оценка

$$u(t, x) \leq \exp \left\{ (T + t)^{-(\beta-1)^{-1}} A \exp \left\{ -\alpha \|x\|^2 (T + t)^{-1} \right\} \right\} - 1.$$

§ 5. Локализация неограниченных решений. В этом параграфе излагаются результаты исследования решений задачи Коши для одномерного полулинейного уравнения

$$u_t = u_{xx} + (1 + u) \ln^\beta(1 + u), \quad (t, x) \in Q_T^2, \quad \beta > 1, \quad (39)$$

с начальным условием $u(0, x) = u_0(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^1$, причем функция $u_0(x)$ такова, что $u_0(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Эта задача описывает, в частности, процесс горения в среде с постоянным коэффициентом теплопроводности и нелинейным источником тепла. Заметим, что ограничение на начальное распределение обеспечивает условие $u(t, x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ всюду в области существования решения.

Определение. Пусть в $Q_{T_0}^2$ решение задачи является неограниченным. Тогда будем говорить, что оно локализовано, если для всех $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\mathfrak{M}_\varepsilon = \sup_{t \in (0, T_0)} \text{mes} \{x : u(t, x) \geq \varepsilon\} < \infty. \quad (40)$$

В противном случае будем говорить, что решение не является локализованным.

Фактически, условие (40) обуславливает существование всюду в \mathbb{R}^1 за исключением множества, имеющего конечную меру, функции $u(T_0^-, x)$ (см. рис. 2). Если же $u(T_0^-, x) = \infty$ всюду в \mathbb{R}^1 , то локализация решения отсутствует.

Цель настоящего параграфа — определить, при каких условиях решение сформулированной задачи локализовано или не локализовано. Ранее подобная задача исследовалась в работах [13–15] применительно к уравнению

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^\beta, \quad \sigma > 0, \quad \beta > 1.$$

В частности, было установлено, что при $\beta < \sigma + 1$ локализация отсутствует ($\mathfrak{M}_\varepsilon = \infty$ при $\forall \varepsilon > 0$), при $\beta \geq \sigma + 1$ существует локализация

неограниченных решений, причем $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \mathfrak{M}_\varepsilon = L_T = 2\pi(\sigma + 1)^{1/2}/\sigma$ для $\beta = \sigma + 1$ (т.е. решение становится неограниченным сразу на множестве с ненулевой мерой) и $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \mathfrak{M}_\varepsilon = 0$ для $\beta > \sigma + 1$ (решение обращается в бесконечность на множестве меры нуль).

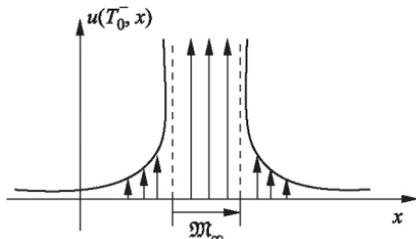


Рис. 2

Сделаем в уравнении (39) замену $U = \ln(1 + u)$, которая преобразует его к виду

$$U_t = U_{xx} + U_x^2 + U^\beta, \tag{39'}$$

$$U(0, x) = U_0(x) = \ln(1 + u_0(x)), \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

и будем исследовать решения этой задачи.

5.1. Структурная устойчивость неограниченных решений. Задача (39') является, вообще говоря, некорректной (см. результаты § 3), т.е. ее неограниченные решения не являются устойчивыми относительно малых изменений краевых данных. Поэтому, в соответствии с понятием структурной устойчивости неограниченных автомодельных решений, введенным в [14], для описания эволюции во времени решений задачи (39') мы определяем автомодельное представление неограниченного решения.

Определение. Функцию $\theta^{(\alpha)}(t, \xi)$ будем называть *автомодельным представлением решения задачи (39')*, если

$$\theta^{(\alpha)}(t, \xi) = A \|U(t, x)\| U \left(t, A^{(\alpha/2)-1} \|U(t, x)\|^{1-(\alpha/2)} \xi \right),$$

$$(t, x) \in Q_T^2,$$

где $A > 0$ и α — некоторые константы.

Смысл термина «автомодельное представление» будет ясен из дальнейшего изложения. Численное решение задачи в частных производных (39') показывает, что $\theta^{(\beta)}(t, \xi)$ при $t \rightarrow T_0^-$ стремится к пространственным профилям автомодельных решений «усеченного», вырожденного уравнения типа Гамильтона–Якоби (ср. (39'))

$$V_t = V_x^2 + V^\beta,$$

которые имеют вид $V(t, x) = (T_0 - t)^{-(\beta-1)^{-1}} \theta(\xi)$, $\xi = x(T_0 - t)^{-(\beta-2)/(2(\beta-1))}$, а функция $\theta(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\theta'^2 - \frac{\beta-2}{2(\beta-1)} \theta' \xi - \frac{1}{\beta-1} \theta + \theta^\beta = 0, \quad \left(' = \frac{d}{d\xi} \right), \quad (41)$$

и краевым условиям в $\theta'(0) = 0$, $\theta(\infty) = 0$. Таким образом, неограниченные решения задачи (39') структурно устойчивы в том смысле, что

$$\lim_{t \rightarrow T_0^-} \|\theta^{(\beta)}(t, \xi) - \theta(\xi)\| = 0, \quad A = (\beta-1)^{(\beta-1)^{-1}}. \quad (42)$$

5.2. *Существование автомодельных решений «усеченного» уравнения.* Покажем, что решение уравнения (41), которое при $\beta \neq 2$ можно построить лишь численно, существует и единственно. Уравнение (41) перепишем в эквивалентном виде

$$\theta' = \frac{\beta-2}{4(\beta-1)} \xi - \left\{ \left[\frac{\beta-2}{4(\beta-1)} \right]^2 \xi^2 + \frac{1}{\beta-1} \theta - \theta^\beta \right\}^{1/2}, \quad (43)$$

где знак «-» перед радикалом выбран из первого краевого условия. Доказательство существования проводится на основе анализа поля, интегральных кривых этого уравнения. Поскольку $\theta'(0) = -\left\{ \frac{1}{\beta-1} \theta(0) - \theta^\beta(0) \right\}^{1/2}$, то первому краевому условию удовлетворяют лишь те кривые, для которых $\theta(0) = A = (\beta-1)^{(\beta-1)^{-1}}$ (см. формулу (42)). На рисунках 3, 4 схематически представлены поля интеграль-

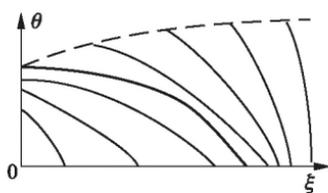


Рис. 3

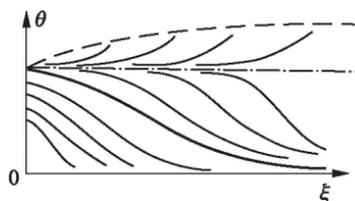


Рис. 4

ных краевых уравнений (43) для случаев $\beta \in (1, 2)$ и $\beta > 2$ соответственно. Жирными линиями выделено искомое решение, пунктирными — кривая $\xi = |4(\beta-1)/(\beta-2)| \left\{ \theta^\beta - \theta/(\beta-1) \right\}^{1/2}$, выше которой интегральные кривые не существуют, штрихпунктирной — изоклина нуля. Асимптотика решения в окрестности $\xi = 0$ имеет вид $\theta(\xi) = (\beta-1)^{(\beta-1)^{-1}} - 1/4(\beta-1)\xi^2 + O(\xi^4)$. При $\beta \in (1, 2)$ $\theta(\xi) \equiv 0$ для $\forall \xi > \xi_0(\beta)$. Асимптотика $\theta(\xi)$ вблизи $\xi = \xi_0$ — линейная функция $\theta(\xi) \simeq (2-\beta)/2(\beta-1)\xi_0(\xi_0 - \xi)$, $\xi \rightarrow \xi_0^-$. При $\beta > 2$ функция $\theta(\xi)$ положительна всюду в \mathbb{R}^1 , причем асимптотика для больших ξ имеет

вид $\theta(\xi) \simeq C(\beta)_b^{-2/(\beta-2)}$, где $C(\beta) > 0$. При $\beta = 2$ усеченная задача имеет аналитическое решение

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &= \cos^2(\xi/2), & |\xi| < \pi; \\ \theta(\xi) &\equiv 0, & |\xi| > \pi, \end{aligned} \tag{44}$$

с периодом $\Delta\xi = 2\pi$ и асимптотикой $\theta(\xi) \simeq 1/4(\pi - |\xi|)^2$ при $|\xi| \rightarrow \pi^-$.

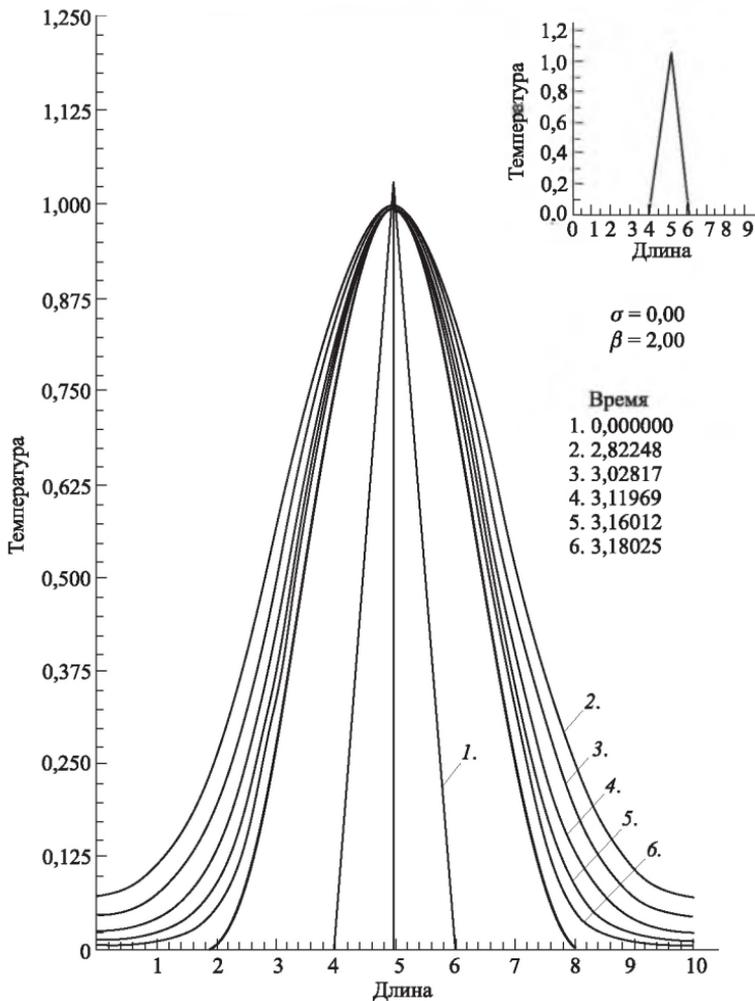


Рис. 5

5.3. Три типа неограниченных решений. Формула (42) характеризует структурную устойчивость неограниченных решений задачи (39'). На рис. 5 приведены результаты численного расчета этой задачи при

$\beta = 2$ и показано, что $\theta(\beta)(t, \xi) \rightarrow \theta(\xi)$ при $t \rightarrow T_0^-$ (функция $\theta(\xi)$ в этом случае вычисляется по формуле (44)). Временные закономерности автомодельных решений усеченного уравнения позволяют сделать вывод о локализации неограниченных решений при $\beta \geq 2$, причем для $\beta = 2$ $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \mathfrak{M}_\varepsilon = 2\pi$ (\mathfrak{M}_ε определяется по формуле (40)) и при $\beta > 2$ $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \mathfrak{M}_\varepsilon = 0$. При $\beta \in (1, 2)$ локализация неограниченного решения отсутствует и $U(t, x) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0^-$ всюду в \mathbb{R}^1 .

5.4. Структурная устойчивость ограниченных решений при $\beta > 3$. В § 3 показано, что при $\beta > 3$ существуют ограниченные решения задачи (39'). Численные расчеты этой задачи показывают, что они структурно устойчивы, причем при некотором $A > 0$, зависящем только от величины β , справедливо предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| U^{(\beta+1)}(t, \xi) - f(\xi) \right\| = 0,$$

в котором $f(\xi)$ — автомодельное представление автомодельного решения уравнения (ср. (39')) $V_t = V_{xx} + V^\beta$. Это решение имеет вид $V(t, x) = t^{(\beta-1)^{-1}} f(\xi)$, $\xi = xt^{-1/2}$, а функция $f(\xi)$ является решением уравнения

$$f'' + \frac{1}{2} f' \xi + (\beta - 1)^{-1} f + f^\beta = 0 \quad (45)$$

с краевыми условиями $f' = 0$, $f(\infty) = 0$. Численные расчеты уравнения (45) показывают, что его решение при $\beta > 3$ существует, причем асимптотика при больших ξ имеет вид $f(\xi) \simeq C(\beta) \xi^{-1} \exp\{-\xi^2/4\}$, где $C(\beta) > 0$ — некоторая константа. На рис. 6 приведены некоторые кривые, полученные в результате численного расчета этой задачи при $\beta = 3,7$. На рисунке жирной линией выделено решение задачи, которому соответствуют $A = f(0) = 0,603$ и $C = 2,35$.

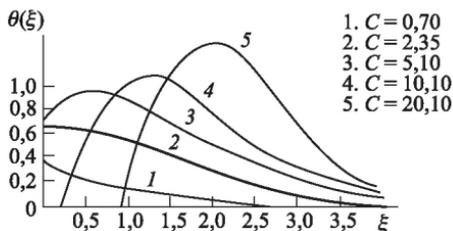


Рис. 6

5.5. Качественная теория осреднения. Для исследования эволюции решений задачи (39') применим качественную теорию осреднения, предложенную в [20]. Следуя этой работе, «приближенное» решение задачи будем искать в виде $\bar{U}(t, x) = \varphi(t)\mu(\eta)$, где $\eta = x/g(t)$. Пусть функция $\mu(\eta)$ такова, что $\mu(\eta) = \mu(-\eta)$, $\mu'(\eta) < 0$ при $0 < \eta < 1$, $\mu'(0) = 0$, $\mu(0) = 1$; $\mu(\eta) \equiv 0$, $|\eta| > 1$. Тогда подлежащие определению

функции $\varphi(t)$ и $g(t)$ описывают эволюцию амплитуды (т. е. $\|\tilde{U}\|$) и ширины решения, т. е. координаты точки, в которой $\tilde{U}(t, x) = \frac{1}{2}\tilde{U}(t, 0)$. Интегрируя уравнение в (39') по \mathbb{R}^1 сначала с весом $\rho \equiv 1$, а затем с $\rho = \tilde{U}$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (\varphi g)' &= g^{-1} [\nu_1 \varphi^2 + \nu_2 \varphi^\beta g^2], \\ \frac{1}{2}(\varphi^2 g)' &= \varphi g^{-1} [-\nu_3 \varphi + \nu_4 \varphi^2 + \varphi^\beta g^2 \nu_5], \quad \left(' = \frac{d}{dt} \right), \end{aligned} \tag{46}$$

в котором введены обозначения $\nu_1 = \int \mu^2 d\eta / \int \mu d\eta$, $\nu_2 = \int \mu^\beta d\eta / \int \mu d\eta$, $\nu_3 = \int \mu^2 d\eta / \int \mu d\eta$, $\nu_4 = \int \mu \mu^2 d\eta / \int \mu^2 d\eta$, $\nu_5 = \int \mu^{\beta+1} d\eta / \int \mu^2 d\eta$. Система уравнений (46) сводится к фазовому виду

$$\frac{d\varphi}{dg} = \varphi g^{-1} [\varphi^{\beta-1} g^2 a_1 + \varphi b_1 - 1] / [\varphi^{\beta-1} g^2 a_2 + \varphi b_2 - 1], \tag{47}$$

где $a_1 = (2\nu_5 - \nu_2)/2\nu_3$, $b_1 = (2\nu_4 - \nu_1)/2\nu_3$, $a_2 = (\nu_2 - \nu_5)/\nu_3$, $b_2 = (\nu_1 - \nu_4)/\nu_3$. Уравнение (47) имеет три особые траектории: изоклину нуля $g_0(\varphi) = [(1 - b_1\varphi)a_1^{-1}\varphi^{1-\beta}]^{1/2}$, изоклину бесконечности $g_\infty(\varphi) = [-(1 + b_2\varphi)^{-1}a_2\varphi^{1-\beta}]^{1/2}$ и сепаратрису

$$\begin{aligned} g_*(\varphi) &\simeq \left[\frac{(2-\beta)b_1 - 2b_2}{2a_2 + a_1(\beta-2)} \right]^{1/2} \varphi^{(2-\beta)/2} \quad \text{при } g \rightarrow \infty, \\ g_*(\varphi) &\simeq \left[\frac{\beta-3}{2a_2 + a_1(\beta-1)} \right]^{1/2} \varphi^{(1-\beta)/2} \quad \text{при } \varphi \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Из условий существования этих особых линий следуют ограничения на коэффициенты: $a_1 > 0$, $b_1 < 0$, $a_2 < 0$, $b_2 > 0$. На рисунках 7-10

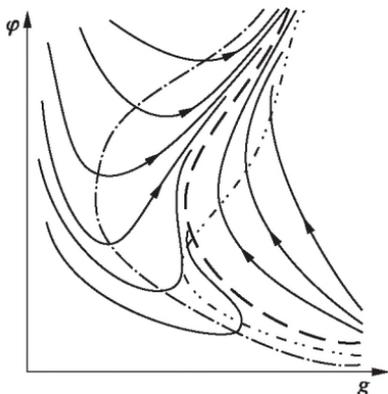


Рис. 7

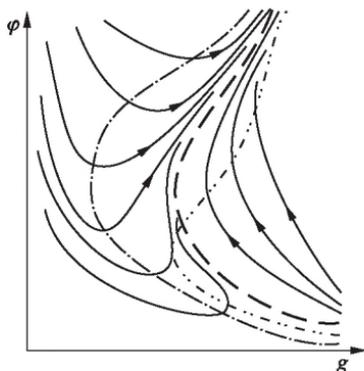


Рис. 8

приведены схематические изображения фазовой плоскости уравнения (47) для случаев $\beta \in (1, 2)$, $\beta = 2$, $\beta \in (2, 3)$, $\beta > 3$ соответственно.

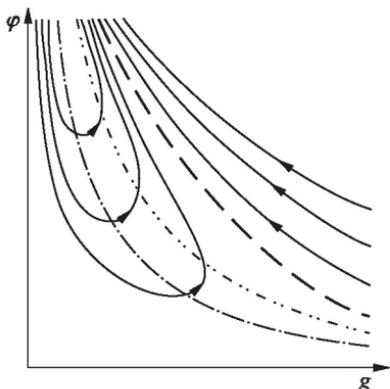


Рис. 9

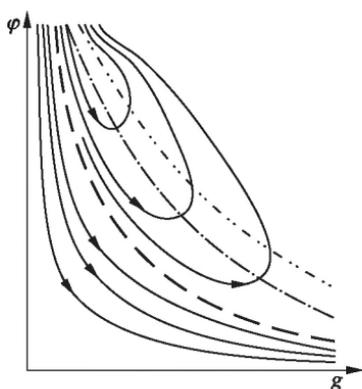


Рис. 10

Асимптотика сепаратрисы при $\varphi \rightarrow \infty$ $g_*(\varphi) \sim \varphi^{(2-\beta)/2}$, к которой сходятся все интегральные кривые, совпадают с временными закономерностями автомодельных решений усеченной задачи (41). Рис. 10 демонстрирует тот факт, что ограниченные решения задачи (39') могут существовать лишь при $\beta > 3$, причем асимптотика этих решений при $\varphi \rightarrow 0$ $g_*(\varphi) \sim \varphi^{(1-\beta)/2}$ совпадает с временными закономерностями автомодельных решений усеченной задачи (45). Таким образом, качественная теория подтверждает все предыдущие выводы, в частности, вывод о локализации неограниченных решений при $\beta \geq 2$ и об ее отсутствии при $\beta \in (1, 2)$.

Заключение. В этом параграфе установлено, что асимптотика при $t \rightarrow T_0^-$ неограниченных решений уравнения (39) определяется временными закономерностями автомодельных решений «усеченного» «вырожденного» уравнения Гамильтона–Якоби (см. (41))

$$u_t = u_x^2/(1+u) + (1+u) \ln^\beta(1+u), \quad \beta > 1. \quad (48)$$

Уравнение (48), по сравнению с исходным (39), имеет другой порядок, на асимптотической стадии эволюции неограниченного решения происходит своеобразное «вырождение» уравнения — его порядок понижается на единицу (аналогичное явление имеет место в некоторых граничных задачах для уравнения $u_t = u_{xx}$ [17–19]).

Асимптотика при $t \rightarrow \infty$ ограниченных решений уравнения (39) определяется временными закономерностями другого «усеченного» (но уже не «вырожденного») уравнения (см. (45))

$$u_t = u_{xx} - u_x^2/(1+u) + (1+u) \ln^\beta(1+u), \quad \beta > 3. \quad (49)$$

В заключение заметим, что выбор уравнения (39) в качестве объекта исследования связан с нетривиальными свойствами его решений при различных β (при $\beta \in (1, 2)$, неограниченные решения не лока-

лизованы, при $\beta \geq 2$ — локализованы). Представляет несомненный интерес способ описания эволюции решений уравнения (39) с помощью автомодельных решений «усеченного» (совсем другого) уравнения.

Исследование более простого уравнения $u_t = u_{xx} + u^\beta$ не имеет этой нетривиальности — его неограниченные решения всегда локализованы, $u(T_0^-, x) = \infty$ всегда на множестве меры нуль, а асимптотика при $t \rightarrow T_0^-$ описывается временными закономерностями точных автомодельных решений этого уравнения:

$$u(t, x) = (T_0 - t)^{-(\beta-1)^{-1}} f(\xi), \quad \xi = x(T_0 - t)^{-1/2},$$

$$f'' - \frac{1}{2} f' \xi - \frac{1}{\beta-1} f + f^\beta = 0, \quad \left(' = \frac{d}{d\xi} \right),$$

$$f'(0) = 0, \quad f(\infty) = 0.$$

Препринт ИПМ. 1979. № 161

Список литературы

1. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралъцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
2. *Sattinger D. H.* Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems // *Ind. Univ. Math. J.* — 1972. — No. 21. — P. 979–1000.
3. *Pao C. V.* Positive solution of a nonlinear boundary-value problem of parabolic type // *J. Diff. Equ.* — 1976. — No. 22. — P. 145–163.
4. *Фридман А.* Уравнения в частных производных параболического типа. — М.: Мир, 1968.
5. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. и др.* Сравнение решений параболических уравнений на основе априорных поточечных оценок старшей производной // Препринт ИПМ АН СССР. — М., 1979. — № 21.
6. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. и др.* О сравнении решений параболических уравнений // *ДАН СССР.* — 1979.
7. *Fujita H.* On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ // *J. Faculty Science, Univ. of Tokyo.* — 1966. — No. 13. — P. 109–124.
8. *Fujita H.* On some nonexistence and nonuniqueness theorems for nonlinear parabolic equations // *Proc. Symp. Pur. Math.* 18. *Nonlinear Functional Analysis.* — 1968. — *Ann. Math. Soc.*
9. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
10. *Portnoy S.* Transience and solvability of a non-linear diffusion equation // *Annals of Probability.* — 1975. — No. 3. — P. 465–477.
11. *Portnoy S.* On solution to $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ in two dimensions // *J. Math. Anal. Appl.* — 1976. — No. 55. — P. 291–294.
12. *Галактионов В. А., Курдюмов С. М., Михайлов А. П. и др.* Об одном подходе к сравнению решений параболических уравнений // *ЖВМиМФ.* — 1979. — Т. 19, № 6.

13. Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. и др. Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла // ДАН СССР. — 1976. — Т. 227, № 2. — С. 321–324.
14. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П. Условия усложнения организации нелинейной диссипативной среды // Препринт ИМП АН СССР. — М., 1977. — № 106.
15. Самарский А. А., Еленин Г. Г., Змитренко Н. В. и др. Горение нелинейной среды в виде сложных структур // ДАН СССР. — 1977. — Т. 237, № 6. — С. 1330–1333.
16. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Повещенко Ю. А. и др. Взаимодействие тепловых структур // Препринт ИПМ АН СССР. — М., 1978. — № 77.
17. Галактионов В. А. Локализация тепла в среде с постоянной теплопроводностью // Тр. МФТИ. — 1979.
18. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П. и др. Локализация процессов диффузии в средах с постоянными свойствами // ДАН СССР. — 1979. — Т. 247, № 2. — С. 349–353.
19. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. и др. Действие граничных режимов с обострением на среду с постоянной теплопроводностью // Препринт ИПМ АН СССР. — М., 1979. — № 28.
20. Еленин Г. Г., Плехотников К. Э. Об одном способе качественного исследования квазилинейного уравнения теплопроводности с нелинейным источником // Препринт ИПМ АН СССР. — М., 1977. — № 91.
21. Дородницын В. А. Групповые свойства и инвариантные решения уравнения нелинейной теплопроводности с источником и стоком // Препринт ИПМ АН СССР. — М., 1979. — № 57.
22. Hayakawa K. On non-existence of global solutions of some semi-linear parabolic differential equations // Proc. Japan Acad. — 1973. — No. 49. — P. 503–505.
23. Keller H. B., Cohen D. S. Some positone problems suggested by nonlinear heat generation // J. Math. Mech. — 1967. — V. 16. — P. 1361–1376.
24. Fujita H. On the nonlinear equations $\Delta u + e^u = 0$ and $\partial v / \partial t = \Delta v + e^v$ // Bull. Amer. Math. Soc. — 1969. — No. 75. — P. 132–135.
25. Sugitani S. On non-existence of global solutions for some nonlinear integral equations // Osaka J. Math. — 1975. — No. 12. — P. 45–51.
26. Ewer J. P., Peletier L. A. On the asymptotic behavior of solutions of semilinear parabolic equations // SIAM J. Appl. Math. — 1975. — No. 28. — P. 43–53.
27. Fujita H. On the asymptotic stability of solutions of the equation $v_t = \Delta v + e^v$ // Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topics (Tokyo, 1969). — Tokyo: Univ. of Tokyo Press, 1970. — P. 252–259.
28. Pao C. V. Nonexistence of global solutions and bifurcation analysis for a boundary-value problem of parabolic type // Proc. Amer. Math. Soc. — 1977. — V. 65, No. 2. — P. 245–251.
29. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме // Бюлл. МГУ. — 1937. — Т. 1, № 6. — С. 1–26.

30. Похожаев С. И. Вопросы отсутствия решений нелинейных краевых задач // Тр. Всесоюзн. конф. по уравн. с частн. произв., посв. 75-летию академика И. Г. Петровского. — М.: МГУ, 1978. — С. 200–203.
31. Курдюмов С. П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации // Препринт ИПМ АН СССР. — М., 1979. — № 29.
32. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. N- и S-режимы автомодельного сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением // ПМТФ. — 1977. — № 1. — С. 3–18.
33. Самарский А. А., Курдюмов С. П. Нелинейные процессы в плотной плазме и их роль в проблеме лазерного УТС // Тр. каф. волн. газ. дин. М.: Мех.-матем. ф-т МГУ. — 1979. — № 3.
34. Курдюмов С. П. Локализация диффузионных процессов и возникновение структур при развитии в диссипативной среде режимов с обострением: Докт. дис. — 1979.
35. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. и др. Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью // Письма в ЖЭТФ. — 1977. — Т. 26, вып. 9. — С. 620.
36. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г. Диссипативные структуры в средах с распределенными параметрами // Препринт ИПМ АН СССР. — М., 1979. — № 16.
37. Самарский А. А., Соболев И. М. Примеры численного расчета температурных волн // ЖВМиМФ. — 1963. — Т. 3, № 4. — С. 702.
38. Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Плохотников К. Э. Локализация тепла в многомерных задачах нелинейной теплопроводности. Тепловой «кристалл» // Препринт ИПМ АН СССР. — М., 1979. — № 22.
39. Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. и др. Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью // ДАН СССР. — 1975. — Т. 223, № 6. — С. 1344.

Один из принципиальных результатов приведенной выше работы состоит в анализе поведения решений полулинейного (т. е. с линейной диффузией) уравнения типа реакция–диффузия

$$u_t = u_{xx} + (1 + u) \ln^\beta(1 + u), \quad (x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+, \quad (1)$$

где $\beta > 1$ — параметр. Начальная функция $u_0(x) \geq 0$ предполагалась непрерывной, ограниченной и, скажем, выпуклой. Основным достоинством уравнения (1) является то, что при разных значениях параметра β оно описывает принципиально разную эволюцию режимов с обострением:

- 1) при $\beta > 2$ — LS-режим, обострение в одной точке;
- 2) при $\beta = 2$ — S-режим, обострение в интервале 2π (конечная фундаментальная длина);
- 3) при $\beta \in (1, 2)$ — HS-режим, обострение во всем пространстве.

Заметим, что никакие до этого хорошо известные модели горения, например,

$$u_t = u_{xx} + e^u, \quad u_t = u_{xx} + u^p \quad (p > 1), \quad (2)$$

не могли описать S- или HS-режимы в задачах с линейной диффузией. Уравнения (2) всегда дают ярко выраженный LS-режим. С обширной литературой по уравнениям (2) можно ознакомиться по книге [1].

Основные качественные результаты, относящиеся к уравнению (1), приведены в гл. 4 книги [2]. Отметим, что неограниченное возрастание всюду решения при $\beta \in (1, 2)$ в краевой задаче в ограниченной области с условием Дирихле $u = 0$ на границе было впервые установлено в работе [3].

В дальнейшем в [4] было показано, что похожими свойствами обладает целый класс квазилинейных уравнений вида

$$u_t = \nabla \cdot (k(u)\nabla u) + \frac{u+1}{k(u)} \left(\int_0^u \frac{k(\eta)}{\eta+1} d\eta \right)^\alpha, \quad \alpha > 1, \quad (3)$$

где $k(u) \in C^1$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям

$$\int_0^\infty \frac{k(\eta)}{\eta+1} d\eta = \infty, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{k(u)}{k'(u)} = \infty. \quad (4)$$

Такой тип асимптотического поведения наблюдается также в краевых задачах [5–7].

Принципиальной математической трудностью исследования режимов с обострением для уравнений (1) и (3) является то, что асимптотика вблизи момента обострения, при $t \rightarrow T^-$, описывается уравнением первого порядка типа Гамильтона–Якоби. В частности, для (1) это будет следующее уравнение:

$$u_t = \frac{(u_x)^2}{1+u} + (1+u) \ln^\beta(1+u). \quad (5)$$

Автомодельные решения уравнения (5) становятся приближительными автомодельными решениями уравнения (1). Исследование такого асимптотического поведения требует привлечения специальной теории сингулярных возмущений. Для ряда задач такая теория была развита в [8]. Она устанавливает возможность перехода к пределу при $\tau \rightarrow \infty$ в абстрактных уравнениях в метрических пространствах X :

$$v_\tau = \mathbf{A}(v) + \mathbf{B}(\tau, v), \quad v(\tau) : X \rightarrow X, \quad (6)$$

где $\mathbf{B}(\tau, v)$ — асимптотически малое возмущение автономного оператора \mathbf{A} . Теорема устойчивости [8] устанавливает, что ω — предельное множество Ω_* автономного уравнения

$$v_\tau = \mathbf{A}(v) \quad (7)$$

в X является устойчивым к произвольным малым возмущениям $V(\tau, \cdot)$, если: (i) орбиты $\{v(\tau)\}$ компактны в X , (ii) возможен предельный переход $\tau \rightarrow \infty$ в возмущенном уравнении (6), т. е. если $v(\tau_j + s) \rightarrow \tilde{v}(s)$, то $\tilde{v}(s)$ удовлетворяет (7), и наконец, (iii) Ω_* — равномерно устойчиво по Ляпунову в метрике X . Отметим, что никаких условий на характер убывания возмущения $V(\tau, \cdot)$ (как, например, интегрируемость) не накладывается.

На основе теоремы [8] было доказано, что приближенные автомодельные решения, удовлетворяющие уравнению (5), устойчивы при $t \rightarrow T^-$ в случае S-режима [9]. Возмущенная бесконечномерная динамическая система здесь имеет вид

$$v_\tau = (v_x)^2 + v^2 - v + e^{-\tau} v_{xx}, \quad (8)$$

т. е. диффузия формирует при $\tau \rightarrow \infty$ экспоненциально малое (но сингулярное) возмущение. С использованием теории сравнения решения по пересечениям в [9] доказано, что решение локализовано на интервале длиной в точности равной 2π . Для более общих уравнений типа (3) теория равномерной устойчивости для уравнений типа Гамильтона–Якоби и применение теории сингулярных возмущений изложены в [10]. Практически техника [8–10] устанавливает возможность предельного перехода в достаточно произвольных параболических уравнениях, которые вырождаются в уравнения первого порядка типа Гамильтона–Якоби. Другой тип вырождения в полулинейные уравнения описан в [11].

Список литературы

1. Bebernes J., Eberly D. *Mathematical Problems from Combustion Theory* // App. Math. Sci. — Berlin; N. Y.: Springer-Verlag, 1989. — V. 83.
2. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987.
3. Lacey A. A. Global blow-up of a nonlinear heat equation // Proc. Roy. Soc. — Edinburgh, 1986. — No. 104A. — P. 161–167.
4. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А. О приближенных автомодельных решениях одного класса квазилинейных уравнений теплопроводности с источником // Матем. сб. — 1984. — Т. 124. — С. 163–188.
5. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Локализация процессов диффузии в средах с постоянными свойствами // ДАН СССР. — 1979. — Т. 247. — С. 349–353.
6. Галактионов В. А. О приближенных автомодельных решениях уравнений типа нелинейной теплопроводности // Диф. уравнения. — 1980. — № 16. — С. 1660–1676.
7. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Локализация тепла в нелинейных средах // Диф. уравнения. — 1981. — № 17. — С. 1826–1841.

8. Galaktionov V.A., Vazquez J.L. Asymptotic behaviour of nonlinear parabolic equations with critical exponents. A dynamical systems approach // J. Funct. Anal. — 1991. — V100. — P. 435–462.
9. Galaktionov V.A., Vazquez J.L. Regional blow-up in a semilinear heat equation with convergence to a Hamilton–Jacobi equation // SIAM J. Math. Anal. — 1993. — No. 24. — P. 1254–1276.
10. Galaktionov V.A., Vazquez J.L. Blow-up for quasilinear heat equations described by means of nonlinear Hamilton–Jacobi equations // J. Differ. Equat. — 1996. — V. 126. — P. 1–4.
11. Galaktionov V.A., Vazquez J.L. Extinction for a quasilinear heat equation with absorption. II. A dynamical systems approach // Comm. Partial Differ. Equat. — 1994. — No. 19. — P. 1107–1137.

В. А. Галактионов

О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями

В. А. Галактионов, С. А. Посашков

Излагается способ построения точных решений уравнений нелинейной теплопроводности с источником, которые сводятся к уравнениям с квадратичными нелинейностями, что позволяет найти их решения путем специального «разделения» независимых переменных. Основное внимание уделяется решениям, которые описывают необычные нелинейные эффекты и не могут быть найдены на основе групповых методов. Обсуждаются возможности применения данного метода к построению точных решений уравнений других типов и систем уравнений.

В работе предлагается способ построения новых точечных решений квазилинейных параболических уравнений нелинейной теплопроводности с источником, в частности, уравнений

$$u_t = u_{xx} + (1 + u) \ln^2(1 + u), \quad (1)$$

$$u_t = \nabla \cdot (|\nabla u| \nabla u) + u^2, \quad \nabla(\cdot) = \text{grad}_x(\cdot), \quad (2)$$

$$u_t = \nabla \cdot (e^u \nabla u) + e^{-u} (e^u - \gamma)^2, \quad \gamma = \text{const}; \quad (3)$$

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^{1-\sigma} (u^\sigma - \gamma)^2, \quad \sigma = \text{const} > 0, \quad (4a)$$

$$u_t = (u^{-1} u_x)_x + u^2, \quad u_t = (u^{-1} u_x)_x + (u^{-1} u_y)_y + u^2. \quad (4б)$$

Все эти, а также некоторые другие уравнения простыми заменами $u = F(v)$ (F — достаточно гладкая функция) сводятся к параболическим уравнениям для v с квадратичными нелинейностями, что позволяет найти их точные решения путем специального разделения временной

и пространственной координат следующего вида:

$$v(t, x) = \varphi(t) [\psi(t) + \theta(x)]. \quad (5)$$

Показано, что в ряде случаев функцию $\theta(x)$ можно выбрать так, что после подстановки выражения (5) в соответствующее параболическое уравнение для функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$ получается система двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Большинство из построенных таким способом решений не являются инвариантными с точки зрения групп точечных преобразований и групп Ли–Беклунда (см. [1–3], где наиболее подробно изложены результаты групповой классификации параболических уравнений $u_t = \nabla \cdot (k(u)\nabla u) + Q(u)$ общего вида). Применяемый способ «разделения переменных» впервые реализован в работе [4] при построении точного решения уравнения $u_t = (u^\sigma u_x)_x - u^{\sigma+1}$ (см. также [5], где рассматривалось уравнение (4а) при $\gamma = 0$).

§ 1. Уравнение вида $v_t = v_{xx} + (v_x)^2 + v^2$.

Пример 1. Полулинейное параболическое уравнение с источником

$$u_t = u_{xx} + (1 + u) \ln^2(1 + u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (6)$$

которое описывает ряд интересных нелинейных эффектов [6, с. 274] (заменой $u = \exp v - 1$ оно сводится к уравнению, указанному в названии параграфа), имеет точное решение

$$u(t, x) = \exp \{ \varphi(t) [\psi(t) + \cos x] \} - 1, \quad (7)$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\varphi' = -\varphi + 2\varphi^2\psi, \quad \psi' = \psi + \varphi - \varphi\psi^2, \quad t > 0. \quad (8)$$

1.1. *Схема «разделения переменных».* Рассмотрим подробнее метод построения точного решения (7). После замены $v = \ln(1 + u)$ уравнение (6) преобразуется к виду

$$v_t = v_{xx} + (v_x)^2 + v^2, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1. \quad (9)$$

Если подставить в это уравнение выражение (5) и сгруппировать линейные и квадратичные по θ члены, то получается равенство

$$[(\varphi\psi)' - \psi^2\varphi^2] + (\varphi' - 2\varphi^2\psi)\theta(x) - \varphi\theta_{xx}(x) - \varphi^2[\theta_x^2(x) + \theta^2(x)] = 0, \quad (10)$$

которое состоит из четырех не связанных друг с другом членов (здесь и далее штрих означает дифференцирование по t). Попробуем найти такую функцию $\theta(x)$, чтобы (10) не содержало старшей производной θ_{xx}

и нелинейного (квадратичного) по θ выражения. Этого можно достичь, например, если $\theta(x)$ одновременно удовлетворяет двум уравнениям:

$$\theta_{xx} = \mu_1\theta + \mu_2, \quad \theta_x^2 + \theta^2 = \nu_1\theta + \nu_2$$

хотя бы при одном наборе постоянных $\mu_i, \nu_i, i = 1, 2$. Такое решение существует при $\mu_1 = -1, \mu_2 = \nu_1 = 0, \nu_2 = 1$ и имеет вид $\theta(x) = \cos x$. Тогда, очевидно, (10) тождественно выполняется, если функции φ, ψ таковы, что

$$[(\varphi\psi)' - \varphi^2\psi^2 - \varphi^2] + (\varphi' - 2\varphi^2\psi + \varphi) \cos x = 0,$$

и, следовательно, (5) при $\theta(x) = \cos x$ является точным решением уравнения (9), если

$$(\varphi\psi)' - \varphi^2\psi^2 - \varphi^2 = 0, \quad \varphi' - 2\varphi^2\psi + \varphi = 0, \quad t > 0.$$

Эта система эквивалентна (8).

1.2. *Эволюционные свойства решения.* Рассмотрим кратко свойства точного решения

$$v(t, x) = \varphi(t) [\psi(t) + \cos x] \quad (11)$$

уравнения (9), где φ, ψ удовлетворяют (8). Поле фазовых кривых системы (8) на плоскости (φ, ψ) схематически изображено на рис. 1. Все траектории начинаются при $\varphi = +\infty, \psi = -1 + 0$, что отвечает моменту времени $t = 0^+$, причем решение (11) имеет следующую асимптотику при $t \rightarrow 0^+$:

$$v(t, x) \approx \frac{\cos x - 1}{2t} \left[1 - \frac{t}{2} \ln t - \frac{t}{2} \left(\frac{1}{2} + \ln 2 - 2C \right) \right] + \frac{1}{2} [-\ln t + 2C - \ln 2], \quad (12)$$

где C — произвольная постоянная. Таким образом, начальная функция $v(0, x)$ почти всюду равна $-\infty$, а в точках, где $\cos x = 1, v(t, x) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow 0^+$. Постоянная C в (12) «управляет» дальнейшей эволюцией решения. На рис. 1 отмечено три типа траекторий: S_1, S_2, S_3 .

Траектории S_1 . Из рис. 1 видно, что с течением времени начинает выполняться неравенство $\psi \geq 1$, т. е. в соответствии с (11) решение $v(t, x)$ становится положительным. Анализ системы (8) показывает, что оно существует конечное время $T_0 = T_0(C) > 0$, причем

$$v(t, x) \approx [2(T_0 - t)^{-1}] [1 + \cos x - (T_0 - t) \ln (T_0 - t)^2], \quad t \rightarrow T_0^-.$$

Из этого, в частности, следует, что $(T_0 - t)v(t, x) \rightarrow \theta_a(x) \equiv \cos^2(x/2)$ при $t \rightarrow T_0^-$ равномерно в \mathbb{R}^1 . Тем самым $v(t, x)$ асимптотически сходится к функции $v_a = (T_0 - t)^{-1}\theta_a(x)$, которая, как нетрудно прове-

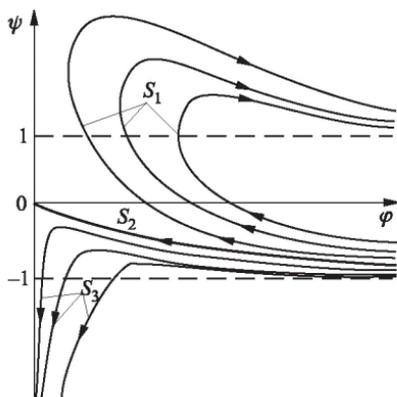


Рис. 1

ритель, является обобщенным решением уравнения Гамильтона–Якоби $(v_a)_t = (v_a)_x^2 + v_a^2$, т.е. v_a — приближенное автомодельное решение уравнения (9) (см. [6, гл. VI]). Обратной заменой $v_a = \ln(1 + u_a)$ оно преобразуется в уравнение

$$(u_a)_t = \frac{(u_a)_x^2}{1 + u_a} + (1 + u_a) \ln^2(1 + u_a). \tag{13}$$

Таким образом, точное решение (7) типа S_1 наглядно иллюстрирует эффект «вырождения» при $t \rightarrow T_0^-$ параболического уравнения (6) в уравнение первого порядка (13). Отметим, что в общем случае проблема сходимости $u \rightarrow u_a$ при $t \rightarrow T_0^-$ в специальной норме остается открытой; в краевой задаче для уравнения без источника эффект вырождения доказан в [6, с. 346].

Траектория S_2 . Этой траектории отвечает решение с асимптотикой $v(t, x) \approx 2Ce^{-t}(\cos x - Ce^{-t}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, т.е. в определенном смысле $v(t, x)$ близко к решению $v_a = 2Ce^{-t} \cos x$ уравнения теплопроводности $(v_a)_t = (v_a)_{xx}$.

Траектория S_3 . Траекториям из этого семейства отвечают глобальные решения $v(t, x) \approx -Ct^{-2}e^{-t}(\cos x + te^t/C) \rightarrow 0^-$ при $t \rightarrow +\infty$. Очевидно, здесь $v(t, x) \approx v_a(t) = -1/t$ при $t \rightarrow +\infty$, где v_a — пространственно однородное решение уравнения $(v_a)_t = v_a^2$.

1.3. *Другие уравнения подобного вида.* Пример 2. Уравнение со стоком

$$u_t = u_{xx} - (1 + u) \ln^2(1 + u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

заменой $u = \exp v - 1$ сводится к такому: $v_t = v_{xx} + v_x^2 - v^2$. Если искать его решение в виде (5), то по той же схеме разделения переменных получаем $\theta(x) = \operatorname{ch} x$, а φ, ψ удовлетворяют системе $\varphi' = \varphi - 2\varphi^2\psi$, $\psi' = -\psi - \varphi + \varphi\psi^2$ (ср. с (8)).

Пример 3. Уравнение с младшим членом более общего вида

$$u_t = u_{xx} + (1 + u) [\ln^2(1 + u) + \alpha \ln(1 + u) + \beta],$$

где α, β — произвольные постоянные, имеет точное решение (7), где $\varphi' = \varphi(\alpha - 1) + 2\varphi^2\psi$, $\psi' = \psi + \varphi - \varphi\psi^2 + \beta/\varphi$. Поле эволюционных траекторий этой системы сложнее, чем приведенное на рис. 1. Например, в случае $\alpha = 0$ и $\beta < -1/4$ на нем появляются новые особые точки, которым отвечают пространственно неоднородные стационарные решения.

Замечание 1. В работе [3, с.132] приведено двухпараметрическое семейство инвариантных решений уравнения $u_t = \Delta u + u \ln u$. Нетрудно показать, что оно может быть найдено с использованием применявшейся выше схемы разделения переменных. После замены $u = \exp v$ получается уравнение $v_t = \Delta v + |\nabla v|^2 + v$, причем семейство точных решений [3] определяется в соответствии с (5) при $\theta(x) = |x|^2$.

§ 2. Уравнение вида $v_t = \nabla \cdot (|\nabla v| \nabla v) + v^2$.

Пример 4. Уравнение с квадратичными нелинейностями

$$v_t = \nabla \cdot (|\nabla \cdot v| \nabla v) + v^2, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (14)$$

имеет точное решение

$$v(t, x) = [t(Ct + 1)]^{-1} [-(1 + Ct) + \theta(x)], \quad (15)$$

где C — произвольная постоянная, а функция $\theta(x)$ — обобщенное решение квазилинейного эллиптического уравнения

$$\nabla \cdot (|\nabla \theta| \nabla \theta) + \theta^2 = \theta, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (16)$$

2.1. *Построение точного решения.* Отметим, что подобные (14) параболические вырождающиеся уравнения с градиентной нелинейностью часто встречаются в приложениях; математические аспекты теории таких уравнений отражены в библиографии, приведенной, например, в [7] и [6]. Если искать решение в виде (15), то после подстановки (15) в уравнение получаем равенство

$$((\varphi\psi)' - \varphi^2\psi^2) + (\varphi' - 2\varphi^2\psi)\theta(x) - \varphi^2 [\nabla \cdot (|\nabla \theta| \nabla \theta) + \theta^2](x) = 0. \quad (17)$$

В отличие от предыдущего случая, здесь достаточно выполнить лишь одно условие на θ , например, (16), что приведет, в соответствии с (17), к системе ОДУ $\varphi' = \varphi^2 + 2\varphi^2\psi$, $(\varphi\psi)' = \varphi^2\psi^2$, которая легко интегрируется, и в результате получим точное решение (15).

Несколько слов об уравнении (16). При $N = 1$ его обобщенное неотрицательное финитное решение построено в [8]. Для случая $N > 1$ существование финитного решения $\theta = \theta(|x|) \geq 0$ устанавливается на основе техники из [6, гл. IV, § 1] с использованием результатов [9].

2.2. *Об эволюционных свойствах решения.* Если рассматривать (15) как решение задачи Коши для (14), то соответствующая начальная функция будет иметь вид

$$v(0, x) = \begin{cases} -\infty & \text{всюду, где } \theta(x) < 1, \\ -C & \text{всюду, где } \theta(x) = 1, \\ +\infty & \text{всюду, где } \theta(x) > 1. \end{cases}$$

Таким образом, все эти начальные функции при различных значениях параметра C отличаются своим поведением на множестве меры нуль в \mathbb{R}^N . Тем не менее, асимптотические свойства решения (15) могут быть самыми различными. В частности, при $C \geq 0$ оно является глобальным и $v \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ всюду в \mathbb{R}^N , а при $C < 0$ — неограниченным и существует на интервале времени $0 < t < T_0 = -1/C$, причем, как следует из (15), $(T_0 - t)v(t, x) \rightarrow \theta(x)$ при $t \rightarrow T_0^-$ равномерно в \mathbb{R}^N . При $N = 1$ это подтверждает результаты [8] об асимптотической устойчивости автомодельного решения $u_a \equiv (T_0 - t)^{-1}\theta(x)$ уравнения (14).

Замечание 2. Тем же способом можно построить точные решения параболических уравнений более общего вида:

$$v_t = \nabla \cdot (|\nabla v| \nabla v) \pm v^2 + \alpha v + \beta,$$

$$v_t = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \pm v^2 + \alpha v + \beta,$$

где α, β — произвольные постоянные.

§ 3. Уравнение вида $v_t = (\gamma + v)\Delta v + v^2$.

Пример 5. Уравнение (3) имеет точное решение

$$u(t, x) = \ln \{ \gamma + e^{-\gamma t} (C - t)^{-1} [e^{\gamma t} + \theta(x)] \}, \quad (18)$$

где C — произвольная постоянная и функция $\theta(x)$ удовлетворяет линейному эллиптическому уравнению

$$\Delta \theta + \theta = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (19)$$

($\theta(x) = \cos x$ при $N = 1$). Отметим, что при $\gamma = 0$ уравнение (3) обладает богатым набором симметрий [3, с. 110]. При $\gamma \neq 0$ решение (18), по всей видимости, не является инвариантно-групповым.

Подчеркнем, что в случае $C > 0$ решение (18) является неограниченным и существует на ограниченном промежутке времени $(0, C)$.

Пример 6. Уравнение с более сложным, чем в (3), источником

$$u_t = \nabla \cdot (e^u \nabla u) + e^{-u} [(e^u - \gamma)^2 + \alpha(e^u - \gamma) + \beta], \quad \alpha, \beta = \text{const},$$

заменой $u = \ln(\gamma + v)$ преобразуется к уравнению с квадратичными нелинейностями

$$v_t = (\gamma + v)\Delta v + v^2 + \alpha v + \beta.$$

Если искать его точное решение в виде (5) и потребовать, чтобы $\theta(x)$ удовлетворяла уравнению (19), то для функций φ, ψ получается система

$$(\varphi\psi)' = \varphi^2\psi^2 + \alpha\varphi\psi + \beta, \quad \varphi' = (\alpha - \gamma)\varphi + \varphi^2\psi,$$

которая интегрируется. Например, при $\alpha = 0, \beta > 0$ получаем такие функции:

$$\varphi(t) = \frac{\exp(-\gamma t)}{\cos(\beta^{1/2}t)}, \quad \psi(t) = \beta^{1/2} \exp(\gamma t) \sin(\beta^{1/2}t).$$

Пример 7. Приведем в заключение два точных решения двумерного уравнения с «анизотропной» нелинейной теплопроводностью:

$$v_t = v_{xx} + v v_{yy} + v^2, \quad t > 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Неограниченные решения, которые могут быть построены тем же способом, имеют вид

$$v(t, x, y) = (T_0 - t)^{-1} e^{-t} [e^t + \cos x \cos y],$$

$$v(t, x, y) = (T_0 - t)^{-1} e^t [e^{-t} + \operatorname{ch} x \cos y], \quad T_0 = \text{const} > 0.$$

Они определены на конечном промежутке времени $t \in (0, T_0)$.

§ 4. Уравнение вида $v_t = (\gamma + v)v_{xx} + \sigma^{-1}(v_x)^2 + \sigma v^2$.

Пример 8. Уравнение (4а), которое заменой $u = (\gamma + v)^{1/\sigma}$ сводится к уравнению с квадратичными нелинейностями

$$v_t(\gamma + v)v_{xx} + \sigma^{-1}(v_x)^2 + \sigma v^2,$$

имеет формальное точное решение

$$u(t, x) = \{\gamma + \varphi(t) [\psi(t) + \cos(\lambda x)]\}^{1/\sigma}, \quad \lambda = \sigma(\sigma + 1)^{-1/2}, \quad (20)$$

где функции φ, ψ удовлетворяют системе ОДУ:

$$(\varphi, \psi)' = \frac{\sigma}{\sigma + 1} \varphi^2 + \sigma \varphi^2 \psi^2, \quad \varphi' = -\frac{\gamma \sigma^2}{\sigma + 1} \varphi + \frac{\sigma(\sigma + 2)}{\sigma + 1} \varphi^2 \psi.$$

4.1. Построение точного решения при $\gamma = 0$ и его свойства. Рассмотрим подробнее случай $\gamma = 0, \sigma = \text{const} > 0$, когда (4а) имеет вид

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^{\sigma+1}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1. \quad (21)$$

Это так называемое уравнение S-режима горения нелинейной среды (см. [6, гл. IV] и библиографию). Заменой $u = v^{1/\sigma}$ оно сводится к уравнению

$$v_t = vv_{xx} + \sigma^{-1}(v_x)^2 + \sigma v^2, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (21')$$

с квадратичными нелинейностями, что позволяет искать его точное решение в виде (5). Тогда подходящей функцией θ будет $\theta(x) = \cos(\lambda x)$, $\lambda = \sigma(\sigma + 1)^{-1/2}$, и в результате получаем следующее точное неотрицательное решение уравнения (21) (см. [5], ср. с [4]):

$$u(t, x) = \{\varphi(t) [\psi(t) + \cos(\lambda x)]\}_+^{1/\sigma} \geq 0 \quad (22)$$

на интервале $|x| < L_s/2 \equiv \pi(\sigma + 1)^{1/2}$ и $u \equiv 0$ вне него, где функции φ, ψ удовлетворяют системе ОДУ:

$$\varphi' = \frac{\sigma(\sigma + 2)}{\sigma + 1} \varphi^2 \psi, \quad \psi' = \frac{\sigma}{\sigma + 1} \varphi(1 - \psi^2). \quad (23)$$

В (22) используется обозначение $\{z\}_+ = \max\{0, z\}$. По своим дифференциальным свойствам (22) является обобщенным решением (см. [7] и [6, гл. I]).

Порядок системы (23) понижается: $\varphi(t) = C |\psi^2(t) - 1|^{-(\sigma+2)/2}$, где $C > 0$ — постоянная, и в результате получаем относительно ψ уравнение

$$\psi' = \frac{\sigma}{\sigma + 1} C |\psi^2 - 1|^{-(\sigma+2)/2} (1 - \psi^2), \quad \psi \geq -1, \quad (23')$$

две интегральные траектории которого изображены на рис. 2. Траектория S_1 отвечает решению (22) с сингулярной начальной функцией:

$$u(t, x) \rightarrow E_0 \delta(x) \quad \text{при } t \rightarrow 0^+, \quad E_0 = E_0(\sigma, C) > 0,$$

в слабом смысле, которое является неограниченным и существует на интервале $t \in (0, T_0)$, $\delta(x)$ — обозначение дельта-функции; здесь $T_0 = (\sigma + 1)B((\sigma + 2)/\sigma, 1/2)(\sigma C)^{-1}$, $B(p, q)$ — обозначение бета-функции. При этом $u(t, x) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow T_0^-$ на интервале $(-L_s/2, L_s/2)$.

Траектории S_2 на рис. 2 также отвечает неограниченное решение, но здесь $u(t, x) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow T_0^-$ всюду в \mathbb{R}^1 . Более подробно эволюционные свойства решения (22), (23) охарактеризованы в [5].

Пример 9. Уравнение с источником более общего, чем в (4а), вида

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^{1-\sigma} \left[(u^\sigma - \gamma)^2 + \frac{\alpha}{\sigma} (u^\sigma - \gamma) + \frac{\beta}{\sigma} \right] \quad (24)$$

заменой $u = (\gamma + u)^{1/\sigma}$ сводится к уравнению с квадратичными нелинейностями, которое близко по виду к (21'). Поэтому (24) имеет точное решение (20), где φ, ψ удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} (\varphi\psi)' &= \frac{\sigma}{\sigma + 1} \varphi^2 + \sigma \varphi^2 \psi^2 + \alpha \varphi \psi + \beta, \\ \varphi' &= -\frac{\gamma \sigma^2}{\sigma + 1} \varphi + \frac{\sigma(\sigma + 2)}{\sigma + 1} \varphi^2 \psi + \alpha \varphi. \end{aligned}$$

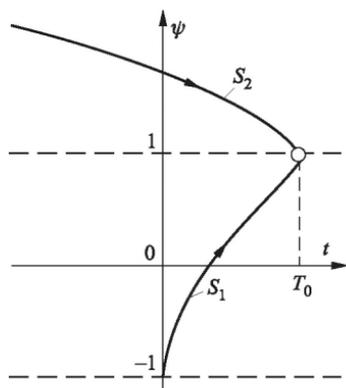


Рис. 2

Пример 10. Вырождающееся параболическое уравнение без источника $u_t = (u^\sigma u_x)_x$, $\sigma > 0$, имеет точное решение

$$u(t, x) = \begin{cases} \{(T_0 - t)^{-1} [(1 - x/x_0)^2 - (1 - t/T_0)^{2/(\sigma+2)}]\}^{1/\sigma} \\ \text{при } x \leq x_*(t) = x_0 [1 - (1 - t/T_0)^{1/(\sigma+2)}]; \\ 0 \text{ при } x > x_*(t), \quad t \in [0, T_0), \end{cases}$$

где $x_0 = [2(\sigma + 2)/\sigma]^{1/2}$ и $T_0 > 0$ — время существования неограниченного решения. Это решение является инвариантным, но может быть легко построено методом разделения переменных (при этом $\theta(x) = (1 - x/x_0)^2$ в (5)). Оно наглядно описывает локализацию режима с обострением: фронт волны движется вправо по закону $x = x_*(t)$, однако возмущения далее точки $x = x_0$ не проникают, несмотря на неограниченный рост $u(t, x)$ при $t \rightarrow T_0^-$ в каждой точке $x < x_0$. Близкое по виду точное решение рассматривалось с иных позиций в [10].

4.2. Точные решения при $\sigma = -1$. В [11] (см. также [6, с. 107]) приведено интересное неинвариантное решение уравнения нелинейной теплопроводности с источником специального вида:

$$u_t = (u^\sigma u_x)_x + \delta u^{1-\sigma}, \quad \sigma \neq 0, \quad \delta = \text{const}. \quad (25)$$

Заменой $v = u^\sigma$ оно сводится к уравнению с квадратичными нелинейностями

$$v_t = vv_{xx} + \sigma^{-1}(v_x)^2 + \sigma\delta$$

и поэтому допускает построение точного решения вида (5), причем решению [11] отвечает функция $\theta(x) = x^2$.

В случае $\sigma = -1$, когда (25) имеет вид

$$u_t = (u^{-1}u_x)_x + \delta u^2, \quad (26)$$

существуют другие возможности выбора нетривиальной функции $\theta(x)$.

Пример 11. Уравнение (26) имеет точное решение

$$u(t, x) = \{\varphi(t) [\psi(t) + \cos x]\}^{-1},$$

где

$$\psi(t) = \pm [1 + 2\delta \ln |\varphi(t)|\varphi^{-2}(t) + C\varphi^{-2}(t)]^{1/2},$$

C — произвольная постоянная и $\varphi(t)$ — решение ОДУ $\varphi' = -\varphi^2\psi$.

Пример 12. Другое точное решение уравнения (26):

$$u(t, x) = \{\varphi(t) [\psi(t) + \operatorname{ch} x]\}^{-1},$$

$$\psi(t) = \pm [1 - 2\delta \ln |\varphi(t)|\varphi^{-2}(t) + C\varphi^{-2}(t)]^{1/2},$$

$$C = \text{const}, \quad \varphi' = \varphi^2\psi.$$

Любопытные точные решения удается построить для двумерного аналога уравнения (26):

$$u_t = (u^{-1}u_x)_x + (u^{-1}u_y)_y + \delta u^2. \quad (27)$$

Отметим, что при $\delta = 0$ случай $\sigma = -1$ является особым с точки зрения групповой теории [3, с. 114] (уравнение (27) при $\delta = 0$ допускает бесконечномерную группу преобразований). Заменой $u = 1/v$ соотношение (27) сводится к уравнению с квадратичными нелинейностями $v_t = v(v_{xx} + v_{yy}) - (v_x^2 + v_y^2) - \delta$, к которому применима схема разделения переменных.

Пример 13. Уравнение (27) имеет решение

$$u(t, x, y) = \{\varphi(t) [\psi(t) + \cos x + P(t) \operatorname{ch} y]\}^{-1},$$

где функции φ, ψ, P удовлетворяют системе ОДУ:

$$(\varphi\psi)' = -\delta + \varphi^2(P^2 - 1), \quad \varphi' = -\varphi^2\psi, \quad (\varphi P)' = \varphi^2\psi P.$$

Пример 14. Если искать решение уравнения (27) в виде

$$u(t, x, y) = \{\varphi(t) [\psi(t) + \cos 2x + P(t) e^{2y} + \Phi(t) e^y \cos x]\}^{-1},$$

то для четырех функций φ, ψ, P, Φ получается следующая система ОДУ:

$$\begin{aligned} (\varphi\psi)' &= -4\varphi^2 - \delta, & \varphi' &= -4\delta\varphi^2\psi, \\ (\varphi P)' &= 4\varphi^2\psi P - \varphi^2\Phi^2, & (\varphi\Phi)' &= -4\varphi^2\Phi. \end{aligned}$$

§ 5. Уравнения высших порядков, гиперболические уравнения, системы.

5.1. *Параболические уравнения высших порядков.* Пример 15. Уравнение

$$v_t = (-1)^{m+1}(\partial^2/\partial x^2)^m v + v_x^2 + v$$

при любом $m = 1, 2, \dots$ является параболическим уравнением $2m$ -го порядка. Оно имеет точное решение (11), где φ, ψ удовлетворяют системе (8), т. е. это точное решение не зависит от m .

Пример 16. Если добавить к оператору уравнения развития диффузионных неустойчивостей ламинарного фронта горения (см., например, [12]) квадратичный источник, то получится параболическое уравнение четвертого порядка,

$$v_t = -v_{xxxx} - v_{xx} - (v_x)^2 + v^2, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (28)$$

которое имеет решение $v(t, x) = \varphi(t)[\psi(t) + \text{ch } x]$, где φ, ψ — решение системы

$$(\varphi\psi)' = \varphi^2 + \varphi^2\psi, \quad \varphi' = -2\varphi + 2\varphi^2\psi.$$

Пример 17. Если рассмотреть близкое к (28) уравнение со стоком

$$v_t = -v_{xxxx} - v_{xx} - (v_x)^2 - v^2, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

то его точное неограниченное периодическое по x решение имеет вид $v(t, x) = (t^2 - 1)^{-1}(t + \cos x)$. Отметим, что оно одновременно является решением уравнения Гамильтона–Якоби $v_t = -(v_x)^2 - v^2$.

Пример 18. В теории аномального термокапиллярного эффекта возникает параболическое уравнение $v_t = -v_{xxxx} - v_{xx} - (v^2)_{xx}$ (см. [13]). Если добавить к оператору в правой части квадратичный источник:

$$v_t = -v_{xxxx} - v_{xx} - (v^2)_{xx} + v^2, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

то полученное уравнение допускает точное решение $v(t, x) = \varphi(t)[\psi(t) + \text{ch}(x/2)]$, где

$$(\varphi\psi)' = \varphi^2/2 + \varphi^2\psi^2, \quad \varphi' = -5\varphi/16 + 3\varphi^2\psi/2.$$

5.2. *Уравнение третьего порядка.*

Пример 19. Применяя схему разделения переменных в несколько измененном виде к уравнению третьего порядка

$$v_t = v_{xxx} + (v_x)^2 + v^2, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

нетрудно найти его точное решение довольно необычного вида:

$$v(t, x) = \varphi(t)[\psi(t) + \cos(t - x)],$$

где $(\varphi\psi)' = \varphi^2 + \varphi^2\psi^2$, $\varphi' = 2\varphi^2\psi$.

5.3. *Гиперболические уравнения.* Тем же методом нетрудно построить точные решения «гиперболических аналогов» уравнений, рассмотренных в § 1–4, когда v_t заменяется на v_{tt} .

Пример 20. Функция (11) является точным решением полулинейного гиперболического уравнения

$$v_{tt} = v_{xx} + (v_x)^2 + v^2, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

если φ, ψ удовлетворяет системе ОДУ:

$$(\varphi\psi)'' = \varphi^2 + \varphi^2\psi^2, \quad \varphi'' = -\varphi + 2\varphi^2\psi.$$

Пример 21. Аналогично, точное решение квазилинейного уравнения

$$v_{tt} = vv_{xx} + \sigma^{-1}(v_x)^2 + \sigma v^2, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \sigma > 0,$$

имеет вид $v(t, x) = \varphi(t)[\psi(t) + \cos(\lambda x)]$, $\lambda = \sigma(\sigma + 1)^{-1/2}$, где

$$(\varphi\psi)'' = \frac{\sigma}{\sigma+1}\varphi^2 + \sigma\varphi^2\psi^2, \quad \varphi'' = \frac{\sigma(\sigma+2)}{\sigma+1}\varphi^2\psi.$$

5.4. Параболические системы квазилинейных уравнений.

Пример 22. Эта система составлена из уравнений, по своим нелинейностям похожих на те, которые рассматривались в § 1:

$$u_t = u_{xx} + (v_x)^2 + v^2, \quad v_t = v_{xx} - (u_x)^2 - u^2, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

Поэтому точное решение естественно искать в виде $u(t, x) = \varphi_1[\psi_1 + \cos x]$, $v(t, x) = \varphi_2[\psi_2 + \cos x]$, а тогда для функций $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$, $i = 1, 2$, получаем систему

$$\begin{aligned} (\varphi_1\psi_1)' &= \varphi_2^2 + (\varphi_2\psi_2)^2, & \varphi_1' &= -\varphi_1 + 2\varphi_2^2\psi_2, \\ (\varphi_2\psi_2)' &= -\varphi_1^2 - (\varphi_1\psi_1)^2, & \varphi_2' &= -\varphi_2 - 2\varphi_1^2\psi_1. \end{aligned}$$

Пример 23. Вторая система является более искусственной:

$$v_t = v_{xx} + u_x v_x + uv, \quad u_t = uu_{xx} + \sigma^{-1}(u_x)^2 + \sigma u^2 + \alpha v,$$

где $\alpha, \sigma > 0$ — постоянные. По структуре своих нелинейностей эти два уравнения близки к рассмотренным в § 1 и § 4 соответственно. Поэтому точное решение следует искать в виде (см. (11) и (22)) $v(t, x) = \varphi_1[\psi_1 + \cos x]$, $u(t, x) = \varphi_2[\psi_2 + \cos(\lambda x)]$, а тогда требование $\lambda \equiv \sigma(\sigma + 1)^{-1/2} = 1$ определяет единственное значение $\sigma = (1 + \sqrt{5})/2 > 0$, при котором возможно построение точного решения. При этом возникает система ОДУ:

$$\begin{aligned} (\varphi_1\psi_1)' &= \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2\psi_1\psi_2, & \varphi_1' &= -\varphi_1 + \varphi_1\varphi_2\psi_2 + \varphi_1\varphi_2\psi_1, \\ (\varphi_2\psi_2)' &= \sigma^{-1}\varphi_2^2 + \sigma\varphi_2^2\psi_2^2 + \alpha\varphi_1\psi_1, & \varphi_2' &= -\varphi_2^2\psi_2 + 2\sigma\varphi_2^2\psi_2 + \alpha\varphi_1. \end{aligned}$$

Авторы благодарны В. А. Дородницыну, С. И. Похожаеву и С. Р. Свирщевскому за неоднократные полезные обсуждения и замечания.

Журнал вычислительной математики
и математической физики. 1989. Т. 29, № 4

Поступила
06.06.1988

Список литературы

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
2. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983.
3. *Галактионов В. А., Дородницын В. А., Еленин Г. Г. и др.* Квазилинейное уравнение с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры // *Соврем. проблемы математики. Новейшие достижения. Итоги науки и техники.* — М.: ВИНТИ АН СССР, 1986. — С. 95–206.
4. *Bertsch M., Kersner R., Peletier L. A.* Positivity versus localization in degenerate diffusion equations // *Nonlinear Analys., Theory, Meth. and Appl.* — 1985. — V. 9. — P. 987–1008.
5. *Галактионов В. А., Посашков С. А.* Неограниченное точное решение уравнения нелинейной теплопроводности с источником // *Препринт ИМП АН СССР.* — М., 1988. — № 42. — 15 с.
6. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987.
7. *Калашников А. С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // *УМН.* — 1987. — Т. 42, вып. 2. — С. 135–176.
8. *Галактионов В. А.* Об условиях несуществования в целом и локализации решений задачи Коши для одного класса нелинейных параболических уравнений // *ЖВМиМФ.* — 1983. — Т. 23, № 6. — С. 1341–1345.
9. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Посашков С. А., Самарский А. А.* Квазилинейное параболическое уравнение со сложным спектром неограниченных автомодельных решений // *Матем. моделирование. Процессы в нелинейных средах.* — М.: Наука, 1986. — С. 142–182.
10. *Benilan P., Crandall M. G., Pierre M.* Solutions of the porous medium equation in R^N under optimal conditions on initial values // *Indiana Univ. Math. J.* — 1984. — V. 33. — P. 51–87.
11. *Кершнер Р.* О некоторых свойствах обобщенных решений квазилинейных вырождающихся параболических уравнений // *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* — 1978. — V. 32, No. 3–4. — P. 301–330.
12. *Human M., Nicolaenko B.* The Kuramoto–Sivashinsky equation: a bridge between PDE's and dynamic systems // *Physica D.* — 1986. — V. 18. — P. 113–126.
13. *Пухначев В. В.* Термокапиллярная конвекция в слабых силовых полях // *Препринт № 178-88.* — Новосибирск: Ин-т теплофиз. СО АН СССР, 1988. — 45 с.

Основная идея приведенной выше работы связана с попыткой осмысления того, как простые алгебраические идеи могут быть применены к построению новых точных решений уравнений математической физики с квадратичными нелинейностями.

Как известно, филигранное использование точных, автомодельных или инвариантных решений в исследованиях нелинейных явлений присуще всей многогранной деятельности С. П. Курдюмова. Можно только удивляться, как много он может извлечь из сравнительно простых точных решений. Кстати, вся математическая теория локализации теплопроводности и горения возникла из двух решений уравнения нелинейной теплопроводности: это решение Самарского–Соболя (четкая интерпретация дана в статье 1963 г.) и решение, построенное в работе А. А. Самарского, Н. В. Змитренко, С. П. Курдюмова и А. П. Михайлова в 1976 г. Поэтому не случайно, что в группе С. П. Курдюмова пользовались популярностью не только групповые методы, развиваемые В. А. Дородницыным (см. статью настоящего сборника), но и другие, более эвристические «нелинейные» подходы; последние привели к ряду исследований, которые кратко отражены ниже. Основным импульсом для такого рода деятельности послужило специальное решение уравнения нелинейной теплопроводности с поглощением:

$$u_t = (u u_x)_x - u^{1-\sigma}, \quad \sigma \in (0, 1), \quad (1)$$

построенное Р. Кершнером в середине семидесятых, когда он был аспирантом А. С. Калашникова (а до этого студентом С. Н. Кружкова) на мехмате МГУ. Оказалось, что это решение, описывающее необычные нелинейные явления полного остывания и поворота теплового фронта, не укладывается ни в какую групповую теорию.

Откуда же берется такое решение? (Немного позднее появилось еще одно решение для уравнения (1) с источником, $+u^{1+\sigma}$, имеющее странное неинвариантное решение.) Этот вопрос привел к данной работе, посвященной некоторым видам эволюционных уравнений и систем типа

$$u_t = A(u), \quad (2)$$

где A — квадратичный дифференциальный оператор по u . Новые решения строятся в двучленном виде:

$$u(x, t) = C_0(t) + C_1(t) \theta(x), \quad (3)$$

где выбор функции θ осуществляется на основе «нелинейного разделения переменных» (термин, введенный позднее П. Олвером [1] по отношению к решениям типа (3)), и тогда все сводится к двумерной динамической системе на коэффициенты $\{C_0(t), C_1(t)\}$. Заметим, что такие системы не всегда решаются в элементарных функциях. Очевидно, что (3) имеет явную групповую подоплеку:

если $C_0 \equiv 0$, то решение

$$u(x, t) = C_1(t) \theta(x) \quad (4)$$

есть решение в разделяющихся переменных с очевидным групповым содержанием. Решения типа (3) имеют целый ряд приложений в теории режимов с обострением в задачах горения, они гораздо более широкие, чем простые групповые решения, а значит, описывают новые явления (см. [2–6], где существенно используется техника сравнения решений по пересечениям, также отраженная в настоящем сборнике).

С другой стороны, решения (3) трактуются как решения на двумерном подпространстве

$$W_2 = \text{Span} \{1, \theta(x)\},$$

инвариантном относительно стационарного оператора \mathbf{A} в уравнении (2): $\mathbf{A}(W_2) \subseteq W_2$. Концепция линейных подпространств, инвариантных относительно нелинейных операторов, оказалась весьма плодотворной и позволила построить целый ряд новых неинвариантных решений нелинейных уравнений математической физики [2, 7]. Существование инвариантного подпространства W_k гарантирует, что уравнение, «суженное» на него, становится k -мерной динамической системой.

Естественная идея инвариантных множеств M на подпространстве W_k : $\mathbf{A}(u) \in W_k$ для любых $u \in M$ ведет к переопределенным динамическим системам, которые могут быть разрешимыми [8] (см. также отдельные примеры в [9]). Общие алгебраические вопросы нелинейного разделения переменных и инвариантных пространств рассматриваются в [10, 11]. Примеры многомерных инвариантных подпространств для уравнений со многими независимыми переменными можно найти в [7, 8, 12, 14]. В частности, в [12] приведены точные решения, которые описывают существенно несимметричное обострение решений нелинейной теплопроводности с источником и быстрой диффузией. В [14] многомерные решения на инвариантных подпространствах построены для моделей турбулентности. Для уравнений пористой среды решения, соответствующие одному из инвариантных линейных подпространств из [7], были построены в [15] и [17]. В работе [16] получены некоторые обобщения решений на инвариантных подпространствах из [1].

Интересные законченные результаты по инвариантным пространствам для одномерных уравнений получены С. Р. Свирицевским в [18, 19]. Показано, что «обратная задача» теории инвариантных пространств об отыскании всех нелинейных операторов, допускающих заданное инвариантное подпространство, сводится к проблеме симметрии Ли–Беклунда для линейных дифференциальных операторов (отметим, что прямая задача: по заданному оператору

отыскать все инвариантные подпространства или множества, является исключительно сложной и сводится к нелинейной многопараметрической задаче на собственные значения [10]). В частности, показана связь между размерностью подпространства k и порядком дифференциального оператора m : для нелинейных операторов \mathbf{A} выполнено $k \leq 2m + 1$ [19]. Теория инвариантных пространств развивается также для дискретных операторов [20, 21].

Отметим в этой связи пограничные идеи знаковых инвариантов, введенных в работе [9] как операторов (присоединенных к заданном нелинейным параболическим уравнениям), которые сохраняют свой знак на решениях. Эта идея весьма характерна для общей теории нелинейных параболических уравнений, когда априорные оценки слабых решений строятся на основе принципа максимума путем анализа знака определенной дифференциальной конструкции. В общей теории накоплен значительный опыт выделения таких конструкций, и именно на этой основе вводится понятие знакового инварианта. Исторические сведения, связанные со структурой инвариантов, приведены в [9]. Этот «нелинейный» подход позволяет построить новые точные решения вследствие нуль-инвариантности знакового инварианта. Некоторые из них являются решениями на неожиданных инвариантных подпространствах или множествах. Отметим, что в [9] приведены уникальные примеры бесконечномерных множеств уравнений типа реакция–диффузия:

$$u_t = \Delta\varphi(u) + f_\varphi(u),$$

где φ — произвольная гладкая функция, допускающая конечномерную редукцию на инвариантных множествах. Теория (максимальных) знаковых инвариантов развивалась в [9, 22] с приложениями к различным типам уравнений, включая уравнения типа «средней кривизны» или «движения по кривизне» [23]. Инвариантные пространства для таких уравнений изучались в [13].

Ряд работ посвящен попытке объяснения вышеуказанных новых решений с позиции так называемого метода неклассических симметрий (см. [24, 25]) или на основе метода квазирешений [26]. Эти подходы имеют то преимущество, что используют мощный развитый аппарат линейного группового анализа, поэтому при их использовании вводится понятие «слабой группы симметрии» (P. Olver и P. Rosenau) или «частично инвариантное решение» (Е. М. Воробьев). Естественно, что внутри этих подходов лежит некоторое эвристически установленное соотношение или предположение. Например, в методе неклассических симметрий к уравнению дописывается квазилинейная дифференциальная связь первого порядка (условие инвариантной поверхности), и уравнение совместности может анализироваться на основе законченной групповой теории. Такое итерационное использование метода приводит к объяснению некоторых решений на инвариантных подпростран-

ствах [24]. На наш взгляд, эти интересные подходы во многих случаях способны дать объяснение существованию тех или иных новых решений только апостериори, когда заранее известно, в каких переменных решения лежат на линейных множествах (априори это обычно не известно, и в выборе таких переменных и состоит значительная часть проблемы). Например, некоторые точные решения, построенные в [9, 22], не порождены никакими дифференциальными связями первого порядка, а соответствующие знаковые инварианты являются существенно нелинейными квадратичными операторами типа Гамильтона–Якоби.

По-видимому, надо искать какие-то новые подходы, правильно отражающие нелинейную природу уравнений, которые должны сочетать преимущества линейных групповых методов, алгебраического анализа и нелинейных идей, идущих из глубины общей теории нелинейных уравнений.

В [27] показана определенная связь между групповыми решениями, инвариантными относительно группы растяжений по независимым переменным, и решениями на одномерных подпространствах, инвариантных относительно нелинейных операторов. Можно ввести так называемый индекс подобия $I(\mathbf{A})$ для того или иного нелинейного оператора \mathbf{A} такого, что при $I(\mathbf{A}) = 1$ эволюционное уравнение (2) допускает групповое решение, а при $I(\mathbf{B}) \geq 2$ никаких инвариантных решений нет, но появляются решения на инвариантных подпространствах или инвариантных множествах. Таким образом, отслеживается своеобразный переход между линейной групповой инвариантностью и нелинейной инвариантностью подпространств и множеств инвариантных относительно нелинейных операторов. Приложения к уравнениям четного порядка приведены в [27], к уравнениям третьего порядка — в [28].

Список литературы

1. Olver P. Symmetry and explicit solutions of partial differential equations // Appl. Numer. Math. — 1992. — V. 10. — P. 307–324.
2. Galaktionov V.A. On new exact blow-up solutions for nonlinear heat conduction equations with source and applications // Differ. and Integral Equat. — 1990. — V. 3. — P. 863–874.
3. Galaktionov V.A. Best possible upper bound for blow-up solutions of the quasilinear heat conduction equation with source // SIAM J. Math. Anal. — 1991. — V. 22. — P. 1293–1302.
4. Galaktionov V.A. On a blow-up set for the quasilinear heat equation $u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^{\sigma+1}$ // J. Differ. Equat. — 1993. — V. 101. — P. 66–79.
5. Galaktionov V.A., Vazquez J.L. Regional blow-up in a semilinear heat equation with convergence to a Hamilton–Jacobi equation // SIAM J. Math. Anal. — 1993. — V. 24. — P. 1254–1276.

6. Galaktionov V. A., Vazquez J. L. Extinction for a quasilinear heat equation with absorption. I: Technique of intersection comparison // Commun. Partial Differ. Equat. — 1994. — V. 19. — P. 1075–1106.
7. Galaktionov V. A. Invariant subspaces and new explicit solutions to evolution equations with quadratic nonlinearities // Proc. Roy. Soc. (Edinburgh). — 1995. — V. 125A. — P. 225–246; Report No. AM-91-11. — School of Math., Univ. of Bristol, 1991.
8. Galaktionov V. A., Posashkov S. A., Svirshchevskii S. R. On invariant sets and explicit solutions of nonlinear equations with quadratic nonlinearities // Differ. and Integral Equat. — 1995. — V. 8. — P. 1997–2024.
9. Galaktionov V. A. Quasilinear heat equations with first-order sign invariants and new explicit solutions // Nonlinear Anal., Theory, Meth. and Appl. — 1994. — V. 23. — P. 1595–1621.
10. Галактионов В. А., Посашков С. А., Свирицевский С. Р. Обобщенное разделение переменных для дифференциальных уравнений с квадратичными нелинейностями // Дифференциальные уравнения. — 1996. — Т. 31. — С. 233–240.
11. Olver P. Direct reductions and differential constraints // Proc. Roy. Soc. (London). — 1994. — V. 444. — P. 509–523.
12. Galaktionov V. A., Posashkov S. A. Examples of nonsymmetric extinction and blow-up for quasilinear heat equations // Differ. and Integral Equat. — 1995. — V. 8. — P. 87–103.
13. Галактионов В. А., Посашков С. А. Точные решения и инвариантные пространства для уравнений градиентной диффузии // ЖВМиМФ. — 1994. — Т. 34. — С. 373–374.
14. Galaktionov V. A. Invariant solutions of two models of evolution of turbulent bursts // Euro J. Appl. Math. (submitted).
15. King J. Exact polynomial solutions to some nonlinear diffusion equations // Physica D: Nonl. Phenom. — 1993. — V. 64. — P. 35–65.
16. King J. Exact multidimensional solutions to some nonlinear diffusion equations // Quart. J. Mech. Appl. Math. — 1993. — V. 46. — P. 419–436.
17. Косыгина Е. Р. Об анизотропных точных решениях многомерного уравнения нестационарной фильтрации // ЖВМиМФ. — 1995. — Т. 35. — С. 241–259.
18. Svirshchevskii S. R. Lie-Becklund symmetries of linear ODEs and generalized separation of variables in nonlinear equations // Phys. Lett. A. — 1995. — V. 199. — P. 344–348.
19. Свирицевский С. Р. Нелинейные дифференциальные операторы первого и второго порядков, допускающие инвариантные линейные пространства максимальной размерности // Теорет. и матем. физика. — 1995. — Т. 105. — С. 198–207.
20. Galaktionov V. A. On invariant subspaces for nonlinear finite-difference operators // Proc. Roy. Soc. (Edinburgh). — 1998 (to appear).
21. Galaktionov V. A., Svirshchevskii S. R. Invariant subspaces in nonlinear difference equations. In preparation.
22. Galaktionov V. A., Posashkov S. A. New explicit solutions of quasilinear heat equations with general first-order sign-invariants // Physica D: Nonl. Phenom. — 1996. — V. 99. — P. 217–236.
23. Galaktionov V. A., Posashkov S. A. Maximal sign-invariants of quasilinear parabolic equations with gradient diffusivity // J. Math. Phys. — 1998. (to appear).

24. *Nucci M. C.* Iterating the classical symmetries method // *Physica D: Nonl. Phenom.* — 1994. — V. 78. — P. 124–134.
25. *Allassia F. A., Nucci M. C.* Symmetries and their equations for the laminar boundary layer model // *J. Math. Anal. Appl.* — 1996. — V. 201. — P. 911–942.
26. *Pucci E., Saccomandi G.* Quasisolutions as group-invariant solutions for partial differential equations // *Studies in Appl. Math.* — 1995. — V. 94. — P. 211–223.
27. *Galaktionov V. A.* Groups of scalings and invariant sets for higher-order nonlinear evolution equations // *Differ. and Integral Equat.* (to appear).
28. *Galaktionov V. A.* Ordered invariant sets for nonlinear evolution equations of KdV-type (to appear).

В. А. Галактионов

IV. РАЗВИТИЕ И ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ

Экспериментальное исследование эффекта токового слоя

*А. Ю. Керкис, В. С. Соколов, Н. А. Трынкина,
В. П. Фомичев*

В [1,2] и ряде других публикаций на основе численного решения уравнений магнитогазодинамики было показано, что при движении в магнитном поле сжимаемой среды, электропроводность которой растет с увеличением температуры, в среде могут возникать самоподдерживающиеся зоны повышенной плотности тока, температуры и электропроводности (*токовые слои* — *T-слои*), существование которых приводит к увеличению эффективности магнитогазодинамического взаимодействия. Была выявлена возможность как инициированного [2], так и самопроизвольного [1] зарождения токовых слоев.

В настоящем сообщении приводятся результаты экспериментального обнаружения и исследования указанного эффекта в режиме его самопроизвольного возникновения в процессе расширения плазмы в дисковом канале при наличии поперечного магнитного поля.

Эффект токового слоя, наблюдаемый в эксперименте, содержит, по нашему мнению, все основные моменты, предсказываемые теорией: локализация электрического тока в газе, повышение в этой зоне температуры и электропроводности, усиление магнитогазодинамического взаимодействия и, наконец, существование для каждого режима течения критического значения магнитного поля такого, что если действительная напряженность поля меньше критической, то эффект не возникает. Кроме того, в эксперименте получен новый, принципиально важный результат, указывающий на устойчивость токового слоя как пространственного образования.

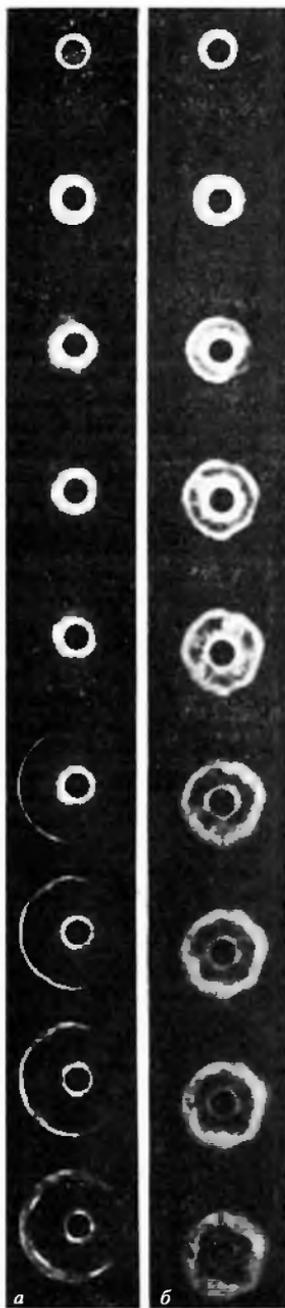


Рис. 1. Покадровая съемка процесса расширения плазмы в дисковом канале; время между кадрами 2,66 мкс. а) $H = 0$ (на последних кадрах видно свечение отраженной от конца канала ударной волны); б) $H = 3000$ Э. Во избежание засветки пленки излучением из разрядника центральная часть дискового канала сделана непрозрачной (темный диск в центре кадров)

Экспериментальные исследования проводили на установке, подробное описание которой имеется в [3]. Источником плазмы служит коаксиальный разрядник, на который разряжается батарея конденсаторов. Круглая труба длиной 350 мм и диаметром 55 мм, являющаяся продолжением разрядника, оканчивается дисковым каналом, образующие стенку которого перпендикулярны к оси трубы. Диаметр дискового канала 250 мм, ширина 20 мм. Магнитное поле, силовые линии которого в пределах дискового канала параллельны оси симметрии установки, создавалось электромагнитом постоянного тока. Внутренний диаметр магнита равен диаметру канала, стенки канала изготовлены из прозрачного оргстекла. Система измерений включала в себя скоростную фотосъемку с помощью СФРЛ, одновременное использование до десяти пьезодатчиков давления, такого же количества магнитных зондов, специально разработанных датчиков для прямого измерения плотности тока в плазме (с пространственным разрешением 5 мм), кроме того, измерялась напряженность электрического поля.

Эксперимент проводился на воздухе с начальным давлением 0,7–1,0 мм рт. ст. Скорость движения плазмы в прямой трубе достигала 20 км/с, скорость расширения в дисковом канале без магнитного поля 10 км/с. Изменяемым параметром в исследованиях было магнитное поле, напряженность которого менялась от эксперимента к эксперименту в пределах от 0 до 4000 Э.

На рис. 1, 2 представлены наиболее характерные результаты эксперимента для очень слабого магнитного поля (меньше 1000 Э) и для по-

ля с напряженностью 3000 Э. В первом случае развитие процесса идет под влиянием чисто газодинамических факторов. В начальной стадии происходит достаточно быстрое формирование цилиндрической ударной волны с характерным для нее профилем давления и со скоростью движения по покоящемуся газу ~ 10 км/с. Измерения и основанные на них оценки позволяют считать, что распределение параметров газа по каналу на некотором расстоянии за ударной волной определяется преимущественно его адиабатическим расширением и что течение газа в некотором интервале времени является квазистационарным. Во втором случае динамика процесса в центральной части канала по существу та же, что и в первом случае; но качественно отличается на больших радиусах. На фотографиях отчетливо видно зарождение светящегося кольца непосредственно в потоке достаточно далеко за ударной волной. Интенсивность свечения и ширина этого кольца быстро возрастают. Датчики давления одновременно фиксируют в этом же месте повышение давления, перерастающее позднее в ударную волну, а измерения плотности электрических токов — появление максимума в распределении электрического тока.

Возникающая зона повышенного давления первоначально соответствует максимуму плотности электрического тока. Однако в момент формирования новой ударной волны вследствие интенсивного торможения газа в зоне максимальных токов происходит четкое пространственное разделение зон максимальных токов и давлений. Оно не только сохраняется в поздней стадии процесса, но и увеличивается за счет движения ударной волны к центру. Вместе с тем зона интенсивно светящегося кольца, как показывают измерения, однозначно связана с максимумом плотности тока. Ширина этой зоны в среднем ~ 2 см, плотность тока в ней достигает величин

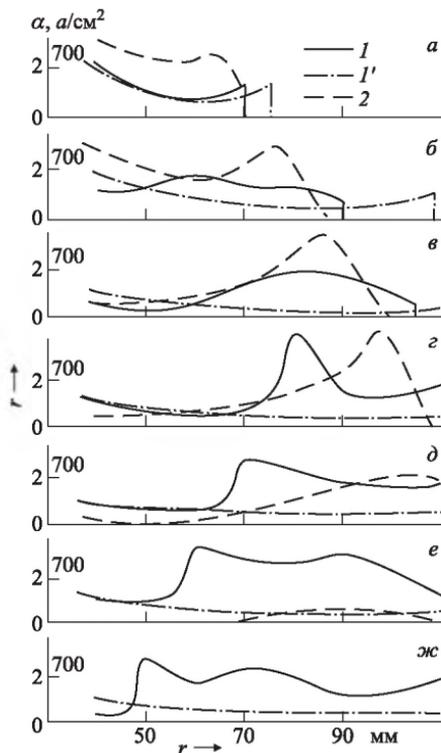


Рис. 2. Распределение параметров потока ($1, 1'$ — давление; 2 — плотность тока) по каналу в различные моменты времени; а) 4,5 мкс; б) 8; в) 12; г) 15; д) 20; е) 27; ж) 37 мкс. $1, 2$ — при $H = 3000$ э; $1'$ — при $H = 0$

1000–1500 А/см² (рис. 2), а электропроводность, вычисленная по измеренным плотности тока, скорости, напряженности электрического и магнитного полей, равна 120–160 Ом⁻¹/см. Эта величина превосходит в 10–30 раз значение электропроводности в этом месте потока при докритических магнитных полях и соответствует температуре воздуха

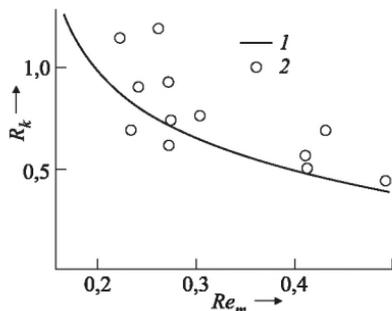


Рис. 3. Условие возникновения токового слоя. Кривая — теоретический анализ [2]; \circ — обработка эксперимента

го свечения. Единственно разумной причиной столь интенсивного локального разогрева газа кажется выделение джоулева тепла (в нашем случае в начальной стадии процесса 1–3 Дж/см³).

Анализ многочисленных экспериментов позволил не только выявить характерные особенности процесса, но и установить, с одной стороны, условия зарождения токового слоя, с другой — устойчивость его существования как пространственного образования. В условиях нашего эксперимента характерное время процесса, т.е. время прохождения передним фронтом всей длины канала, составляло 10 мкс, время развития T -слоя с момента его зарождения до достижения максимальной плотности тока равнялось 3–5 мкс, время же существования токового слоя достигало 20–25 мкс, причем распад его происходил, как видно из приведенных иллюстраций, преимущественно вследствие интенсивного высвечивания и уменьшения плотности тока, вызванного резким падением скорости из-за торможения слоя в магнитном поле. В ряде случаев на внешней границе слоя в момент наиболее интенсивного его торможения наблюдались характерные для рэлей-тэйлоровской неустойчивости возмущения, величина которых возрастала до 20–30% от ширины слоя. Однако ни разу не был зафиксирован случай распада слоя вследствие подобной неустойчивости. Наоборот, возмущения, амплитуды которых достигали указанного значения, быстро затухали (за время 2–5 мкс), и восстанавливалась форма внешней границы.

На рис. 3 в переменных $Re_m = (4\pi)/(c^2)\sigma_0 V_0 L_0$ и $R_H = (H_0^2)/(4\pi P_0)$ приведены условия возникновения T -слоя, полученные на основе об-

(5–6,5) · 10⁴ К. Попытка объяснить возникновение зоны столь высокой температуры нагревом газа вновь возникающей ударной волной неосновательна. Во-первых, как было показано выше, само возникновение ударной волны является следствием торможения зоны потока с максимальной плотностью тока в магнитном поле; во-вторых, интенсивность этой волны, оцениваемая по измеренному перепаду давлений, слишком мала, чтобы обеспечить такое повышение температуры, и, в-третьих, в процессе имеет место четкое разделение зон сжатия ударными волнами и зоны максимально-

работки эксперимента. В таком виде эти условия впервые были сформулированы в [2]. Сущность их состоит в том, что если исследуемый процесс характеризуется в плоскости (Re_m, R_H) точкой, лежащей выше кривой $Re_m \cdot R_H = \text{const}$, то происходит образование T -слоя, в противном случае это явление не возникает. Эксперимент не только качественно, но и количественно подтверждает выводы [2] относительно условий образования T -слоя.

Доклады Академии наук СССР.
1973. Т. 211. № 1

Поступила
08.06.1972

Список литературы

1. Тихонов А. М., Самарский А. А. и др. // ДАН СССР. — 1976. — Т. 173, № 4.
2. Дегтярев Л. М., Заклязьминский Л. А. и др. // Теплофиз. высоких температур. — 1969. — № 3.
3. Дервянко В. А., Заклязьминский Л. А. и др. // Журн. прикл. мех. и техн. физ. — 1968. — № 2.

Экспериментальное наблюдение T -слоев в движущейся плазме, взаимодействующей с магнитным полем

А. И. Захаров, В. В. Клавдиев, В. Д. Письменный,
Л. Ротхардт¹⁾, В. Б. Саенко, А. Н. Старостин, Г. Ян¹⁾

В работах [1–3] показано, что в плазме, движущейся поперек магнитного поля, возможно развитие неустойчивости, связанной с локальным перегревом и приводящей к образованию структур (T -слоев). Экспериментальной проверке теории T -слоя посвящена лишь работа [4], в которой наблюдалось возникновение одиночного слоя в плазме.

Следует отметить, что в работах по изучению ускорителей плазмы неоднократно наблюдалась последовательность плазменных сгустков, имеющих вид тонких ярко светящихся слоев, разделенных темными промежутками порядка ширины слоя (см., например [5–7]). Однако факта существования слоистой структуры плазмы недостаточно для определенного вывода о механизме ее образования. Поэтому такая интерпретация не является единственной.

Цель настоящей работы состояла в проведении эксперимента по обнаружению и исследованию условий возникновения серии саморазмножающихся T -слоев.

¹⁾ Сотрудники Центрального института электронной физики Германской Академии наук (Отделение VI, г. Иена).

Источник плазмы (θ -пинч) был отдален от рельсотрона и инжектировал в него сгустки плазмы с известными свойствами. Напряжение на электроды рельсотрона включалось через регулируемый интервал времени τ_3 относительно начала тока в инжекторе, достаточный для проникновения в межрельсовое пространство, а магнитное поле рельсотрона тормозило движение сгустка.

Приведем основные параметры установки. Начальное напряжение на батарее θ -пинча емкостью 31,3 мкФ составляло $U = 14$ кВ, а на батарее рельсотрона емкостью 646 мкФ напряжение регулировалось в пределах от 0 до 5 кВ. Длина электродов рельсотрона 280 мм, ширина анода 18 мм, катода 2 мм, а расстояние между ними 30 мм. Начало рельс было удалено от центра камеры θ -пинча на 130 мм. Предварительно откаченный объем устройства заполнялся потоком рабочего газа (технически чистый водород) при давлении $p_0 = 0,3$ Торр.

Динамика плазмы регистрировалась с помощью СФР, работавшего в режиме фоторегистратора. Пространственно-временное распределение электронной температуры в сгустке в течение одного разряда измерялось по отношению интенсивностей линий H_α и H_β . Оценки показывают, что заселенности соответствующих уровней в рассматриваемых условиях удовлетворяют критерию применимости локального термодинамического равновесия (ЛТР) [8]. Приемниками излучения служили два ДЭОПа типа ЛИ-602 [9]. Они сканировали участок межрельсового пространства длиной 100 мм, центр которого отстоял от начала рельс на 70 мм; период сканирования составляет 4 мкс. Выходные сигналы ДЭОПов были синхронизованы с осциллограммами тока и напряжения. Осредненные по длительности разряда в рельсотроне спектрограммы излучения плазмы регистрировались спектрографом ИСП-51.

Образовавшаяся в результате пробоя газа в камере θ -пинча плазма кумулировала в приосевой области, образуя сгусток, движущийся вдоль оси рельсотрона. Вылет сгустков в рельсотрон наблюдался в каждом полупериоде тока, начиная с третьего. Скорость движения первого сгустка составляла $1,2 \cdot 10^6$ см/с. Второй сгусток плазмы отличался большей яркостью и скоростью движения $3,3 \cdot 10^6$ см/с.

Оценка показывает, что максимальная температура плазмы при ее сжатии в θ -пинче составляет ~ 10 эВ. Однако на пути сгустка к рельсотрону плазма охлаждается, в основном из-за расширения, до $T < 1$ эВ. Охлаждение происходит за время $\tau_{охл} \sim L/v_i \sim 5 \cdot 10^{-7}$ с (L — поперечный размер сгустка, v_i — тепловая скорость ионов), что меньше времени пролета плазмы от области кумуляции до входа в рельсотрон. Охлажденная плазма рекомбинирует с характерным временем $\sim 10^{-7}$ с. О низких значениях температуры и степени ионизации плазмы в рельсотроне свидетельствует экспериментальный факт наличия в видимой области спектра только линейчатого излучения. При этом линий примесей в пределах полосы пропускания фильтров

(~ 40 А) обнаружено не было. Параметры плазмы за фронтами сгустков можно оценить из соотношений Ренкина–Гюгонио. Для первого сгустка получим: температура за фронтом $T = 2600$ К, плотность $\rho = 3,24 \cdot 10^{-7}$ г/см³, давление $P = 30$ мм рт. ст., степень диссоциации $\alpha_D = 0,15$. Для этого имеем соответственно: $T = 4800$ К, $\rho = 3,7 \times 10^{-6}$ г/см³, $P = 1100$ мм рт. ст., $\alpha_D = 0,92$.

Из СФР-грамм движения плазмы видно, что каждый сгусток состоит из двух-трех слоев, сохраняющихся в течение времени пролета плазмы через рельсотрон. Слоистая структура сгустков отражает пространственную модуляцию температуры плазмы, обусловленную ее радиальными пульсациями в приосевой области источника. Наименьшее время исчезновения температурной модуляции соответствует условиям за фронтом второго сгустка. Оценка дает $t \sim L^2/\chi = 2,4 \cdot 10^{-3}$ с (χ — коэффициент температуропроводности), что существенно больше времени пролета плазмы через рельсотрон.

При пропускании тока характер течения плазмы существенно зависит от величины напряжения, приложенного к рельсам. СФР-граммы разряда в рельсотроне представлены на рис. 1. В случае, показанном на рис. 1, а, напряжение на рельсы подавалось с задержкой $\tau_3 = 54$ мкс. Видно, что большая часть тока перехватывается вторым, более горячим и обладающим лучшей проводимостью сгустком. В момент времени 65 мкс, когда ток продолжает нарастать, второй сгусток расщепляется на две части, одна из которых продолжает, замедляясь, двигаться в направлении инжекции, а вторая разворачивается и распространяется в противоположном направлении. В результате обеспечивается наличие магнитного поля в пространстве между возникшими токовыми каналами, где может зародиться ударная волна, образованная в момент разрыва сгустка. Эта ударная волна движется в сторону растущего магнитного поля, а возникший на ее фронте T -слой тормозится и разворачивается в обратном направлении, порождая при своем движении новую ударную волну (ср. [3]). Из рис. 1, а видно, что ярко светящиеся слои плазмы возникают и в последующие моменты времени (например, при $t = 75$ мкс и $t = 83$ мкс).

В случае, показанном на рис. 1, б, напряжение на рельсы подавалось через 44 мкс после начала тока в инжекторе. Видно, что в этом случае слоистая структура сначала развивается на первом сгустке, а затем — на втором. Уменьшение напряжения на электродах до величины $U = 500$ В приводило к ослаблению наблюдаемой картины светящихся слоев (рис. 1, в) и исчезновению эффекта при $U = 400$ В (рис. 1, г).

Зависимость температуры от расстояния вдоль оси рельсотрона в различные моменты времени в условиях, соответствующих рис. 1, б, приведена на рис. 2. Видно, что электронная температура в слоях составляет несколько эВ, а в промежутках между слоями не превышает 0,3–0,5 эВ, что согласуется с данными расчета, приведенного в таблице. Ошибка измерения температуры при $T = 5$ эВ составляет около 100%, а при $T = 0,5$ эВ — 15%.

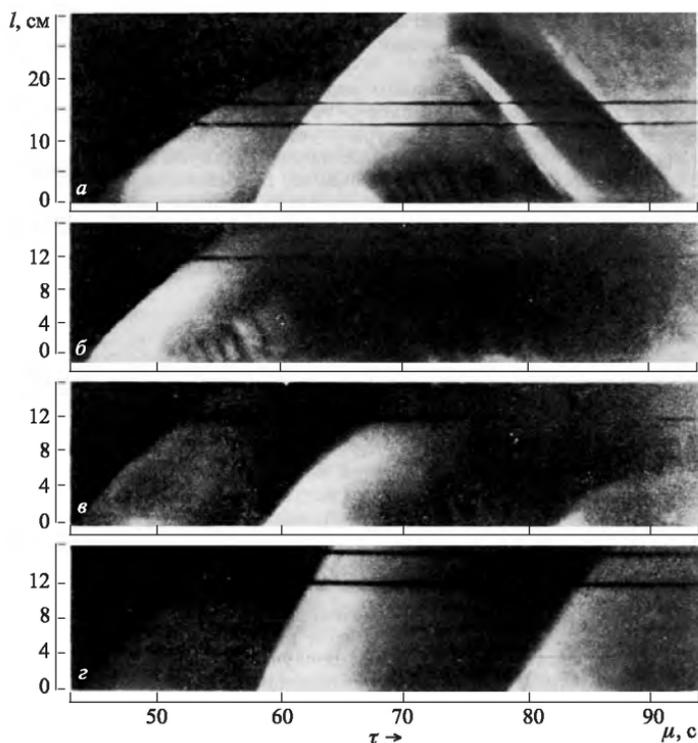


Рис. 1. Динамика плазмы в рельсотроне. *а, б*) $U = 750$ В; *в*) $U = 500$ В; *г*) $U = 400$ В; $\tau_3 = 54$ мкс (*а*); 44 мкс (*б-г*)

Отметим, что слоистая структура возникала и при разряде в ксене с тем же начальным давлением газа и $U = 750$ В. Скорость движения сгустка, инжектируемого в рельсотрон, составляла $3 \cdot 10^5$ см/с, а амплитуда тока — около 12 кА.

Обсудим теперь некоторые другие возможные причины образования слоистой структуры плазмы.

В слабоионизованной замагниченной ($\Omega\tau > 1$, Ω — циклотронная частота, τ — время между соударениями электронов с тяжелыми частицами) плазме с током возможно развитие ионизационной неустойчивости [10], что также могло бы привести к возникновению слоистой структуры. Отметим, однако, что в рассматриваемых условиях за время ~ 10 мкс степень ионизации возрастает в результате джоулева нагрева плазмы, что приводит к преобладанию кулоновских столкновений и уменьшению $\Omega\tau$ до значений, лежащих существенно ниже порогового ($\Omega\tau_{\text{пор}} \sim 1-2$) для неустойчивости этого типа.

Другой механизм мог бы быть связан с развитием перегретной неустойчивости, как в слабо, так и в полностью ионизованной плазме [11–12]. Для плазмы с кулоновской проводимостью можно получить

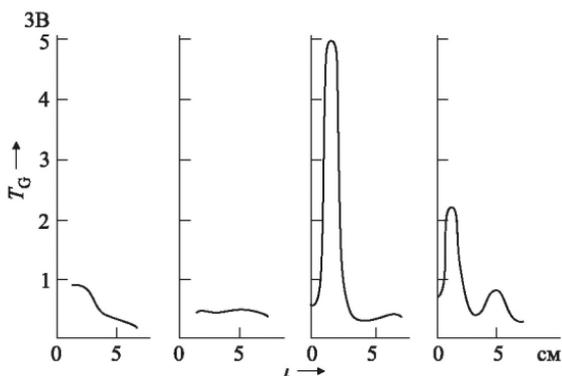


Рис. 2. Пространственно-временное распределение температуры плазмы первого сгустка в условиях, соответствующих рис. 1, б. Время включения ДЭОПов $\tau_3 = 42$ мкс

для времени развития такой неустойчивости $\tau \sim 10^{-8}$ с, что соответствует наблюдаемым значениям. Соответствующие оценки, правда, относятся к случаю покоящейся плазмы без магнитного поля, влияющего как на динамику, так и на процессы переноса в плазме.

Кроме того, для перегретной неустойчивости [11–12] наличие порога в области наблюдаемых параметров плазмы не характерно.

Оценим возможность образования T -слоев по значениям соответствующих магнитогидродинамических параметров. Значение Re_m в невозмущенной плазме первого сгустка составляет величину ~ 1 , что соответствует критерию возникновения T -слоя, когда $dT/dt > 0$ [2]. При этом $P_H = H^2/(4\pi\rho) \sim 1$, так что $R_M = Re_m R_H \sim 1$. Заметим, что в этих условиях скорость движущихся слоев с удовлетворительной точностью соответствует скорости дрейфа в скрещенных E и H полях, равной $1,7 \cdot 10^6$ см/с. Для порогового значения напряжения $U = 500$ В $R_M = 0,5$, что удовлетворительно согласуется с теоретическими расчетами [2], проведенными в одномерной модели режима ускорения.

Авторы благодарят чл.-корр. АН СССР Е. П. Велихова, Ю. К. Земцова, С. П. Курдюмова, Ю. П. Попова, А. Т. Рахимова за обсуждение и критику и А. А. Семенова за помощь в проведении экспериментов.

Доклады Академии наук СССР.
1973. Т. 212. № 5

Поступила
07.12.1972

Работа представлена академиком Л. А. Арцимовичем

Список литературы

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. и др. // ДАН СССР. — 1967. — Т. 173, № 4.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. и др. Эффект T -слоя в магнитной гидродинамике.

3. *Беляев С. А., Гольдина Д. А. и др.* Расчет нестационарного ускорения плазмы в одномерном приближении. М., 1969.
4. *Деревянко В. А., Заклязьминский Л. А., Лебедев Е. Ф.* // Журн. прикл. мех. и техн. физ. — 1968. — № 4.
5. *Кварцхава И. Ф., Меладзе Р. Д., Суладзе К. В.* // ЖТФ. — 1960. — Т. 30, вып. 3.
6. *Mawardi O. K., Naraghi M.* // JEEE Transaction on Nuclear Science. — 1963.
7. *Григорьев В. Н.* // Журн. прикл. мех. и техн. физ. — 1965. — № 2.
8. *Грим Г.* Спектроскопия плазмы. — М., 1969.
9. *Кругляков Э. П.* Диагностика плазмы. — М., 1968.
10. *Велихов Е. П., Дыхне А. М.* // С. R. de la VI-e Conf. intern. sur les phenomenes d'ionisation dans les gas. — Paris, 1963. — V. 2.
11. *Велихов Е. П., Новобранцев И. В. и др.* // ДАН СССР. — 1972. — Т. 205, № 6.
12. *Персианцев И. Г., Письменный В. Д. и др.* // Письма в ЖЭТФ. — 1972. — Т. 16, № 2.

Локализованные нестационарные структуры в задачах лазерной термохимии

Н. А. Кириченко

Введение. Одним из актуальных направлений в современной физике является исследование неравновесных процессов при лазерном нагреве вещества. Это направление получило название «лазерная термохимия», или «лазерная макрокинетика». Интерес к работам в этой области обусловлен, с одной стороны, разнообразными прикладными задачами (применением лазеров в технологии, для прецизионных измерений и т. д.), а с другой стороны, постановкой нового класса нелинейных задач, учитывающих специфические закономерности взаимодействия излучения с веществом. Кроме того, лазерная термохимия предоставляет прекрасный инструмент для моделирования нелинейных процессов в системах различной природы — в физике полупроводников, физике плазмы, в химии, астрофизике и т. д., поскольку, меняя параметры излучения (интенсивность, длину волны, поляризацию, пространственное распределение), можно в широких пределах менять как величину нелинейности, так и сам ее характер.

Особый интерес представляют явления самоорганизации, т. е. возникновение в неравновесных средах диссипативных структур, тип которых определяется свойствами самих сред и в малой степени зависит от начальных условий. Среди них особое место занимают локализованные структуры, исследованию которых посвящено значительное число работ. Эти структуры встречаются в самых разнообразных системах и весьма ярко иллюстрируют фундаментальные закономерности в нелинейных явлениях (см., например, [1]).

Макроскопическая неравновесность и обратные связи. Взаимодействие света с веществом — это сложный нелинейный процесс, который можно условно разделить на несколько стадий: поглощение света; перенос энергии и вещества (в том числе процессы тепло- и массообмена с окружающей средой); химические реакции. Характер эволюции системы существенным образом зависит от того, какие обратные связи «работают» в системе [2, 3].

1. Поскольку скорости реакций (и, вообще, большинства процессов) зависят от температуры, а ряд процессов, в свою очередь, сопровождается выделением или поглощением энергии, то устанавливаются «тепловые» обратные связи. Такие связи играют ключевую роль, например, в физике горения. Дополнительная энергия, вносимая в среду лазерным излучением, может сильно менять характер процесса.

2. Благодаря различным физико-химическим процессам (изменения химического состава, плотности и др.) оптические свойства среды могут сильно меняться. В результате меняются локальные значения вносимой в вещество энергии лазерного излучения и, следовательно, скорости инициируемых излучением процессов.

3. Изменение оптических свойств среды (например, показателя преломления) может вести к нелинейно-оптическим эффектам — самофокусировке, самодефокусировке и др. и, как следствие, к изменению пространственного распределения интенсивности излучения.

Таким образом, вводимая в вещество лазерная энергия приводит к изменению свойств среды и, тем самым, к изменению характера поглощения излучения веществом.

Эффекты локализации температурного поля при лазерном окислении металлов¹⁾. Рассмотрим некоторые особенности лазерного нагрева окисляющихся металлов. При нагреве металлов в окислительной среде на их поверхности возникает окисный слой. Как известно, металлы хорошо отражают, а их окислы сильно поглощают инфракрасное излучение. В результате, по мере увеличения толщины x слоя окисла, увеличивается поглощаемая доля $A(x)$ энергии излучения и, соответственно, возрастает темп нагрева (поскольку скорость реакции, т.е. скорость роста окисной пленки, зависит от температуры T по закону $\sim \exp(-T_a/T)$, $T_a = \text{const}$). Это приводит к самоускорению реакции, называемому термохимической неустойчивостью.

Пусть поле излучения пространственно неоднородно, с максимумом интенсивности в центре пучка. Тогда в окрестности оси темп нагрева и, соответственно, скорость роста окисла наибольшие, а к периферии они убывают. В результате термохимическая неустойчивость на оси пучка развивается раньше, чем на краю. Это ведет к обострению профиля температуры в металле в зоне облучения. Теоретический

¹⁾ Так для краткости говорят о процессе окисления металлов, происходящем при нагреве вещества под действием лазерного излучения.

анализ [4] показал, что в случае нагрева вещества, занимающего полупространство, амплитуда T и эффективная ширина температурного поля b в этом процессе меняются со временем как

$$T(r, t) - T_H \approx T_1(t)[1 - r^2/b^2(t)], \quad r < b;$$

$$T_1(t) \approx T_0 \left[1 + \frac{T_0}{T_a} \ln \left(\frac{1}{1 - t/t_f} \right) \right], \quad b \approx \sqrt{2} r_0 \left(1 - \frac{t}{t_f} \right)^{1/3}, \quad (1)$$

где r_0 — радиус пучка излучения (характерный масштаб пространственной неоднородности потока излучения). Величину t_f , представляющую собой характерное время активации реакции, естественно назвать временем обострения.

Описанный процесс моделирует один из случаев формирования диссипативных структур в режиме локализации обострения (или LS-режиме).

Данный эффект исследовался экспериментально в [5]. Изучался нагрев металлических пластин (из титана, циркония, кобальта) излучением непрерывного CO_2 -лазера ИЛГН-704 мощностью 40 Вт. Размеры поверхности мишени составляли $30 \times 3 \text{ мм}^2$, а толщина 0,5 мм. Пятно излучения имело на поверхности сильно вытянутую овальную форму с размерами $6 \times 0,5 \text{ мм}^2$. Температурное поле регистрировалось в течение всего времени нагрева серией термопар, приваренных к тыльной стороне мишени. Типичные экспериментальные результаты приведены на рисунках 1 и 2. На графиках рис. 1 показано, как меняется со временем профиль температуры (по радиусу пучка) в случае нагрева титана, а на врезке — временные зависимости амплитуды $T_1 \equiv T(0, t)$ температурного поля и его радиуса на полувысоте $r_{0,5}$. На рис. 2 временной ход T_1 и $r_{0,9}$ показан для кобальта. (Координата r_a определена условием $T(r_a, t) = \alpha T_1$.) Нетрудно заметить, что при развитии термохимической неустойчивости (т.е. в период ускорения роста температуры) происходит эффективное сжатие температурного поля — уменьшение r_a . В случае кобальта имеется несколько участков, где наблюдается подобный эффект. Эти дополнительные колебания $r_a(t)$ обусловлены интерференционными осцилляциями поглощательной способности вещества $A(x)$ при изменении толщины окисного слоя.

Таким образом, эксперимент позволил промоделировать сингулярные по времени решения некоторых нелинейных уравнений — по крайней мере, на некотором временном интервале. Следует подчеркнуть, что этот эффект представляет и практический интерес, например, для проведения реакции в областях, меньших диаметра лазерного пучка ¹⁾.

¹⁾ Интересно, что в технологии этот эффект используется очень часто: несмотря на то, что из-за теплопроводности температурное поле явно шире, чем лазерный пучок, все процессы оказываются «почему-то» локализованными в пределах облучаемой зоны — как будто нет такого явления, как теплопроводность.

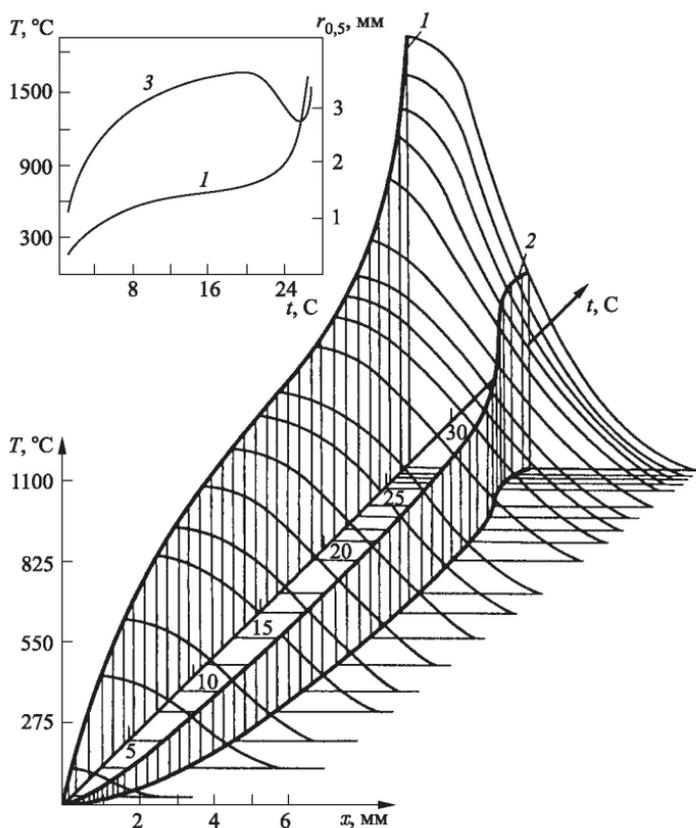


Рис. 1. Изменение пространственного профиля температуры титановой пластины во время облучения. 1 — температура $T(0, t)$ в центре пятна излучения; 2 — температура $0,5T(0, t)$; 3 — эффективный радиус локализации температурного поля $r_{0,5}$. На врезке отдельно показаны кривые 1 и 3

Следует также отметить, что неоднородность пространственного распределения излучения существенна лишь на начальной стадии развития термохимической неустойчивости и играет роль флуктуации, снимающей случайное вырождение и открывающей возможности для развития структур любой симметрии. В этой связи следует упомянуть теоретические и экспериментальные исследования неустойчивостей плоского фронта окисления под действием пространственно-однородного излучения, сопровождающихся образованием структур различной симметрии (см., например, [6, 7]).

Локализованные структуры при лазерном горении металлов.

Явления формирования локализованных структур при лазерном нагреве металлов могут быть обусловлены не только процессами окисления

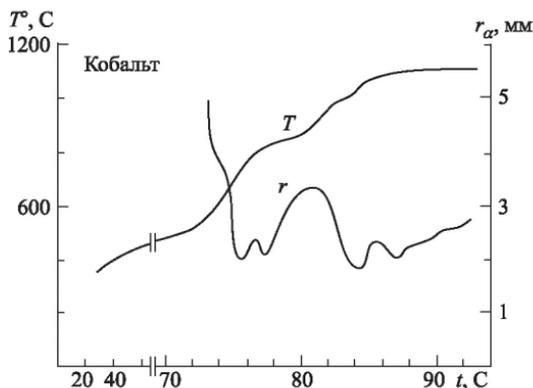


Рис. 2. Временная зависимость температуры на оси пучка излучения $T(0, t)$ и эффективного радиуса локализации $r_{0,9}$ температурного поля для мишени из кобальта

и изменения оптических свойств поверхности. В ряде ситуаций не менее важную (а то и определяющую) роль может играть энерговыделение самой химической реакции. В этом отношении задачи лазерного горения являются более традиционными для макроскопической кинетики [8], в которой и были получены наиболее фундаментальные результаты теории локализованных структур (см., например, [9–11]).

Строго говоря, уже формирование локализованных структур в случае титана (рис. 1) и кобальта (рис. 2) имеют разные причины. Если для Co основной механизм состоит в обсуждавшемся выше увеличении поглощательной способности вещества с ростом окисного слоя, то в случае Ti эффект локализации связан главным образом с энерговыделением реакции. Иными словами, в этом случае имеет место почти «чистое» воспламенение вещества, которое, согласно [1], может сопровождаться подобными эффектами.

Интерес к задачам физики лазерного горения возник в связи с прикладными исследованиями взаимодействия лазерного излучения с веществом. Однако уже вскоре стало ясно, что многие закономерности можно объяснить, если воспользоваться результатами, полученными при исследовании нелинейных задач теплопроводности. Более того, развитые там методы оказались весьма плодотворными, позволяя получить ряд важных соотношений с гораздо меньшими усилиями, чем при использовании обычной техники.

В экспериментах по лазерному горению [12–14] было обнаружено, что существует порог воспламенения по мощности излучения и по размеру фокусного пятна. На рис. 3 показана экспериментально найденная зависимость $P_{\text{кр}}(r_0)$ пороговой мощности излучения от радиуса пучка лазерного излучения (по данным работы [14]). В этих экспериментах изучалось воспламенение пластин титана (размерами

$80 \times 100 \text{ мм}^2$ и толщиной $0,5 \text{ мм}$) излучением лазера ЛТН-101 (длина волны $\lambda = 1,06 \text{ мкм}$, мощность P до 40 Вт). Интересно, что в этих экспериментах воспламенение происходило в пределах облучаемой зоны и не охватывало всю поверхность образца. Переход от локализованного горения к горению всего образца (т.е. к возникновению бегущего фронта горения) был обнаружен в [13]. Однако этот переход происходил при более высоких мощностях излучения и требовал нелимитированного доступа окислителя к поверхности вещества.

Для объяснения закономерностей лазерного зажигания металлов в [15, 16] была исследована математическая модель нагрева металла, занимающего полупространство, на поверхности которого происходит реакция с энерговыделением, пропорциональным $\exp(-T_a/T)$. Кроме того, учтено, что на эту поверхность падает лазерное излучение с пространственным распределением интенсивности $I(r) = I_0 \exp(-r^2/r_0^2)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad \Omega = \{r \geq 0, z > 0\}; \\ -k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{\partial\Omega} &= AI(r) + \left[wd_0 \exp\left(-\frac{T_a}{T}\right) - \eta T \right] \Big|_{\partial\Omega}, \quad (2) \\ \partial\Omega &= \{r \geq 0, z = 0\}. \end{aligned}$$

Здесь a, k — коэффициенты температуро- и теплопроводности; w — энерговыделение реакции; d_0 — константа скорости реакции; η — константа теплообмена; A — поглощательная способность вещества.

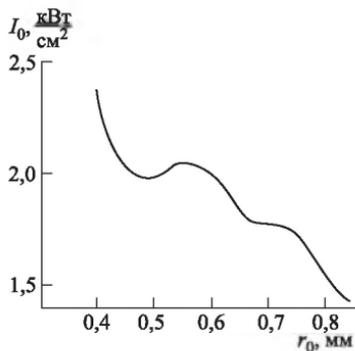


Рис. 3. Граница устойчивости в координатах «интенсивность–радиус пучка» для нагрева титановой пластины размерами $8 \times 10 \text{ см}^2$ и толщиной $0,5 \text{ мм}$

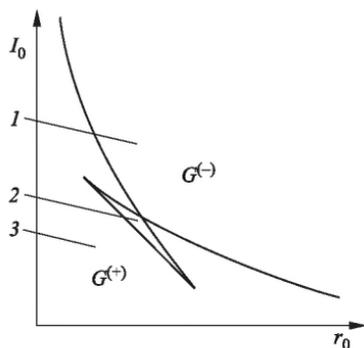


Рис. 4. Качественный вид границы устойчивости $I_0 = h(r_0)$. В области 1 стационарных решений нет, в области 2 — 4 решения, в области 3 — 2 решения

Использование приближенных методов позволило установить наличие «границы устойчивости» $I_{кр} = I(r_0)$ такую, что при $I < I_{кр}$ задача (2) имеет стационарные решения, а при $I > I_{кр}$ стационарных решений

нет. Это означает, что если интенсивность излучения мала (меньше $I_{кр}$), то зажигания не произойдет, тогда как в обратном случае металл загорается при любых начальных условиях. Качественный вид границы устойчивости приведен на рис. 4. Интересным фактом, обнаруженным в модели, оказались наличие области 2 на рис. 4. Эта область отвечает режиму локализованного горения. Ее наличие согласуется с упомянутыми выше результатами экспериментов, в которых наблюдался такой режим.

В дальнейшем граница устойчивости была исследована для одномерной и двумерной задач (т.е. найдены пороги воспламенения для узкой полоски и широкой, но тонкой пластины металла).

Несмотря на успехи в применении приближенных методов исследования, ряд вопросов оставался невыясненным. Это было связано с математическими сложностями, встречающимися на пути построения корректных приближений. Представляли также интерес вопросы о протекании нестационарной стадии нагрева. С точки зрения математической, интерес к краевым задачам типа (2) обусловлен тем, что эти задачи, во-первых, включают сильную нелинейность в граничном условии, а во-вторых, они содержат в явном виде пространственно неоднородный, локализованный источник $I(r)$. Совокупность этих факторов приводит к появлению новых свойств решений рассматриваемых краевых задач.

Все это стимулировало развитие и применение мощных математических методов, развитых специально для задач подобного типа. Такие исследования были выполнены в цикле работ [17–19]. Приведем некоторые строгие результаты относительно краевой задачи (2), полученные в этих работах. Пусть $I(r)$ — монотонно убывающая функция радиальной координаты. Тогда

- 1) существует граница устойчивости $I_0 = h(r_0)$, разбивающая плоскость параметров $\{I_0, r_0\}$ на две области: область $G^{(+)}$, где существуют решения, и область $G^{(-)}$, где стационарных решений нет (см. рис. 4);
- 2) функция $I_0 = h(r_0)$ является монотонно убывающей;
- 3) при $(I_0, r_0) \in G^{(+)}$ среди всех стационарных решений задачи (2) имеется минимальное (не превосходящее любого другого в каждой точке) $u = u_{\min}(r, z)$, которое является устойчивым. Это решение может быть найдено методом итераций.

Тем самым, дано строгое обоснование результатам, полученным приближенными методами.

Одним из наиболее интересных результатов было установление достаточных условий монотонности границы. Именно, в случае граничного условия весьма общего вида

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{\partial \Omega} = F(r, T; I_0, r_0) \Big|_{\partial \Omega}, \quad \partial \Omega = \{r \geq 0, z = 0\}; \quad (3)$$

$$F(r, 0; I_0, r_0) > 0 \text{ при } r > 0$$

граница устойчивости представима в виде однозначной монотонно убывающей функции $I_0 = h(r_0)$, если

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad \partial F / \partial I_0 &\geq 0, \\ \text{(б)} \quad \partial F / \partial r_0 &\geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь условие (а) обеспечивает однозначность, а условие (б) — монотонность границы. Эти результаты легко обобщаются на тот случай, когда вместо параметров (I_0, r_0) рассматриваются любые другие, входящие в функцию F . Именно, если таковым параметром является α , то при условии $\partial F / \partial \alpha \geq 0$ граница устойчивости (например, в форме $I_0 = f(\alpha)$) монотонно убывает с ростом α .

Если значения параметров (I_0, r_0) таковы, что стационарных решений нет, то при любых начальных условиях формируется фронт горения, охватывающий всю поверхность вещества. При этом на достаточно больших временах решение можно приближенно записать в автомоделльной форме

$$T(r, z, t) \approx T_1(t) f[rb(t), z/b(t)], \quad (5)$$

причем $T(t) \sim t^{1/2}$, $b(t) \sim t^{1/2}$.

Вместе с тем, начальная стадия горения, пока $T \ll T_a$, происходит в режиме локализации с обострением. Причина здесь проста: вследствие экспоненциальной зависимости скорости реакции от температуры $\sim \exp(-T_a/T)$ энерговыделение реакции при $T \ll T_a$ возрастает очень сильно даже при небольших изменениях температуры. Это ведет к явлению, аналогичному обсуждавшейся выше термохимической неустойчивости. Именно этот эффект и проявился на рис. 1 (при зажигании и горении титана).

Граничное условие (3) во многих случаях можно аппроксимировать функцией вида

$$F(r, T; I_0, r_0) = AI_0(r/r_0) + g(T), \quad g(T) = T^\alpha, \quad (6)$$

где энерговыделение имеет степенной характер. Такое приближение позволяет, в частности, исследовать поведение температурного поля в окрестности стационарных состояний. Исследованию краевой задач

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad \Omega = \{r \geq 0, z > 0\}; \\ -k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{\partial \Omega} &= AI(r) + g(T) \Big|_{\partial \Omega}, \quad \partial \Omega = \{r \geq 0, z = 0\} \end{aligned} \quad (7)$$

с функцией $g(T) = T^\alpha$ посвящен цикл работ [18, 20, 21]. Среди наиболее важных результатов исследования можно выделить следующие утверждения:

1. При всех $\alpha \leq 2$ задача не имеет конечных стационарных решений. Этот результат имеет место при любом распределении интенсивности излучения $I(r)$, не обращающемся в нуль тождественно.
2. При $\alpha > 2$ существует граница устойчивости $I_0 = h(r_0)$, которая в случае источника $I(r/r_0) = I_0 \exp(-r^2/r_0^2)$ монотонна и однозначна.
3. При $\alpha > 2$ и всех $I_0 > h(r_0)$ существует устойчивое минимальное решение.
4. Если $I_0 > h(r_0)$ (при $\alpha > 2$) или $\alpha \leq 2$, когда стационарных состояний нет, то временная эволюция температурного поля происходит в режиме локализации с обострением.

Излучение играет роль затравки, которая инициирует неограниченный рост температуры. На больших временах, когда собственное энерговыделение реакции превышает энергию излучения, оказывается

$$T_A = (t_0 - t)^{-(\alpha-1)/2} f(\xi, \eta);$$

$$\xi = \frac{r}{\sqrt{t_0 - t}}, \quad \eta = \frac{z}{\sqrt{t_0 - t}}, \quad t < t_0. \quad (8)$$

Это решение представляет собой типичный автомодельный LS-режим. Разница, по сравнению со случаем краевой задачи (2), состоит в том, что в приближении (6) экзотермический источник не имеет насыщения.

Диффузионное лимитирование реакции. Как отмечалось выше, в экспериментах не наблюдалось распространения фронта горения на всю поверхность вещества, если только не были приняты специальные меры. Естественно было предположить, что локализация горения на поздних стадиях связана с недостатком окислителя в окружающей газовой среде. В самом деле, чем выше температура и чем выше темп реакции, тем интенсивнее отбирается из воздуха кислород, тем меньше его остается в воздухе. В то же время, пополнение его запасов может осуществляться за счет каких-либо процессов переноса (диффузия, конвекция и др.), каждый из которых обладает инерционностью, т. е. происходит с задержкой. В результате темп реакции начинает падать, снижается ее энерговыделение. В результате теплопроводность уже не может обеспечить достаточного прогрева соседних (с зоной облучения) участков вещества, чтобы инициировать реакцию. Таким образом, для создания распространяющегося фронта горения нагреваемый образец должен иметь относительно небольшие размеры, либо нужно снять лимитирование по подводу окислителя к поверхности вещества. Оба эти вывода были подтверждены в многочисленных экспериментах (см., например, [13, 14]).

С формальной точки зрения, указанный фактор можно описать, утя явнo процесс подвода окислителя. Например, если определяющим

является диффузионный механизм подвода, то соответствующая краевая задача нагрева тонкой пластины (толщиной h) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \alpha \Delta_2 T + \frac{1}{c\rho h} \left[I(r) + w \frac{N}{N_0} \nu_0 \exp\left(-\frac{T_\alpha}{T}\right) - \eta(T - T_0) \right], \\ & \quad r \geq 0, \quad z = 0; \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= D \Delta_3 N, \quad r \geq 0, \quad z > 0; \\ D \frac{\partial N}{\partial z} &= N \frac{N'_0}{N_0} \exp\left(-\frac{T_\alpha}{T}\right), \quad r \geq 0, \quad z = 0; \\ N &\rightarrow N_0 \text{ при } r, z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь N — плотность кислорода в воздухе; N_0 — его плотность вдали от зоны реакции; N'_0 — плотность кислорода в окисле; D — коэффициент диффузии кислорода; T_0 — температура окружающей среды; ν_0 , T_α — константы закона окисления; w — удельная теплота реакции при $N = N_0$; c, ρ — удельная теплоемкость и плотность пластины; Δ_2 и Δ_3 — двумерный и трехмерный лапласианы. Анализ этой задачи [22, 23] подтвердил справедливость предположения.

Вместе с тем, анализ позволил объяснить еще один эффект, наблюдавшийся в ряде экспериментов: оказалось, что при некоторых условиях горение может протекать в колебательном режиме: температура вещества и размер зоны горения совершают периодические или более сложные колебания. Одно из первых наблюдений колебательно-го режима лазерного горения титана и смены характера колебаний при изменении параметров излучения было описано в [24]. В [25] было предложено объяснение колебаний, основанное на предположении о диффузионном механизме лимитирования реакции: высокий темп реакции ведет к уменьшению количества окислителя вблизи поверхности и, следовательно, к затуханию реакции. В результате темп потребления кислорода снижается, благодаря диффузии его количество вблизи поверхности возрастает и реакция разгоняется. Затем цикл повторяется. Возможность возникновения таких колебаний обусловлена, естественно, соотношением между временем диффузии и скоростью реакции. Однако в любом случае распространение фронта реакции далеко за пределы пучка лазерного излучения возможно лишь при очень высоких скоростях переноса окислителя, когда эффекты лимитирования не сказываются.

Разумеется, колебательные режимы горения под действием излучения далеко не во всех случаях обусловлены диффузионным лимитированием реакции. Например, в работе [27] было показано, что автоколебания при горении металлов типа вольфрама объясняются конкуренцией двух процессов: роста окисла и его испарения. Первый процесс сопровождается энерговыделением и приводит к горению металла. Кроме того, образование окисного слоя ведет к созданию защитной пленки, замедляющей доступ окислителя к поверхности металла и,

следовательно, тормозящей реакцию. Второй же процесс (испарение), наоборот, очищает поверхность металла и создает условия для ускорения реакции. Поскольку характерные скорости этих двух процессов отличаются, то реакция может приобретать колебательный характер: горение то усиливается, то затухает.

В неоднородном поле излучения в дополнение к указанным «степеням свободы» появляется новая — теплопроводность. В результате характер горения еще более усложняется: наряду со стационарным режимом и периодическими автоколебаниями могут возникать сложные аperiodические колебания температурного поля. Подробное исследование таких режимов выполнено в цикл работ [28–31].

О других локализованных структурах. Возникновение нетривиальных структур в условиях пространственной однородности исходной системы наблюдается довольно часто. Эффективный пример крупных кристаллов V_2O_5 обнаружен в [26] (см. рис. 5).

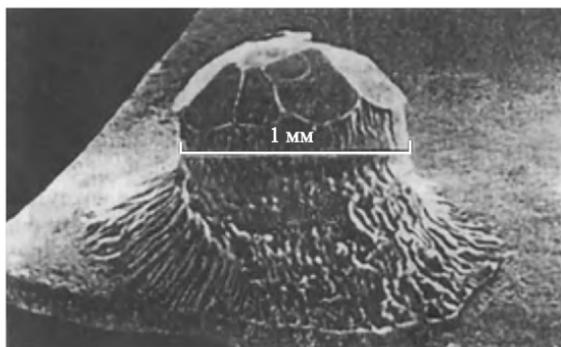


Рис. 5. Фотография кристалла V_2O_5 , образовавшегося в окислительно-восстановительной атмосфере (NH_3+O_2) под действием непрерывного излучения CO_2 -лазера мощностью 20 Вт. Диаметр кристалла около 1 мм

В последние годы внимание привлекают процессы лазерной микротехнологии. Они имеют большое значение, например, для микроэлектроники. Вместе с тем, технологи обратили внимание на то, что в таких процессах часто возникают пространственно-неоднородные структуры различной сложности. Это тем более удивительно, поскольку в таких процессах обычно принимают специальные меры, чтобы никакой непредусмотренной неоднородности не возникло. Одним из таких процессов является лазерное осаждение вещества из газовой фазы. Осаждают как металлы, так и полупроводники. Этот процесс организуется так, что химическое соединение, находящееся в газовой фазе, разлагается под действием лазерного излучения (терморазложение) и атомы осаждаются на твердую поверхность. Часто требуется «нарисовать» дорожку на поверхности диэлектрика, причем эта дорожка должна обладать высокой степенью однородности. С этой целью

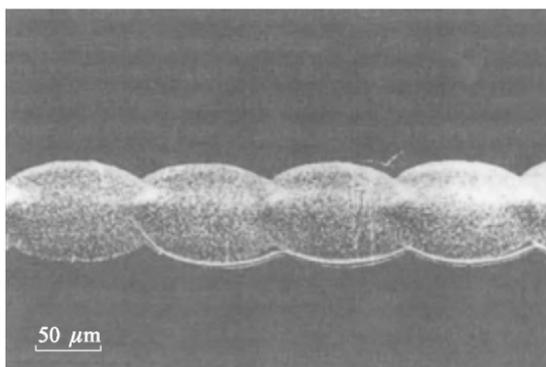


Рис. 6. Периодическая структура дорожки из вольфрама, осажденного из газовой смеси $WCl_6 + H_2$ под действием излучения непрерывного Ag^+ -лазера ($\lambda = 514,4$ нм) мощностью 650 мВт. Излучение фокусировалось в пятно диаметром 15 мкм. Скорость сканирования 15 мкм/с

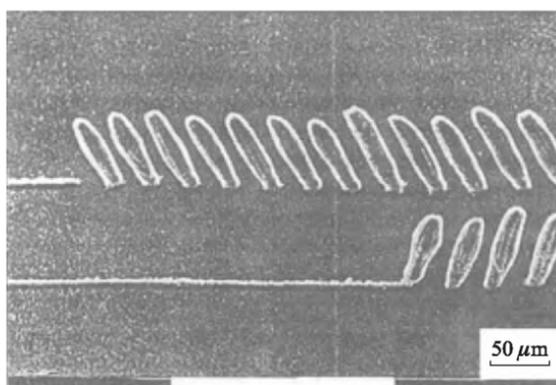


Рис. 7. Осадок кремния, полученный из газообразного SiH_4 под действием Ag^+ -лазера диаметром 3 мкм,двигающегося со скоростью 15 мкм/с

используется высокостабильное непрерывное излучение, которое равномерно движется по поверхности вещества. Установлено, что дорожка оказывается однородной лишь при достаточно высоких скоростях движения лазерного пучка. Если же движение пучка излучения замедляется, то толщина дорожки начинает пульсировать, а при достаточно малой скорости дорожка вообще разбивается на серию локализованных стержней, не контактирующих между собой. На рис. 6 показан пример пульсирующей дорожки вольфрама, осаждаемой из соединения WCl_6 на поверхность кварца [32]. На рис. 7 приведена фотография дорожек, получаемых при осаждении кремния из газообразного SiH_4 [33]. Скорость движения луча составляла 15 мкм/с, а мощность излучения плавно менялась от 53 до 63 мВт. На нижней дорожке луч двигался

слева направо, а мощность его возрастала; на верхней дорожке направление движения было справа налево, а мощность убывала. При этом одной и той же горизонтальной координате отвечала одна и та же мощность излучения. Таким образом, вместо непрерывной однородной дорожки возникает серия изолированных стержней, стоящих на поверхности и наклоненных по ходу движения лазерного пучка. Диаметр стержней оказывается в несколько раз больше диаметра дорожки в момент переключения. Аналогичный эффект наблюдался и при постоянной мощности излучения, но медленно меняющейся скорости сканирования. Как видно из рисунка, при плавном изменении условий протекания реакции возникают локализованные структуры, т. е. структуры с симметрией, не обусловленной симметрией исходной системы.

В данной ситуации механизм возникновения структур имеет иную природу, чем в задачах горения. Здесь существенную роль играет изменение формы поверхности в ходе процесса, благодаря чему меняется структура тепловых потоков в веществе. Другими словами, обратная связь между темпом реакции и температурой «проходит» через геометрию поверхности [34]: чем интенсивнее нагрев, тем выше темп реакции и тем сильнее деформируется поверхность. При этом отток тепла из зоны реакции уменьшается, что и приводит к явлению, аналогичному термохимической неустойчивости.

Заключение. Мы рассмотрели появление локализованных структур под действием непрерывного лазерного излучения. Ряд структур удается объяснить не только качественно, но и количественно. Возникновение же некоторых структур (типа показанной на рис. 5) пока остается неясным. В то же время, имеются общие причины — почти философского уровня, лежащие в их природе — это то, что изучаемые системы являются диссипативными и нелинейными, а кроме того, имеется положительная обратная связь. В конечном счете, путеводной нитью, позволяющей понять хоть бы качественно, общую природу наблюдаемых здесь эффектов, является концепция локализованных структур, развивающихся в режиме локализации и обострения, значительный вклад в создание которой внесли С. П. Курдюмов и его школа.

Список литературы

1. Курдюмов С. П. // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики: Сб. — М.: Наука, 1982. — С. 217–243.
2. Бункин Ф. В., Кириченко Н. А., Лукьянчук Б. С. // Квантовая электроника. — 1980. — Т. 7. — С. 2658–2660.
3. Бункин Ф. В., Кириченко Н. А., Лукьянчук Б. С. // УФН. — 1982. — Т. 138. — С. 45–94.
4. Кириченко Н. А., Лукьянчук Б. С. // Квантовая электроника. — 1983. — Т. 10. — С. 819–825.
5. Бобырев В. А., Бункин Ф. В., Кириченко Н. А. и др. // Физика и химия обработки материалов. — 1988. — № 3. — С. 19–26.

6. *Трибельский М.И.* // Изв. АН СССР. Сер. физ. — 1982. — Т. 46. — С. 1127–1134.
7. *Алимов Д.Т., Бункин Ф.В., Едвабный И.В. и др.* // Поверхность. — 1982. — № 9. — С. 82–90.
8. *Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б. и др.* Математическая теория горения и взрыва. — М.: Наука, 1980. — 478 с.
9. *Зельдович Я.Б., Компанеец А.С.* // Сб., посвященный 70-летию акад. А.Ф. Иоффе. — М.: Изд-во АН СССР, 1950. — С. 61–71.
10. *Зельдович Я.Б., Ройзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1966. — 688 с.
11. *Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. и др.* // Препринт ИПМ АН СССР. — М., 1977. — № 103. — 68 с.
12. *Бонч-Бруевич А.М., Дорофеев В.Г., Либенсон М.Н. и др.* // ЖТФ. — 1982. — Т. 52. — С. 1133–1138.
13. *Арзуов М.И., Барчуков А.И., Бункин Ф.В. и др.* // Квант. электроника. — 1975. — Т. 2. — С. 1717–1724.
14. *Бункин Ф.В., Кириченко Н.А., Лукьянчук Б.С. и др.* // Квант. электроника. — 1986. — Т. 13. — С. 1227–1234.
15. *Бункин Ф.В., Кириченко Н.А., Лукьянчук Б.С.* // Квант. электроника. — 1982. — Т. 9. — С. 1959–1967.
16. *Кириченко Н.А., Морозов Ю.Ю.* // Квант. электроника. — 1984. — Т. 11. — С. 2331–2335.
17. *Бункин Ф.В., Галактионов В.А., Кириченко Н.А. и др.* // ДАН СССР. — 1984. — Т. 279. — С. 838–842.
18. *Бункин Ф.В., Галактионов В.А., Кириченко Н.А. и др.* // Изв. АН СССР. Сер. физ. — 1985. — Т. 49. — С. 1046–1053.
19. *Бункин Ф.В., Галактионов В.А., Кириченко Н.А. и др.* // Диф. уравнения. — 1985. — Т. 21. — С. 1947–1958; 2097–2105.
20. *Бункин Ф.В., Галактионов В.А., Кириченко Н.А. и др.* // ДАН СССР. — 1988. — Т. 302. — С. 68–73.
21. *Бункин Ф.В., Галактионов В.А., Кириченко Н.А. и др.* // ЖВМ и МФ. — 1988. — Т. 28. — С. 549–559.
22. *Арнольд И.Л., Кириченко Н.А.* // Препринт № 16. — М.: ИОФАН, 1990. — 20 с.
23. *Карлов Н.В., Кириченко Н.А., Лукьянчук Б.С.* Лазерная термохимия. Основы и применения. — М.: ЦентрКом, 1995. — 368 с.
24. *Бобырев В.А., Бункин Ф.В., Кириченко Н.А. и др.* // Письма в ЖЭТФ. — 1980. — Т. 32. — С. 608–611.
25. *Кириченко Н.А.* // Изв. АН СССР. Сер. физ. — 1989. — Т. 53. — С. 1215–1220.
26. *Бункин Ф.В., Кириченко Н.А., Лукьянчук Б.С.* // Вестн. АН СССР. — 1987. — № 12. — С. 58–72.
27. *Бобырев В.А., Бункин Ф.В., Кириченко Н.А. и др.* // Квант. электроника. — 1983. — Т. 10. — С. 793–797.
28. *Бункин Ф.В., Кириченко Н.А., Курдюмов С.П. и др.* // Препринт ИПМ АН СССР. — М., 1983. — № 81. — 23 с.
29. *Ахромеева Т.С., Бункин Ф.В., Кириченко Н.А. и др.* // ДАН СССР. — 1985. — Т. 281. — С. 55–59.
30. *Ахромеева Т.С., Бункин Ф.В., Кириченко Н.А. и др.* // Препринт ИПМ АН СССР. — М., 1986. — № 41. — 32 с.

31. Ахромеева Т. С., Бункин Ф. В., Кириченко Н. А. и др. // Изв. АН СССР. Сер. физ. — 1987. — Т. 51. — С. 1154–1161.
32. Kargl P. B., Kullmer R., Bäuerle D. // Appl. Phys. A. — 1993. — V. 57. — P. 175–179.
33. Kargl P. B., Kullmer R., Bäuerle D. // Appl. Phys. A. — 1993. — V. 57. — P. 577–578.
34. Кириченко Н. А., Николаева Е. Г. // Квант. электроника. — 1997. — Т. 24. — С. 333–337.

О некоторых свойствах математической модели лазерного нагрева металлов в воздухе

*Т. С. Ахромеева, Ф. В. Бункин, Н. А. Кириченко,
С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский*

В настоящее время большой интерес вызывают задачи лазерной термохимии [1–5]. Это связано, с одной стороны, с наличием принципиально новых возможностей управления реакциями и многочисленными технологическими приложениями, например, при получении полимеров [3], создания различных пленок на поверхности полупроводников [1, 4], лазерном иницировании химических реакций [4] и т. д. С другой стороны, поскольку речь идет о процессах в открытых диссипативных системах, применение в лазерной термохимии идей и методов синергетики [6–8] дает более глубокое понимание механизмов этих процессов. При решении возникающих задач большую роль играют построение и исследование соответствующих математических моделей. Свойства одной из таких моделей и рассматриваются в настоящей работе.

Процесс нагрева тонкой металлической пластины в воздухе лазерным пучком в ряде случаев описывается следующей краевой задачей [1, 2, 5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{c}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + I e^{-r^2/r_0^2} + \frac{\alpha e^{-1/T}}{X} - \beta e^{-k/T} - \delta T, \\ \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{d}{X} e^{-1/T} - \gamma e^{-k/T}, \quad 0 \leq r \leq R, \\ \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} &= \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0, \quad T|_{t=0} = T_0(r), \quad X|_{t=0} = X_0(r). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь r — расстояние от центра симметрии; T — температура; X — толщина окисла; I — интенсивность; r_0 — эффективный радиус пучка излучения. Третье и четвертое слагаемые в первом уравнении учитывают окисление металла и испарение окисла, а последнее — теплообмен с воздухом. Второе уравнение описывает изменение толщины окисного слоя за счет окисления металла и испарения окисла. Соотношения,

связывающие постоянные $c, \alpha, \beta, k, \delta, d, \gamma$ с физическими характеристиками образца, и переход к безразмерным переменным приведены в [5].

Если $r_0 \gg R$ и характерный пространственный масштаб изменения температуры T и толщина слоя окисла X превышает R , уравнения (1) переходят в динамическую систему [1, 2]

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= I + \frac{\alpha e^{-1/T}}{X} - \beta e^{-k/T} - \delta T, \\ \frac{dX}{dt} &= \frac{d}{X} e^{-1/T} - \gamma e^{-k/T}. \end{aligned} \quad (2)$$

Эта система может иметь одну устойчивую точку $T(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \text{const}$, $X(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \text{const}$ или обладать триггерными свойствами: при одних начальных данных $T \xrightarrow{t \rightarrow \infty} T_1$, $X \xrightarrow{t \rightarrow \infty} X_1$, при других $T \xrightarrow{t \rightarrow \infty} T_2$, $X \xrightarrow{t \rightarrow \infty} X_2$. В ней может быть устойчивый предельный цикл: $T(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} T_c(t)$, $X(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} X_c(t)$, причем $T_c(t) = T_c(t + \tau_0)$, $X_c(t) = X_c(t + \tau_0)$, где τ_0 — период решения. Такой автоколебательный режим наблюдается и экспериментально [1, 2].

Во многих задачах значительный интерес представляет случай $r_0 < R$, когда необходимо решать нелинейную краевую задачу (1). Ее анализ естественно начать с численного решения и выяснения основных типов решений. Для этого будем использовать чисто неявную разностную схему [9], в которой шаги по времени τ и по пространству h выбираются на основе тестовых расчетов. Далее в этой работе $h = 0,034$, $\tau = 0,01$. Зафиксируем параметры образца: $c = 0,1$; $\alpha = 9,0$; $\beta = 0$; $k = 0,6$; $\delta = 9,0$; $d = 0,894$; $\gamma = 1,0$, а также начальные данные $T_0(r) = 0,142$, $X_0(r) = 0,075$ — и будем менять интенсивность I и радиус пучка r_0 так, чтобы полная мощность излучения $P = \pi r_0^2 I$ оставалась постоянной.

При указанных значениях параметров в системе (2) при $I > 1,90$ происходит выход на устойчивую особую точку, при $1,22 < I < 1,81$ — на предельный цикл. Если $I \rightarrow 0$, температура также уменьшается и характерные времена процессов неограниченно возрастают. Рассмотрим теперь задачу (1). Пусть $I = 5,4$; $R = 2,0$; $r_0 = 0,408$. Вначале наблюдается переходный процесс: от центра пластины по радиусу распространяется тепловая волна, за которой толщина окисла возрастает. Такая начальная стадия характерна и для других значений параметров, ее типичная картина приведена в работе [5]. Затем происходит выход на стационарное распределение толщины окисла и температуры. При этом температура монотонно убывает с ростом r , толщина окисла вначале уменьшается (например, $X(0, t) = 0,61$; $X(0,68, t) = 0,08$), достигая минимума, а затем растет и при $r > 1,0$ практически не меняется. В ряде задач синергетики структуры в открытых диссипативных системах не зависят от деталей начальных данных. Тем же свойством обладает и изучаемая задача — изменение начальных данных в широких пределах не меняет установившегося профиля температуры и окисла.

Уменьшим интенсивность пучка: $I = 4,59$, $r_0 = 0,443$. Устанавливающийся при этом режим оказывается качественно иным. В центре температура и толщина окисла меняются периодически по времени, причем с ростом r амплитуда колебаний убывает и при $r > 1,2$ толщина окисла уже не меняется. Таким образом, мы имеем дело с эффективно локализованным автоволновым процессом. О локализации позволяет судить и независимость процесса от R . Увеличение размеров образца не меняет периода колебаний и их амплитуды. Можно также указать расстояние, начиная с которого действие двух пучков будет независимым в установленном режиме (последнее важно, поскольку на начальной стадии локализации нет). Явление локализации сейчас интенсивно изучается теоретически. В ряде задач оно имеет принципиальное значение [8]. Здесь его механизм можно пояснить так. После переходного процесса функция $X(r, t)$ при $r \gtrsim r_0$ такова, что правая часть первого уравнения в задаче (1) эквивалентна току, поэтому $T(r, t)$ быстро падает с ростом r и резко уменьшаются скорости окисления металла и испарения окисла. И начиная с некоторого значения толщина окисла практически не меняется, процесс оказывается эффективно локализован.

Автоволновой процесс при $I = 4,59$, $r_0 = 0,443$ является сравнительно простым: при каждом $r < r_0$ $T(r, t)$ и $X(r, t)$ один раз за период достигают максимума и минимума. Ход процесса можно наглядно представить, если отложить по оси абсцисс $X = X(0, t)$, по оси ординат $T = T(0, t)$. Рассмотренному периодическому решению соответствует простейшая замкнутая кривая $F(X(0, t), T(0, t)) = 0$ без самопересечений. Динамическая система (2) может описывать только такие автоколебательные процессы [12]. Однако, как показывают исследования системы с тремя и большим числом степеней свободы [10] и уравнений в частных производных [11], в них возможна более сложная временная упорядоченность и стохастические режимы.

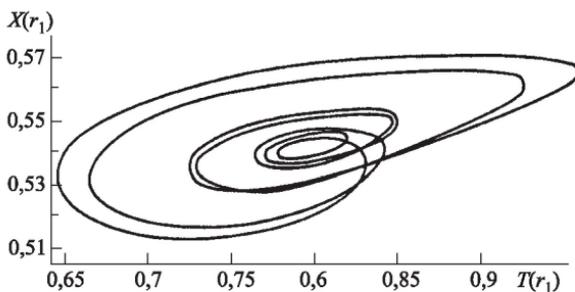


Рис. 1. Пример кривой $F(X, T) = 0$ для случая, когда в системе возникает сложная пространственно-временная упорядоченность; $r_1 = 0$

Пусть, например, лазерный пучок имеет параметры $I = 3,6$, $r_0 = 0,5$. Здесь также будет происходить выход на периодический режим, но на более сложный (см. рис. 1). Но при этом за период температу-

ра и толщина окисла в центре 7 раз достигают максимума. Кривая $F(X, (0, t), T(0, t)) = 0$ имеет и самопересечения, а следовательно, одним и тем же значениям $T(0, t)$, $X, (0, t)$ могут соответствовать различные скорости изменения этих величин. Если рассмотреть аналогичные кривые для других значений, то качественно картина будет такой же, но кривая $F(X, (0, t), T(0, t)) = 0$ будет деформироваться. Отметим, что и в этом случае процесс эффективно локализован, уже при $r > 1,0$, $\max_{t \gg \tau_0} T(r, t) < 0,02$, τ_0 — период решения. Число распределенных систем, где сейчас найдена такая сложная временная упорядоченность, невелико [6, 7, 11].

Механизм перехода от простейших периодических решений к более сложным интенсивно изучается для разнообразных нелинейных систем [10, 11]. Для многих из них наличие аналогов двух последних решений означало бы, что при промежуточном значении параметра должен наблюдаться неперiodический режим. Посмотрим, есть ли такие решения в задаче (1).

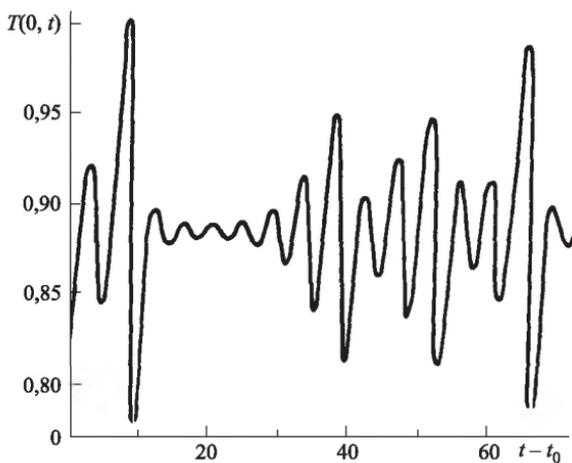


Рис. 2. Закон изменения температуры в центре симметрии, когда в системе наблюдается стохастический режим; $t_0 = 205,9$

Картина изменения температуры в центре пластины при $I = 4,5$, $r_0 = 0,471$ показана на рис.2. Видно, что на рис.2 нет повторяющихся участков и амплитуда локальных максимумов $T(0, t)$ меняется по сложному закону. Чтобы судить о стохастичности процесса, воспользуемся следующим приемом [10]. Выделим последовательность локальных максимумов $T(0, t)$ и обозначим их через M_1, \dots, M_n . Если при $t \rightarrow \infty$ процесс периодичен, то $M_p = M_{p+k}$, начиная с некоторого p (например, при $I = 3,6$, $r_0 = 0,5$, $k = 7$). Если процесс стохастичен, то $\{M_n\}$ — последовательность случайных чисел, именно ее статистические свойства мы будем исследовать. В этом расчете среднее

значение $\overline{M}_n = 0,919$ (среднее значение по вдвое меньшему количеству максимумов отличалось от этого значения не более, чем на 0,001), дисперсия $\sigma(M_n) = 2,81 \cdot 10^{-2}$, $99,7 < t < 540$, общее количество максимумов $N = 120$. Автокорреляционные функции, посчитанные по этой выборке, убывают, что также говорит в пользу случайного характера последовательности $\{M_n\}$. Все это дает основания полагать, что мы имеем дело со стохастическим автоволновым процессом либо со сложным периодическим решением с периодом $\tau_0 > 440$, имеющим более $N = 100$ локальных максимумов на одном периоде. Отметим, что сложные неупорядоченные процессы в лазерной термохимии наблюдались и экспериментально [2].

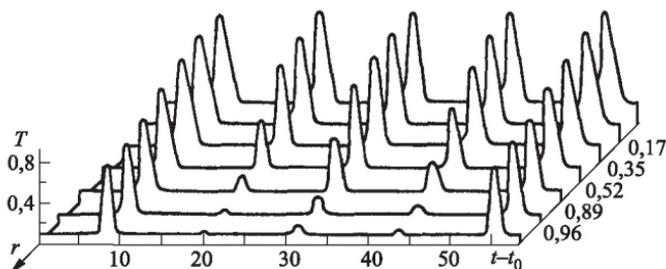


Рис. 3. Изменение температуры со временем в различных точках образца; $t_0 = 99,73$

При дальнейшем уменьшении параметра I колебания температуры становятся релаксационными. При этом у решения появляется интересное свойство. Рассмотрим его на примере расчета для $I = 1,8$, $r_0 = 1,0$; в отличие от предыдущих, здесь $R = 1,0$ и $Ir_0^2 = 1,8$. Закон изменения температуры и толщины окисла по времени в различных точках образца показан на рис. 3. Радиус R области здесь таков, что локализации процесса не наблюдается. Видно, что максимумы температуры с амплитудой $T_{\max} > 0,9$ при $r = 0,03$ следуют с периодом $\tau_0 = 12,5$. В точке $r = 0,35$ они уже идут с периодом $2\tau_0$, а в точке $r = 0,86$ — с периодом $4\tau_0$. Аналогично меняется и временная зависимость толщины окисла с ростом r . При $r = 0,03$ толщина окисла меняется с периодом τ_0 , на краю образца — с периодом $4\tau_0$ (см. рис. 4). Наблюдаемая картина качественно отличается от ранее описанных автоволновых процессов [6–8, 11], которые обычно исследуются для систем с однородными по пространству параметрами. Обычно в теории колебаний подчеркивается, что нелинейная диссипативная система может вести себя как генератор [12]. Рассмотренная здесь открытая распределенная система ведет себя и как делитель частоты [13] — тепловые импульсы большой амплитуды следуют с разной частотой в разных точках системы.

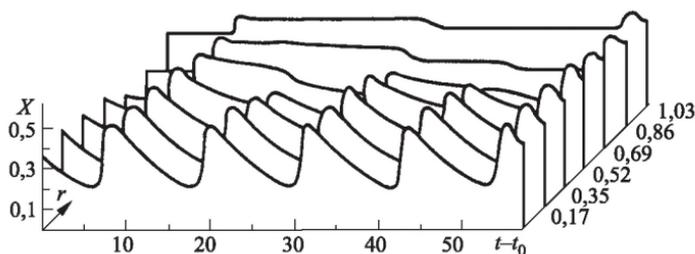


Рис. 4. Зависимость толщины окисла от времени

Проведенные расчеты показывают, что даже в простейшей модели лазерной термохимии могут существовать сложные автоволновые процессы. Большой интерес представляет экспериментальное исследование локализованных колебательных режимов, сложной временной упорядоченности и стохастических режимов, а также эффекта деления частоты. Возможно, описанные выше режимы являются достаточно общими и характерны для многих пространственно неоднородных диссипативных систем.

Доклады Академии наук СССР.
1985. — Т. 281. № 1

Поступила
12.07.1984

Список литературы

1. Бункин Ф. В., Кириченко Н. А., Лукьянчук Б. С. // УФН. — 1982. — Т. 138, вып. 1.
2. Бобырев В. А., Бункин Ф. В., Кириченко Н. А. и др. // Квант. электроника. — 1982. — Т. 9, № 4. — С. 695.
3. Карлов Н. В., Карлова Е. К., Кириченко Н. А. и др. // Квант. электроника. — 1982. — Т. 9, № 10.
4. Калдор Э., Вудин Р. Л. // ТИИЭР. — 1982. — Т. 70, № 6. — С. 46.
5. Бункин Ф. В., Кириченко Н. А., Курдюмов С. П. и др. // Препринт ИПМ АН СССР. — М., 1983. — № 81.
6. Николис Г., Пригожий И. Самоорганизация в неравновесных системах. — М.: Мир, 1979.
7. Хакен Г. Синергетика. — М.: Мир, 1980.
8. Курдюмов С. П. Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. — М.: Наука, 1982. — С. 217.
9. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977.
10. Странные аттракторы. — М.: Мир, 1981.
11. Ахромеева Т. С., Малинецкий Г. Г. // Препринт ИПМ АН СССР. — М., 1983. — № 140.
12. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Наука, 1981.
13. Слуцкий В. З., Фогельсон Б. И. Импульсная техника и основы радиолокации. — М.: Воениздат, 1975.

Синергетика и демография

С. П. Капица

1. Постановка демографической проблемы. Проблемы демографии в свете представлений и методов синергетики следует считать поучительным примером того, как можно в терминах конструктивной математической модели рассмотреть важнейшую глобальную проблему. Обсуждение этого опыта полезно как для понимания того, что можно ожидать от синергетики, так и для того, чтобы увидеть, на какие вопросы в общественных науках можно ответить, обращаясь к представлениям синергетики [1].

Опыт демографии оказался удачным, потому что демография имеет дело с количественным измерением состояния общества. Действительно, демография предоставляет как обществоведы, так и физику и математику выверенные численные данные. Это не только число людей, но и их распределения по возрасту и полу, по городам и селам, миграционным потокам. Это данные, которые сегодня дают надежную статистическую основу как для моделирования, так и для анализа историку и экономисту, социологу и психологу.

Более того, число людей — это универсальная мера, она верна в любое время: и сегодня, и две тысячи лет тому назад при Рождестве Христовом, и полтора миллиона лет тому назад численность населения имела один и тот же смысл. Правда, нам эти числа известны с различной степенью точности. Если сегодня, на излете XX в. население Земли приближается к 6 млрд и известно с точностью до 3%, или ± 200 млн, то 2000 лет тому назад оно составляло от 100 до 250 млн, а в Нижнем Палеолите численность наших очень далеких предков была порядка ста тысяч. Однако и тогда и сегодня эти цифры имеют объективный смысл. Если экономист и может пересчитать 30 серебряников в доллары, то вряд ли результаты таких расчетов могут служить основой для анализа движения капитала в восточных провинциях Римской империи.

Удивительнее другое. Имея дело с количественными данными по развитию общества, демографы как бы держали их при себе, а историки редко обращались к демографическим данным для характеристики той или иной страны и исторической эпохи. Мало кто знает население России во времена царствования Петра I, в то время как годы его жизни помнят все. В интереснейшем обзоре И. М. Савельевой и А. В. Полетаева [4], где изложена эволюция наших представлений о времени как количественном и качественном понятии истории, демография вообще не упоминается среди 1500 ссылок на литературу. Заметим только, что из крупных историков только Фернан Бродель, более всего цитируемый авторами упомянутой монографии, придает

существенное значение данным демографии как количественной категории истории.

Демографы, «приватизировав» данные демографии, также не склонны были расширять область исследований, поскольку считали своим основным долгом обслуживать статистическими данными государственный аппарат, социологов, здравоохранение. В нашей стране долгие годы эти данные были закрыты и вообще отсутствовали в обороте общественных наук. Если до 30-х годов в СССР было два журнала по демографии, то сегодня нет ни одного специального журнала, посвященного этой тематике, несмотря на то, что она имеет большое значение, особенно в годы глубоких и быстрых социальных изменений.

Если мы обратимся к основным работам по синергетике, то и там демографическая проблема практически не упоминается, в то время как имеется множество работ по моделированию всевозможных задач о динамике хищников и жертв, размножающихся и пожирающих друг друга в отвлеченных пространствах. При всем значении, которое имеют такие фундаментальные исследования, их соотнесение с реальным миром, описываемым демографическими данными, связанными самым непосредственным образом с судьбами человечества, не происходило. Может быть, здесь несколько драматизирована ситуация, однако в основе ее лежит обособленность различных областей знания. Этот интеллектуальный изоляционизм происходит от желания сохранить, сохранить часто любыми силами свою область. Чувства эти особенно обостряются тогда, когда дела с наукой плохи, когда интерес в обществе к ней падает. Это происходит оттого, что со временем, особенно в замкнутых интеллектуальных анклавах, в силу многих причин — в том числе и от исчерпания возможности старых методов и ограниченности поля поиска, все труднее становится достичь успеха и признания. В то же время внешнему потребителю знаний становится все труднее проникнуть в цитадель специальных исследований, часто отгороженных от мира терминологическим частоколом и профессиональным жаргоном.

В этих условиях особенно важным становятся опыты по междисциплинарному сотрудничеству, и здесь существенная роль принадлежит синергетике. Однако всякая попытка синтеза лучше всего развивается на почве конкретных задач и четко поставленных проблем. Такими для Г. Хакена стали вопросы классической теории колебаний, возникшие при анализе поведения лазеров — автогенераторов со многими степенями свободы. Результатом этих исследований стал не только новый этап в развитии теории нелинейных колебаний, которые до этого были связаны с работами Пуанкаре и Ляпунова, Ван-дер-Поля и Андронова, Крылова и Боголюбова. Быть может, важнее всего было то, что удалось осознать важность всей области анализа динамики сложных систем. При этом нелинейность перестала рассматриваться как возмущение в поведении линейной системы, а стала самой характерной чертой нового, широкого класса проблем. Так возникла синергетика как наука

о сложных динамических системах, законах их роста, развития и самоорганизации.

Недавно, как раз при обсуждении значения нелинейных методов в демографии, встал вопрос о том, как определить нелинейные задачи. Если мы скажем, что это — все, кроме линейных задач, естественное, казалось бы, определение, то все множество таких задач окажется совершенно несоизмеримым со множеством задач линейных. Однако развитие и проблематика синергетики показали, что здесь выделен существенный класс задач, который позволяет заявить о том, что для их решения и анализа есть свои методы и представления. Быть может, такое операционалистское определение позволит очертить уже в реальном мире, а не в области абстракций, проблему синергетики.

Понять смысл и содержание синергетики, пусть и не в полной мере, позволит, в частности, приложение ее методов к проблемам демографии [2]. Именно этот вопрос больше всего интересовал автора. Опыт использования методов синергетики в демографии позволит, если и не определить все поле действия ее понятий, то, по крайней мере, на практически важном примере продемонстрировать ее возможности.

Этот подход оказался особенно плодотворным тогда, когда объектом исследования стала не отдельная страна или регион, а все человечество. Если для синергетики такое обобщение представляет собой естественный шаг, то для демографов, привязанных к реалиям страны, района или города, такая степень обобщения кажется если и не невозможной, то по крайней мере малосодержательной. Иными словами, будучи привязанными к детальным данным по рождаемости и смертности, миграции, к конкретным представлениям о вкладе перечисленных факторов в динамику народонаселения, демографии, традиционно связанной с обществоведением, трудно отвлечься от фактов реальной жизни, от известного редукционизма при анализе целого. Более того, методы демографии в своей основе представляют линейную теорию, основанную на экстраполяции данных на одно—два поколения вперед. Именно такие, практически важные, прогнозы и делаются.

Однако обобщения, расширение горизонта видения необходимы так же, как необходим переход к рассмотрению всего человечества. Тогда границами сообществ станут не отдельные страны или регионы, искусственно, даже административно-исторически выделенные из ансамбля народонаселения мира, а человечество как единое целое. Здесь сразу же возникает существенное упрощение — не надо рассматривать миграцию населения просто потому, что с Земли практически никому не удалось пока улететь! Это существенно и потому, что при этом очевидным образом практически исключаются из рассмотрения пространственные переменные. Иными словами, из уравнений с пространственной частью в частных производных при некоторых ограничениях мы можем исключить пространственные члены и перейти к обыкновенным дифференциальным уравнениям роста.

С другой стороны, в демографии таких стран как Индия или Китай уже заключена 1/6 или 1/5 всего населения мира, и при этом переход ко всему человечеству не представляется столь значительным шагом в обобщении, тем более что в рамках этих стран наблюдается не меньшее разнообразие социально-экономических условий, чем во всем остальном мире. Иными словами, надо освобождаться от местного масштаба анализа и перейти к более широким его рамкам.

Следующий шаг состоит в том, чтобы раздвинуть временные границы анализа. Если для демографии характерны интервалы времени для экстраполяции данных на одно-два поколения вперед, то при рассмотрении демографической истории всего человечества временные рамки раздвигаются до миллионов лет. Это действительно большой, очень большой шаг в генерализации нашего подхода. Осуществление этой возможности можно достичь, предположив, что развитие человечества, всего человечества, происходит автомодельно.

Смысл этой основной гипотезы состоит в том, что утверждается постоянство относительной скорости роста системы:

$$\lim_{\Delta N, \Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{N - N_1} / \frac{\Delta T}{T - T_1} = \frac{d \ln |N - N_1|}{d \ln |T - T_1|} = \alpha, \quad (1)$$

где N_1 и T_1 — опорные значения численности и времени. В большинстве случаев $N_1 = 0$.

Это — сильное предположение, которое означает, что в каждый момент развитие во времени и рост населения происходит одинаковым, самоподобным образом. Это — своеобразный принцип инерции, принцип неизменности динамического механизма развития. С общей точки зрения, это достаточно сильное ограничение, существенно сужающее класс тех решений, которые могут описывать развитие системы народонаселения мира. Математически такие автомодельные законы роста выражаются степенными законами. При этом исключаются экспоненциальные решения. Исключается логистическое решение, описывающее стремление к пределу населения при исчерпании ресурсов.

Демографы, проанализировавшие рост населения мира, обратили внимание на то, что наблюдаемый закон не является ни линейным, ни экспоненциальным. Однако его прекрасно описывает в диапазоне тысяч лет гиперболический закон при $\alpha = -1$:

$$N = \frac{200 \cdot 10^9}{2025 - T}. \quad (2)$$

Но в этом выражении видели лишь эмпирическую формулу, описывающую развитие численности населения мира на некотором интервале времени. При обработке данных по населению Земли эта же формула была независимо получена и автором. Однако это выражение рассматривали именно как свидетельство того, что рост происходит автомодельным, динамически самоподобным образом. При этом надо

отметить, что эта формула действительно ограничена областью своего применения. Во-вторых, при стремлении времени к 2025 году население мира в соответствии с ней обратится в бесконечность!

Это дало возможность некоторым журналистам не то всерьез, не то с юмором говорить о неминуемом катаклизме, что прозвучало апокалиптически в те годы, 20 лет тому назад, когда у многих на уме был страх перед взрывным ростом населения мира. С другой стороны, если продолжить гиперболический рост в прошлое, то при сотворении мира во время Большого взрыва 20 млрд лет тому назад получается столь же нелепый результат, поскольку в то время должно было уже быть десять космологов, несомненно обсуждавших все величие происходящего! Однако, как справедливо указывал Г. И. Баренблатт, всякое автомодельное решение имеет ограниченную область применения.

Наконец, простой анализ показывает, что взрывной, гиперболический рост обязан тому, что скорость роста населения пропорциональна квадрату населения Земли. Этот закон роста более стремителен, чем экспоненциальный рост, пропорциональный первой степени населения. Но будучи существенно нелинейным, этот закон применим только ко всему населению мира — квадрат суммы положительных величин больше, чем сумма квадратов слагаемых. Действительно, для таких задач нет принципа аддитивности, суперпозиции решений. По замечанию Я. Б. Зельдовича, для подобных нелинейных задач вместо частных решений и вырождению по параметрам приходят асимптотические решения. Так, в мире линейных колебаний их период не зависит от амплитуды, тогда как рост населения асимптотически не зависит от продолжительности поколений.

Это были важные выводы, так как они открывали возможность дальнейшего изучения роста населения Земли как автомодельной и нелинейной задачи, задачи динамики единой системы, изучать развитие которой можно лишь как целостный объект, а не как сумму отдельных ее частей. Именно это дало возможность обратиться к методам синергетики. Здесь автор более всего обязан С. П. Курдюмову. При обсуждении демографической проблемы стало ясно, что это не только проблематика синергетики, но что здесь мы имеем дело с типичным режимом с обострением. Это действительно был драматический момент прозрения, когда в одном пространственно-временном мгновении столкнулись проблема развития и роста человечества в целом с тем, что для совершенно других, даже в известном смысле противоположных целей, рассматривались подобные взрывные решения. Для этих проблем под руководством А. А. Самарского были развиты мощные математические методы, в том числе и для их численного моделирования [3].

Таким образом, для самой синергетики открылась новая проблематика, новая область распространения ее методов и модельных представлений. Именно это дало возможность не только понять и обосновать многое в развитых нами идеях, но и разобраться с тем, как сочетает-

ся обычная линейная демография с существенно нелинейной теорией роста населения Земли.

2. Методы синергетики в демографии. В основе асимптотических методов синергетики лежит принцип подчинения. Основная идея состоит в том, что при осреднении можно исключить все быстрые переменные и оставить только главную, которую Г. Хакен назвал параметром порядка, поскольку она как бы управляет всеми остальными. В демографической проблеме этой переменной становится число людей на Земле

$$\frac{dN}{dT} = F(N, T, X, Y, \nabla^2 N \dots) \rightarrow f(N, T). \quad (3)$$

В результате осреднения для демографической задачи можно прийти к «укороченному» уравнению роста системы

$$\frac{dN}{dT} = \frac{N^2}{K^2}, \quad (4)$$

записанному в автономной форме, когда скорость роста зависит только от состояния системы, являясь функцией параметра порядка N , и где время $t = \frac{T_1 - T}{\tau}$ выражено в единицах характерного для жизни человека времени $\tau = 42$ годам, а постоянная $K = 67\,000$ представляет число, определяющее все соотношения в полученных результатах. Таким образом, задача существенно упрощается, и решением этого укороченного уравнения является (2).

Однако достигнутые таким путем упрощения приводят к указанным расходимостям гиперболического решения (2) как в далеком прошлом, так и по мере приближении к роковой дате — 2025 году. Мы не будем описывать то, как можно регуляризовать решения и установить границы указанного асимптотического решения [2]. Отметим только, что пределы асимптотики определяются неравенством

$$\left(\frac{dN}{dT}\right)_{\min} \Big|_{T \rightarrow T_0}^{N \rightarrow 1} \geq \frac{1}{\tau} \geq \left(\frac{1}{N} \frac{dN}{dT}\right)_{\max} \Big|_{T \rightarrow T_1}, \quad (5)$$

где T_0 — время в прошлом, когда скорость роста достигает своего минимального значения, при котором прирост всего населения составляет 1 человек за время τ . Это по существу есть условие непрерывности роста. С другой стороны, по мере приближения к критической дате $T_1 = 2025$ г. прирост населения не может стать больше самого населения в мире. Эти условия, связанные с дискретностью времени и численностью населения, делают невозможным переход к пределу (1), тем самым естественно ограничивая область асимптотического решения (2).

Учет этого приводит к оценке начала развития $T_0 = \frac{\pi}{2} K \tau = 4,5$ млн лет тому назад, что хорошо согласуется с представлениями антропологов о начале эпохи антропогенеза. После же 2025 г. модель указывает

на асимптотический переход к пределу населения Земли в $N_\infty = \pi K^2 = 14$ млрд. Эта оценка также хорошо согласуется с расчетами демографов о пределе населения в предвидимом будущем и определена она на основании представлений о демографическом переходе.

Однако если мы обратимся к устойчивости полученных решений, то увидим, что гиперболический рост в линейном приближении неустойчив в смысле Ляпунова. Но это — неустойчивость укороченных уравнений, где нет быстрых переменных, по терминологии Г. Хакена. Именно эти переменные обеспечивают устойчивость полной системы уравнений роста. В демографической проблеме устойчивость определяется пространственными переменными — миграцией населения. Миграция несомненно стабилизирует мировую демографическую систему, что отмечалось историками и демографами. Стабилизация роста населения мира привела к тому, что его рост происходил по предельной траектории (2), и все отклонения от нее приводили к занижению роста. Здесь может быть полезен образ трубы в пространстве динамических переменных. Быстрые демографические процессы удерживают систему внутри определенной области роста и любое отклонение будет только приводить к снижению этой оптимальной его траектории.

В рамках развитой модели легко определить число людей P когда-либо живших на Земле. Для этого надо проинтегрировать рост от T_0 до T_1 года, т. е. фактически до нашего времени. В результате получим

$$P = 2K^2 \ln K = 100 \text{ млрд.} \quad (6)$$

Для этой оценки, чтобы привести ее в соответствие с расчетами антропологов и демографов, которые получили для значения $P = 80\text{--}150$ млрд, длительность поколений принята равной $\tau/2 = 21$ году. Соотношение (6) указывает на то, что весь период роста может быть представлен как геометрическая последовательность $\ln K = 11$ циклов, где каждый следующий короче предшествующего в e раз. В течение каждого цикла жило по $\Delta P = 2K^2 = 9$ млрд людей.

Неравномерность течения и ускорение хода исторического времени происходит в течение всего роста человечества и уже видна, если вдуматься в соотношение хрестоматийной длительности эпох:

Древнего мира,	Средневековья	и Нового времени:
2500	1000	300 лет.

Для модели гиперболического роста полезно ввести мгновенное значение времени экспоненциального роста, которое в удалении от перехода равно

$$T_e = T - T_1, \quad (7)$$

а скорость относительного роста в годовых процентах равна

$$\frac{\Delta N}{N \Delta T} = \frac{100}{T_e} \%. \quad (8)$$

Таким образом, время относительного изменения демографической системы равно удалению в прошлое, поскольку наше время практически совпадает с критической датой демографического перехода. Это растяжение системного времени в прошлом приводит к тому, что для начала Палеолита, полтора миллиона лет тому назад, заметное изменение могло произойти только за миллион лет. Это было известно антропологам, однако понимания причин такой трансформации времени не было. Изменение масштаба системного времени по мере роста человечества показывает, насколько увязано понятие исторического времени с системной динамикой — представление, вытекающее из синергетики, из взаимозависимости, сопряженности времени и численности населения.

Существенно отметить, что историки издавна обращали внимание на то, что есть два понимания времени — время физическое, ньютоновское время, независимое, однородное и линейное, Время-1 и историческое Время-2 [4]. Определенное нами время и есть историческое, системное время человечества.

Такое сокращение исторического времени приводит к тому, что развитие человечества лучше всего представить на логарифмической шкале времени, отсчитываемого от критической даты демографического перехода — момента, когда скорость роста человечества пройдет через свое максимальное значение в 2007 г. Этот момент наступит несколько раньше, чем уход гиперболического решения на бесконечность в 2025 г., поскольку при этом не учитывается обрезание скорости роста при введении времени τ (таблица).

Демографический переход наступает не в силу отсутствия ресурсов, а в силу кинематики развития. В наше время мы находимся в середине этого исключительного в своем роде мгновения в развитии человечества, при котором меньше чем за сто лет коренным образом изменится парадигма его развития. Это реакция системы на невозможность развиваться все быстрее и быстрее — и если сохранился бы автотомельный рост, то население Земли должно было бы удваиваться каждые 15 лет, и сегодня оно превышало бы имеющееся число людей на 1,6 млрд.

Эпоха демографического перехода — это время нестационарного развития и распада, установившегося за миллион лет истории человечества, самоподобного механизма роста. Это время, которое, несмотря на его краткость, переживает 1/10 всех людей когда-либо живших, сопровождается состоянием стресса для отдельного человека, испытывающего трудности адаптации к распаду исторически сложившихся структур общества. Так традиция разрушается демографическим взрывом.

При рассмотрении демографического перехода происходит стыковка двух методов описания роста человечества — асимптотических методов феноменологической теории и методов, основанных на экстраполяции современного состояния населения. Такое соответствие разных теорий может рассматриваться как одно из проявлений принципа соответствия Бора. Так, в случае соответствия квантовой и классической

Развитие человечества в логарифмическом масштабе

Эпоха	Период	Дата (годы)	Число людей	Культурный период		ΔT лет	История, культура, технология			
С		2175	$13 \cdot 10^9$	История	Стабилизация населения Земли	125	Переход к пределу $14 \cdot 10^9$ Изменение возрастного распределения			
		2050	$10,5 \cdot 10^9$		Мировой демографический переход	42	Глобализация Урбанизация			
В	T_1	2007	$7 \cdot 10^9$	Каменный век	Новейшая	42	<i>Настоящее время</i> Компьютеры			
	11	1965	$3,5 \cdot 10^9$			125		Мировые войны Электричество		
	10	1840	10^9			340		Промышленная революция Книгопечать		
	9	1500	500 н. э.			1000		Географические открытия Падение Рима		
	8	2000 до н. э.				2500		Рождество Христово, Греческая цивилизация Индия, Китай, Будда, Междуречье, Египет		
	7	9000	10^8			Неолит		7000	Письменность, города, одомашнивание, сельск. хоз-во	
	6	29000						20000	Керамика, бронза, микролиты	
	5	80000						51000	Заселение Америки	
	4	0,22 млн	10^6			век		Ашель	$1,4 \cdot 10^5$	Номо Sapiens, речь, огонь
	3	0,60 млн							$3,8 \cdot 10^5$	Заселение Европы и Азии Рубила
2	1,6 млн	10^5	Олдувай	$1,0 \cdot 10^6$	Галечная культура Чоппер Номо Habilis					
А	T_0	4,4 млн лет до н. э.	(1)			$2,8 \cdot 10^8$	Отделение гоминоидов от гоминоидов			

механик переход к квантовым представлениям происходит тогда, когда непрерывность изменения состояния системы определяется квантовыми условиями, тогда как в феноменологической теории роста населения это происходит, когда время изменения системы становится порядка характерного времени человека τ . С другой стороны, между временем роста системы t и численностью населения N возникает соотношение дополнительности

$$Nt = K^2, \quad (9)$$

выражающее взаимность и сопряженность двух переменных — t и N .

Зависимость скорости роста от квадрата численности населения (4) не только делает демографическую систему существенно нелинейной, но и ставит вопрос о том, какими факторами это определяется. Именно здесь представления синергетики оказываются особенно ценными. Во-первых, это указывает на общее взаимодействие, охватывающее все человечество и ответственное за ее рост. Это взаимодействие включает в себя все факторы — питание и жилище, энергетику и ресурсы, транспорт и связь, образование и здравоохранение, культуру и науки. Рождаемость, несомненно, важное обстоятельство, но она не является решающим фактором. Более того, чем дальше мы уходим в прошлое, тем рождаемость (и смертность) больше, а их разница — скорость роста — все меньше и меньше. Только по мере приближения к демографическому переходу и во время его прохождения скорость роста достигает своего максимального значения с тем, чтобы при стабилизации населения устремиться к нулю. Так динамика народонаселения мира диктует условия развития человечества, которые могут быть выражены как принцип демографического императива. Его математическим выражением служит принцип подчинения в асимптотических методах синергетики.

Таким образом, глобальное взаимодействие не только определяет характер роста населения, но и обеспечивает синхронизм мирового развития. Эта синхронность отмечалась историками и антропологами на всех стадиях развития человечества. Однако наиболее интересно обсуждение природы этого взаимодействия. Феноменологически оно описывается как эффективное поле, подобно тому, как в статистической физике вводится, например, взаимодействие в уравнение Ван-дер-Ваальса для состояния неидеального газа. Добавочное давление оказывается в этом случае пропорциональным квадрату плотности.

В случае человечества, речь вовсе не идет о взаимодействии «Всех мальчиков со всеми девочками», а о существенной роли информационного обмена между всеми людьми. Именно обмен информацией, имеющей характер цепной реакции, когда умножается число ее носителей, играет определяющую роль в развитии человечества. Информация же передается как вертикально, от одного поколения к другому путем социального наследования, так и горизонтально — во всем пространстве ойкумены. Причем мы с самого начала были информационным

обществом, еще в те времена, когда миллион лет тому назад начала развиваться речь и язык стал инструментом мышления и обмена. Так что информационное общество возникло не только после изобретения книгопечатания или Интернета, а задолго до этого. Недаром Руссо называл человека «говорящим животным».

Так обеспечивался синхронизм развития человечества на просторах Евразии. Если же в силу географических, климатических или политических причин происходил отрыв сообщества от основного массива человечества, то это неминуемо вело к отставанию развития изолята от основной массы населения Земли.

Дальнейшее развитие таких представлений приводит к идее о связи отмеченного взаимодействия с сознанием. Здесь следует отметить, что большинство психологов утверждают: сознание, несомненно, является коллективным явлением. Недавно описание феномена сознания, именно опираясь на представления синергетики и самоорганизации сложных систем, предпринял физик и философ Ф. Капра [5]. И все-таки проблема сознания, будучи центральной проблемой природы Homo Sapiens как человека разумного, еще очень далека не только от разрешения, но и от достаточного понимания путей его объяснения.

Таким образом, мы видим, насколько плодотворным становится обращение к представлениям синергетики для разрешения фундаментальных проблем в общественных науках, в науках о человеке. На примере демографии и динамики роста человечества, понятии о времени в истории, наконец, в проблеме сознания видно, как важно овладение образами и методами синергетики, где без сотрудничества наук, принадлежащих разным культурным и интеллектуальным традициям, невозможно решать глобальные проблемы, стоящие перед человечеством. В этом состоит урок, который можно извлечь из рассмотрения проблем демографии, исследования динамики роста числа людей на Земле и идей синергетики.

Список литературы

1. Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика и прогнозы будущего. — М.: Наука, 1997.
2. Капица С. П. Феноменологическая теория роста населения Земли // УФН. — 1996. — Т. 16, № 1.
3. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1986.
4. Савельева И. М., Полетаев А. В. История и время. В поисках утраченного. — М.: Гнозис, 1997. — 850 с.
5. Capra F. The Web of Life. — N. Y., 1996.

V. ПРИЛОЖЕНИЯ

Научное творчество С. П. Курдюмова и теория режимов с обострением

Г. Г. Малинецкий

Наверно естественно, что о замечательном человеке, многое подарившем людям, возникают легенды. На конференции «Математика, компьютер, образование» в Пущино в январе 2005 г. Сергея Павловича Курдюмова уже не было. Конференциям этой серии, которые собираются уже более десятка лет благодаря энтузиазму профессора Г. Ю. Ризниченко и других сотрудников кафедры биофизики биологического факультета МГУ, Сергей Павлович придавал большое значение. Ему казалось очень важным рассказать учителям, преподавателям, профессорам из разных городов о том, что происходит на переднем крае науки. Показать масштаб тех проблем, которые стоят перед наукой и человечеством, «зажечь». Он был душой этих конференций.

На Пущинской конференции Сергею Павловичу было посвящено несколько стендов. И при мне двое участников спорили о том, кем же был Сергей Павлович — физиком, математиком, философом. Вспоминали свои встречи с ним, делились впечатлениями. Разным людям запоминается разное, со временем обрастает патиной подробностей и превращается в легенду. Такие же разговоры шли и на семинаре по синергетике «на 31 этаже МГУ», который проводился в конце февраля 2005 г.

Сергей Павлович всерьез относился к синергетике — к науке, которой занимался — и применял ее идеи и представления не только к научным сущностям, но и к жизненным реалиям. Его любимым образом был режим с обострением — такой закон эволюции, при котором одна или несколько наблюдаемых величин обращается в бесконечность за конечный промежуток времени. Иногда это были бодрые суждения: «Значение идей синергетики для научного сообщества растет в режиме с обострением. И это прекрасно!» Иногда грустные: «Время между

операциями уменьшается в геометрической прогрессии — процесс идет в режиме с обострением».

Думаю, что и к воспоминаниям, и к легендам о себе Сергей Павлович подошел бы с позиций синергетики. Одной из центральных идей синергетики является концепция параметров порядка. Это параметры, выделяющиеся в ходе самоорганизации, происходящей в сложной системе, со временем начинают определять динамику всех остальных переменных. Каждый человек делает очень многое в течение своей жизни, выступает в разных ролях. Однако, если повезет, он выявляет сущность своей личности, параметры порядка своей судьбы. Наверно, те же параметры в конце концов начинают определять и поле воспоминаний об ушедшем от нас человеке.

На мой взгляд, параметрами порядка в судьбе Сергея Павловича были Институт, Ученики, Наука. Сергей Павлович был ярким, легким, светлым человеком. Поэтому и вспоминать его надо светло и легко.

Как эта лампада бледнеет
Пред ясным восходом зари,
Так ложная мудрость мерцает и тлеет
Пред солнцем бессмертным ума.
Да здравствует солнце, да скроется тьма!

А. С. Пушкин

Институт. Мне довелось работать с Сергеем Павловичем с 1976 г. и все это время центральным пунктом в его помыслах, источником забот, радостей и огорчений был Институт. Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, ранее Институт прикладной математики АН СССР.

Сергей Павлович проработал в Институте более полувека, связывая с ним свои идеи, свои надежды, свое научное творчество. Институт был создан в 1953 г. для решения стратегических задач, стоявших перед нашим отечеством. В те годы это были задачи совершенствования ядерного оружия и создания средств его доставки — баллистических ракет. Институт был создан выдающимся советским математиком, механиком, организатором науки трижды Героем Социалистического Труда академиком Мстиславом Всеволодовичем Келдышем.

После окончания физического факультета МГУ Сергей Павлович пришел в Институт, в ту его часть, которая занималась расчетом взрывов и соответствующими задачами физики плазмы. Этой частью руководил академик Андрей Николаевич Тихонов. С первых дней работы в Институте Сергей Павлович начал работать под руководством академика Александра Андреевича Самарского. Этих трех людей Сергей Павлович всю жизнь считал своими учителями, глядя на свои поступки и полученные результаты, как бы глазами своих учителей.

Исторические задачи, которые решал Советский Союз, заставляли ставить стратегические научные проблемы. Это выковывало больших ученых, масштабные личности. Сергею Павловичу посчастливилось сформироваться как исследователю в это замечательное время.

Я немного знаю о том времени, о славных делах, которые тогда делались в Институте, но их отблеск постоянно освещал жизнь Сергея Павловича. Это была молодость Института. Игры в волейбол и баскетбол, заводилой которых был Сергей Павлович. Танцевальные вечера, капустники. Молодежь института поставила три оперетты на институтские темы. Из тех времен дошла песенка:

*Не кочегары мы, не плотники,
Но сожалений горьких нет, как нет!
А мы научные работники.
А что мы делаем — секрет!*

Работы, проводившиеся в Институте, имели очень высокую степень секретности. Да и дела делались важные.

Удивительным качеством Сергея Павловича было умение радоваться успехам друзей, коллег, братьев по научному цеху. До последних месяцев он рассказывал приходившим людям, что есть в институте, кто над этим работал и что получил, с кем стоит связаться.

Он был очень добрым человеком, ценившим жизнь, друзей, науку. Он ни в ком не видел конкурентов, ценя в каждом уникальность, своеобразие, творчество.

У Сергея Павловича было врожденное чувство справедливости. Он с азартом спорил, не всегда оказывался прав, и не всегда сдерживал эмоции. Но с юности он взял себе за правило, что если он, по его мнению, был не прав, встретиться с оппонентом или позвонить ему и либо признать свою неправоту, либо принести извинения.

Сергей Павлович органически не переносил интриг, закулисных переговоров, сплетни, фальшь. Это в равной мере относилось и к личным, и к институтским, и к академическим делам. Он всегда стремился действовать прямо, честно и открыто. Одной из самых уничижительных характеристик в его лексике было «интриганистый парень».

Сергей Павлович с огромной интенсивностью излучал энергию, бодрость, оптимизм и доброжелательность. Он был любимцем Института



Рис. 1. Молодость Сергея Павловича совпала с молодостью Института прикладной математики и с героической эпохой советской науки

и с первых лет работы пользовался большим уважением у друзей и коллег.

Он щедро дарил свое время, силы, фантазию, энергию сотрудникам, к которым относился, во многом, как к своей семье. Поэтому неудивительно, что много лет он был комсомольским вожаком, 15 лет возглавлял партийный комитет Института и 10 лет был его директором.

Его радовало очень многое в друзьях и коллегах. Помню, он рассказывал, как комсомольский комитет столкнулся с необходимостью отстоять место наших институтских яхт на лодочной станции. Решение оказалось простым и парадоксальным — комсомольцы попросили сотрудника нашего института — трижды Героя Социалистического Труда академика Якова Борисовича Зельдовича съездить к начальнику лодочной станции, надев награды. Одно появление академика с тремя звездами на причале решило все проблемы.

«Наш институт представляет собой национальное достояние, во многом определяя стратегический потенциал страны. Именно у нас создавалась новая вычислительная математика, моделирование, современная небесная механика, у нас родилось программирование. Это настоящему не оценено даже самими учеными института, которые все это сделали. Важнейшая задача — распространить в стране и в мире то, что сделано и понято у нас!», — говорил Сергей Павлович.

Сергей Павлович до последних лет чувствовал себя очень молодым человеком, как бы живущим вне времени. Длина его «свободного пробега» по институту была очень мала. Он мог часа два идти с первого этажа до третьего, то зайдя в комнату и вникая в задачи соседнего отдела, то разговорившись с другом, то зайдя к коллегам попить чайку и поговорить о жизни.

Сергей Павлович почти всю жизнь чувствовал себя молодым. Помню, как он рассказывал о своей поездке в Софию с коллегами из 3-го отдела, с Александром Андреевичем Самарским. Сергей Павлович был тогда уже в ранге член-корреспондента. Александр Андреевич был сильным лидером и переубедить его было трудно. И он почему-то решил, что в этот день надо пораньше лечь спать. Сергей Павлович проводил учителя в номер, расположенный у входа, потом вернулся к себе, вылез в окно и пошел бродить с друзьями по ночному городу: «Это была чудесная ночь!» С огромным подъемом он рассказывал о застольях у сухумских физиков, о прогулках по Парижу, о гигантском Нью-Йорке. Его любимыми тостами были: «За Институт!» и «За наших учителей!»

В течение многих лет в 3-м отделе Сергей Павлович и Александр Андреевич прекрасно дополняли друг друга. С первым была связана искренность, фантазия, полет. Со вторым — энергия, настойчивость, масштабные замыслы. Помню, как-то в 50-й комнате, радуясь очередному успеху отдела, А. А. Самарский воскликнул: «А ведь мы в нашем моделировании — как Кирилл и Мефодий! Ездим, просвещаем и небось

войдем в историю!» И они тут же решили поменяться на ближайший час пиджаками.

Когда что-то не сложилось в академическом гараже, то Сергей Павлович заявил: «А ведь самый простой способ потребовать машину — это назваться собственным секретарем!» И Александр Андреевич с блеском тут же осуществил это на глазах у восхищенных сотрудников.

Раздел, а точнее «развод» ИПМ на собственно Институт прикладной математики и Институт математического моделирования РАН оказался тяжелым испытанием и, на мой взгляд, большой бедой для обоих ученых.

С Институтом для Сергея Павловича были связаны не только радости, праздники, друзья, вдохновенная работа, творчество. Когда пришли нелегкие времена, Сергей Павлович подставил плечо и терпеливо, не жалуясь, по-мужски, понес тяжелую административную ношу.

Слово «терпение» я бы поставил на первое место. Может быть, благодаря этому терпению, романтическому отношению к науке и дружбе с огромным количеством людей в институте ИПМ выстоял и уцелел. Сергей Павлович мог часами убеждать, доказывать, уговаривать, объяснять, что наша сила — в единстве, что нам надо быть вместе. Он очень бережно относился к товарищам, стараясь, насколько возможно, не перекладывать на них груз своих тяжелых забот.

И все же в том деле, которым был для Сергея Павловича Институт, радостей, удач, успехов и свершений было гораздо больше, чем огорчений, забот и разочарований.

Завтра, завтра, волшебное завтра!
Для меня ты — единственный бог,
Добрый гений мой, лучший соавтор
Всех свершений, всего, что я смог...

*А. П. Михайлов — С. П. Курдюмову
в память о беседах про будущее*

Ученики. Сергей Павлович с огромной страстью и большой полнотой воплотил себя в учениках. Научные успехи, воплощение идей учеников для него были важнее, чем собственные научные успехи, признание, регалии. С первых дней, как только мы с ним познакомились, он думал о своем продолжении и видел его не в работах, не в книгах, а в учениках.

Он был очень щедрым человеком. Он мог часами рассказывать о своих идеях, о замыслах, ничего не утаивая, и третьекурснику, явившемуся на пересдачу, и академику.

«Пятерки Вы все получите! Думайте не об оценках! Важно, чтобы Вы почувствовали дух науки, увидели в ней свой путь», — примерно

такими словами он начинал свой курс, который читал около 30 лет на кафедре прикладной математики Физтеха.

Студенты — народ занятый. И не все приходили на первую лекцию. И если на вторую лекцию являлся кто-то, кого не было на первой, Сергей Павлович вдохновенно с дополнениями и отступлениями читал первую лекцию еще раз. «Основные понятия и идеи — самое важное. Если их не понять, то дальше и делать нечего», — говорил он. Потом приходил еще один... И каждый раз было интересно, необычно, по-новому. Сейчас я понимаю, что та энергия, увлеченность наукой, которыми он «зажигал» аудиторию, были важнее для нее, чем асимптотики, автомоделные решения, обсуждаемые модели.

Первый раз я встретился с Сергеем Павловичем на 3-м курсе в скверике на Миусской площади как с потенциальным научным руководителем. Мы гуляли часов 5 и разговаривали обо всем — о физике, об Институте, о будущем мира, о теории относительности, о Высоцком, о современной фантастике, о родителях. Запомнились такие слова: «Все главное уже произошло! Мы встретились! И начнется совсем другая жизнь! Наука — это самое прекрасное, что есть в мире!»

Все так и сложилось. Одна из главных вещей в моей жизни в тот вечер действительно произошла. И Сергей Павлович оказался прав. Хотя в тот вечер, почти 30 лет назад, слушая его вдохновенные восторженные слова, я не очень в это верил.

Сергей Павлович был прекрасным слушателем, отличным рассказчиком, мудрым советчиком. Много часов и я, и другие ученики провели с ним у него за чаем, за обедами, за ужинами. Сергей Павлович относился к ученикам как к очень близким людям.

Он был очень внимательным читателем и взыскательным критикомopusов своих учеников, не жалевшим для этого времени и сил. Свой первый препринт я переписывал, наверно, раз 7. Обложка первого варианта была заполнена его пометками, написанными карандашом в разных направлениях — вверх, вниз и по диагонали. Всюду пестрели знаки *NB* (очень важно), переполнявшие меня гордостью.

После пятого варианта я убедился, что мы в общем-то вернулись к первому. И тут Сергей Павлович посоветовал «еще раз все перелопатить». Я, конечно, обратил его внимание на факт «возврата к началу» и задал прямой вопрос: «Сергей Павлович! Совершенствовать можно беспредельно. Что Вы хотите, чтобы я еще вложил в этот текст?»

— Я не вполне представляю, что есть в Вас. Но это в Вас есть! И оно должно быть вложено! Ученика можно сравнить с драгоценным камнем. И одна из задач учителя — создавать ученику препятствия, которые помогли бы ограничить его талант. И я стараюсь это делать.

Сергей Павлович умел искренне восхищаться и любоваться своими учениками. Может быть, именно это позволило им состояться в других областях, проявить свою индивидуальность, увидеть свой путь. И кроме того, он помогал своим ученикам взглянуть на исследования других его глазами.

На 50-летнем юбилее ученики подарили Сергею Павловичу много-томник в красных обложках «Собрание сочинений Курдюмова и К^о. Избранное и метастабильно локализованное». (Идея метастабильной локализации тепла в нелинейных средах тогда была в центре внимания научной школы Сергея Павловича.) Подарены «скрижали» с любимыми уравнениями и оценками решений Сергея Павловича. Было устроено веселое и блестящее представление. С «русским курдюмляндром», «заслуженными артистами Курдюмовской АССР» и прочим.

Это, конечно, придумал Саша Михайлов. У него еще и гуманитарный талант, и блестящее остроумие, и поэтический дар.

Сергей Павлович умел заглядывать в будущее своих учеников. В последние годы А. П. Михайлов занимается математическими моделями социологии и политологии. А в прошлом году вышел сборник его стихов.

Сергей Павлович бескомпромиссно и самоотверженно защищал своих учеников. «Ученик может предать своего учителя, но учитель не имеет права предать своего ученика!»

Имела место следующая история. А. А. Самарский, вникая в дела знаменитого 3-го отдела ИПМ РАН, где работал и Сергей Павлович, посмотрел на работу молодежи и пришел к выводу, что у Г. Г. Еленина, ученика Сергея Павловича, нет работ и высказал мысль, что, видимо, надо подумать о его сокращении. Сергей Павлович горячо отстаивал ученика, убеждая, что это глубокий перспективный исследователь, которому по силам дела, за которые другие просто не возьмутся. И далее произошло следующее — молодежь отдела поехала на дачу А. А. Самарского помочь в его дачных делах. Взялись Жора Еленин с Александром Андреевичем за корчевание громадного пня и к ночи ближе, вопреки мнению окружающих о невозможности предприятия, справились с делом. Эту историю я слышал и от А. А. Самарского, и от Г. Г. Еленина, и от Сергея Павловича.

А. А. Самарский: «И я понял, что Жора человек серьезный, что он далеко пойдет!» Жора: «Я бы без Александра Андреевича с этим пнем ничего бы не сделал. Но и он бы без меня ничего не сделал!» Сергей Павлович с большим удовольствием и удовлетворением: «Да что там пень — Жора еще в науке такого выкорчует, что дай Бог каждому!» Так и оказалось. Сергей Павлович всегда с гордостью говорил о лаборатории, занимавшейся математическим моделированием в химии, которую Г. Г. Еленин организовал в МГУ.

О Володе Дородницыне — известном сейчас специалисте по инвариантно-групповому анализу — Сергей Павлович говорил с удивлением и восхищением: «Он не ходит месяцами на работу. Но потом приносит прекрасные результаты! Очень интересный ученый и человек!»

Коля Змитренко вместе с Сергеем Павловичем занимался физикой плазмы. И его доброжелательная, спокойная уверенность, что мы все поймем и во всем разберемся в этой области, умение создавать де-

ловую творческую атмосферу ценили все, но Сергей Павлович более остальных.

О Викторе Галактионове — ставшим впоследствии одним из ведущих специалистов в мире по качественной теории нелинейных параболических уравнений, уехавшим в Испанию и работающим сейчас в Англии, он говорил во студенчестве, после первых доказанных им теорем сравнения: «Каких дров наломал! Витя далеко пойдет! Особенно если он сам поймет, что же он сделал».

О другом ученике — Косте Плохотникове — говорил уверенно и определенно: «Этот человек открыл «тепловой кристалл» и придумал метод осреднения. Ему все удастся и поэтому самое трудное для него в жизни будет — сосредоточиться на главном!»

Большое участие Сергей Павлович принимал и в жизни учеников следующего поколения учеников: Алексея Потапова, Сергея Посашкова, Сергея Свирщевского. Он часто с горечью говорил, что их научные судьбы в эпоху развала сложились гораздо хуже, чем должны были бы, и чем он ожидал.

С огромной заботой, галантностью, восхищением относился он к своим ученицам: Лене Куркиной, Лене Князевой, Стефке Димовой. О диссертациях, отзывах на диссертации Стефки и Лены Куркиной, оппонентах, результатах мы говорили с ним почти во время каждой встречи весь 2004 г. Их диссертации стали для него огромным подарком — они воплотили мечту Сергея Павловича, связанную с выяснением законов коэволюции сложных многомерных структур, растущих в режиме с обострением.

Сергей Павлович с огромным интересом относился к философским проблемам науки, к изменению мировоззрения, к которому приводят научные открытия. Многие его философские идеи нашли воплощение в работах с Леной Князевой. «Огромная энергия, блестящая эрудиция, знание языков — может быть, наши идеи войдут в культуру именно через философию, через ее работы!», — часто повторял он.

Сергей Павлович был просветителем в высоком понимании этого слова. И в этой ипостаси, я думаю, его потенциал удалось раскрыть в очень небольшой степени. Почему?

В этом убеждают два поворота в его просветительской, образовательной деятельности, которые я видел и которые, отчасти, проходил вместе с ним.

В 1992 г. Борис Михайлович Бим-Бад — один из ярких представителей российской педагогической науки — решил организовать Российский открытый университет (РОУ). Идея состояла в том, чтобы использовать и применить в России замечательный опыт британского открытого университета, использующего передачи теле- и радиовещания для того, чтобы дать возможность получать образование заочно в своем темпе широкому кругу людей, у которых нет возможности повысить свой образовательный и культурный уровень иначе.

Любопытная параллель: один из первых «вольных университетов», предназначенных для того же — народный университет Шанявского — находился на территории нашего Института прикладной математики. В этом университете свое образование пополнял Сергей Есенин. Позже в том же здании находился физический и биофизический институт, куда «на Миуссы» любил заезжать выдающийся исследователь, гелиобиолог А. Л. Чижевский. Потом настала эра ФИАНа — Физического института Академии наук.

Однако Б. М. Бим-Бад решил пойти дальше — взглянуть на открытый университет не как на «адаптированное образование», а как на школу критического мышления. Но чтобы это было всерьез, нужна была и настоящая наука, и рефлексия над процессом научного творчества. Тут он и обратился к Сергею Павловичу, которого знал по лекциям и выступлениям. В те нелегкие времена зарплата в Академии составляла процентов 20 от прожиточного минимума. Поэтому перспектива поддержать учеников и коллег представлялась заманчивой.

Был создан факультет прикладной математики, научным руководителем которого стал Сергей Павлович, а деканом — Наталья Рахманова. И буквально за несколько месяцев свершилось чудо. На факультете начались блестящие научные проекты по математической экономике, синергетике, математической психологии, стратегическому планированию и нескольким другим направлениям. В работу факультета активно включились академики П. Н. Краснощеков, А. А. Петров, А. Т. Фоменко, Г. И. Савин, член-корр. РАН Ю. Н. Павловский, Ю. А. Флеров (называю по нынешним званиям). Началось преподавание с 1-го курса, математический анализ с блеском читал профессор В. Ф. Бутузов. Очень интересным было столкновение, взаимодействие, взаимообогащение двух культур — естественнонаучной, которую олицетворял Сергей Павлович и его коллеги, и педагогической, представленной Б. М. Бим-Бадом и его соратниками. Начались научные семинары. Многие исследователи начали заниматься главным, тем, что откладывали много лет. Ежемесячные отчеты, попытка осмыслить цели, средства, проходимый учеными путь оказались тоже очень любопытными и поучительными. Рождение и развитие мысли — захватывающее зрелище. И за всем этим блестящим волнующим праздником стоял Сергей Павлович.

Но в годы катастрофы редко бывают сказки со счастливым концом. На РОУ «наехали», как сейчас говорят, бандиты. Правоохранительные органы, к которым обратились, объяснили, что надо платить. И от нашего факультета пришлось избавиться. Остались только прекрасные воспоминания и ощущение, что такой праздник возможен.

Второй поворот связан с серией конференций «Математика, компьютер, образование», которую организовала более десяти лет назад профессор биофака МГУ Г. Ю. Ризниченко и писательница Зоя Журавлева с соратниками. Пушино, Дубна, Чебоксары, Воронеж... Сотни выступлений, десятки тысяч людей, к которым Сергей Павлович тоже

относился как к ученикам, к коллегам и друзьям, как к тем, кто понесет свет, знание, надежду дальше.

На все это у Сергея Павловича хватало душевного тепла, энергии, сил и вдохновения. Сергей Павлович считал, что он живет среди замечательных, талантливых, благодарных людей. Хочется надеяться, что он не ошибался.

Я никогда не относился
к себе слишком серьезно,
но всегда очень серьезно
относился к своим мыслям.

О. Уайльд

Наука. Наука похожа на океан. В ней есть и тихие живописные лагуны, и безбрежная ширь, и суровые уголки с неумолимыми подводными течениями, ледяными ветрами или вечными льдами. Поэтому и творцы науки очень разнообразны по темпераменту, по стилю, по мотивам, заставляющим плыть через океанскую ширь.

Пытаясь беспристрастно взглянуть на путь, пройденный Сергеем Павловичем, видишь, насколько этот путь большой и своеобразный. Пожалуй, главное его детище — теория режимов с обострением. Когда более 30 лет назад он пришел в эту область, то модели, допускающие режимы с обострением, казались неполноценными. «Ведь режимы с обострением — это бесконечный рост за конечное время, а такого в природе не бывает», — такие возражения доводилось много раз слышать Сергею Павловичу на научных семинарах. Математики, которые знали о таких режимах с конца XIX в., смотрели на них как на забавный курьез, который достоин упоминания только в качестве примечания в фундаментальных курсах дифференциальных уравнений. Гуманитарии восхищались стилем изложения и темпераментом Сергея Павловича, будучи совершенно уверенными, что к ним-то эти теории никакого отношения не имеют.

Поэтому лет пятнадцать Сергей Павлович на конференциях, семинарах, в статьях страстно и вдохновенно объяснял основы нелинейной науки.

Запомнилось его выступление на конференции, посвященной юбилею А. Н. Тихонова, которая проводилась в МГУ. Среди сообщений маститых академиков был включен и доклад кандидата физ.-мат. наук С. П. Курдюмова, посвященный режимам с обострением. Андрей Николаевич с теплом и уважением относился к Сергею Павловичу. Всем докладчикам давали по 30 минут. И, следуя традиции юбилейных конференций, все в эти рамки укладывались. Это заседание вел Юрий Петрович Попов, впоследствии директор Института и приемник на этом посту Сергея Павловича.

Когда 30 минут доклада Сергея Павловича истекли он подошел и обратил на это внимание докладчика. «Да-да, я понял». Еще через

20 минут после такого же напоминания он энергично ответил: «И последнее!» Еще через 30 минут Ю. П. Попов встал, всем своим видом давая понять, что это выходит за всякие рамки и тут уж точно надо кончать. «Юра! Сядь! Я же о важном!» Доклад продлился час и вызвал восхищение непосредственностью докладчика и увлеченностью предметом. А фраза «Я же о важном!» вошла в институтскую легенду.

Памятуя эту историю, в течение многих лет доклады Сергея Павловича стремились ставить или перед обедом или в конце дня, чтобы он мог говорить до тех пор, пока слушатели готовы слушать и воспринимать.

«Надо вовлечь в театр идей наших коллег! Надо сделать их нашими соратниками и сподвижниками!», — часто говорил он.

Сергей Павлович со школьных времен с перерывами вел дневники. И перечитав их лет пять назад, был удивлен, насколько созвучны его мысли, идеи, представления зрелых лет тем идеям, которые волновали его в школе.

В школьные времена Сергей Павлович думал не только о космосе, о межпланетных перелетах, о тайнах атомной энергии, но и о философии. В то время, как он рассказывал, его волновала классическая греческая философия. Особенно близок ему был Гераклит и Платон. Гераклит своим видением единства: «Вселенная — есть пламень, по своим законам вспыхивающая и угасающая». Платон — своим миром идеальных форм, совершенных моделей, несовершенные воплощения которых мы видим в нашей реальности. Поразительным образом все эти образы и мечты воплотились в научной судьбе Сергея Павловича.

Судите сами. В Институте в течение многих лет работа Сергея Павловича была связана с применением ядерной и термоядерной энергии. Его друзья и соратники по Институту, по комитету комсомола, по партбюро и сделали реальностью многие космические проекты нашей страны. В основе теории обратных задач, как не раз говорил А. Н. Тихонов, и лежит платоновский миф о пещере — эта теория во многих крайне важных случаях (достаточно вспомнить медицинскую томографию или геологоразведку) позволяет по несовершенным отражениям восстановить оригинал.

Можно сказать, что большую часть своей научной жизни Сергей Павлович прожил в мире исполняющейся мечты, в реальности, где «понедельник начинается в субботу».

Символом же теории режимов с обострением стал гераклитовский образ огня, вспыхивающего и угасающего по своим законам. Императивом научной жизни Сергея Павловича в последние 15 лет было установить, осмыслить и использовать эти законы в интересах человечества. «У нас нет времени и ресурсов, чтобы искать путь в будущее методом проб и ошибок. Этот путь должна помочь увидеть наука!», — говорил он во многих выступлениях.

Сергей Павлович очень серьезно относился к приходившим идеям, к возникавшим планам, к результатам обсуждений. Всегда было мно-

жество записей, планов, рабочих тетрадей. Ему очень нравилось писать перьевой ручкой. К результатам вычислительных экспериментов он относился так же внимательно и вдумчиво, как к результатам натуральных экспериментов. Всегда просил учеников вести рабочие тетради «чтобы сверить курс и видеть, далеко ли мы отклонились от поставленной цели, не стоит ли вернуться в какой-то кусок пути и начать сначала».

Сергей Павлович вел свою научную школу как капитан ведет большой корабль — спокойно, уверенно, не делая резких поворотов, держа курс на видимую только ему звезду, которая должна появиться из-за горизонта.

Режимы с обострением Сергей Павлович любил иллюстрировать на примере простейшего доступного первокурсникам уравнения (см. рис. 1)

$$\dot{n} = n^\beta, \quad \beta > 1, \quad n(0) = n_0.$$

«Режим с обострением парадоксален сам по себе, — говорил он, — вдумайтесь — очень долго как будто ничего не происходит. Та величина, за которой мы следим, почти не меняется и вдруг — в поразительно короткий промежуток времени происходит все самое главное. Режим с обострением бросает вызов расхожей житейской мудрости о том, что завтра все будет примерно так же, как сегодня. Завтра все может быть по-другому! Или завтра вообще может не быть. При этом, имея дело с режимом с обострением, мы не можем планировать свои действия «от достигнутого», увеличивая на какой-то процент нынешние показатели. Это само по себе вызов — для тех, кто планирует и прогнозирует. И неплохо бы знать, имеет ли место этот самый режим в тех системах, с которыми мы имеем дело».

В центре внимания много лет была одна модель — модель тепловых структур

$$T_t = \operatorname{div}(k_0 T^\sigma \operatorname{grad} T) + q_0 T^\beta.$$

Вызывающе простая, по меркам сегодняшней нелинейной науки. Зато и изучить ее можно было глубоко, легко и оригинально. Взявшись за дело, скоро начинаешь чувствовать красоту и очарование фундаментальных уравнений.

Эта модель объединяла и учеников, владеющих разными методами, имеющих свое видение науки и реальности. Один установил факт локализации тепла, другой доказал теоремы сравнения, третий обнаружил наличие спектра структур этой модели, четвертый впервые провел многомерные расчеты, пятый..., шестой...

Эффект локализации тепла — тоже один из парадоксов теории режимов с обострением. Несмотря на неограниченный рост и температуры и коэффициента теплопроводности во многих нелинейных средах тепло оказывается локализовано в пространстве. Все главное происходит не только в небольшой промежуток времени, но и в небольшой области пространства (см. рис. 2).

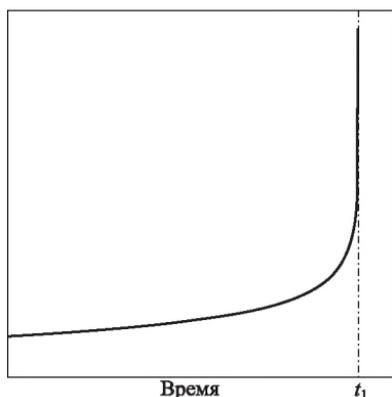


Рис. 1. Режим с обострением

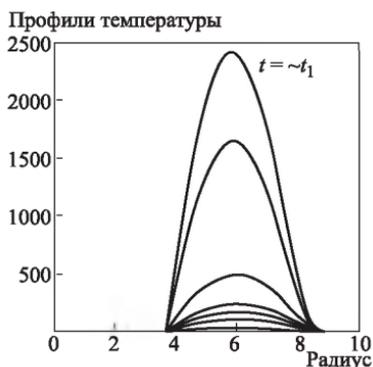


Рис. 2. Эффект локализации тепла

Знаки внешнего признания теории режимов с обострением Сергей Павлович воспринимал как еще одну возможность рассказать миру о нелинейной науке, об институте, о своих учениках. Знаков было довольно много и нам, ученикам; по-моему, они приносили больше радости, чем ему самому. Открытие Т-слоя, одним из соавторов которого был Сергей Павлович, был внесен в Государственный реестр открытий. Около 15 лет он был одним из немногих (а точнее двоих, если вторым считать замечательного ученого, бывшего ректора Саратовского государственного университета Д.И.Трубецкого) членов Академии, представлявших в этом собрании междисциплинарные исследования, синергетику. Незадолго перед 75-летним юбилеем он был удостоен премии правительства в области образования.

Но есть и внутренний отчет достижений: «Самое главное в том, что мы делали, не теоремы, расчеты, предсказанные эффекты. Это, во-первых, постановка задачи козволующей структур и ее решение, пусть даже в простейшем случае. Во-вторых, это то, что нам удалось подтянуть математический аппарат к нелинейным задачам — к задачам, которые определяют будущее науки».

И школьной, и институтской мечтой Сергея Павловича было новое понимание законов микромира, квантовой механики. На физфаке МГУ Сергей Павлович учился на кафедре теоретической ядерной физики и развивал идеи академика Маркова о силах, возникающих в ходе тройных или более сложных взаимодействий. «Мы убедим мир, что атом следует мыслить как структуру горячей среды», — не раз говорил он. Его любимая ученица — Е.С.Куркина — недавно опубликовала работу именно с таким названием. А на вечере, посвященном памяти Сергея Павловича, его друг и коллега — Дмитрий Сергеевич Чернавский — сделал доклад, посвященный развитию идей Сергея Павловича в квантовой механике. Может быть, судьба и этой идеи Сергея Павловича окажется счастливой.

Исследование поразительно простой, на первый взгляд, модели тепловых структур позволило показать, что в простейших нелинейных средах есть конечный спектр таких структур, что в них можно выявить законы организации — законы, по которым простейшие структуры могут быть объединены в более сложные. Эти структуры описывают сходящиеся к центру волны горения. Эти волны сохраняют свою форму — они описываются автомодельными решениями — и растут в режиме с обострением. Вот, к примеру, несколько замечательных двумерных структур (см. рис. 3), которые были построены Е. С. Куркиной, научившейся решать задачу их построения и в двумерном, и в трехмерном случае, используя методы теории бифуркаций.

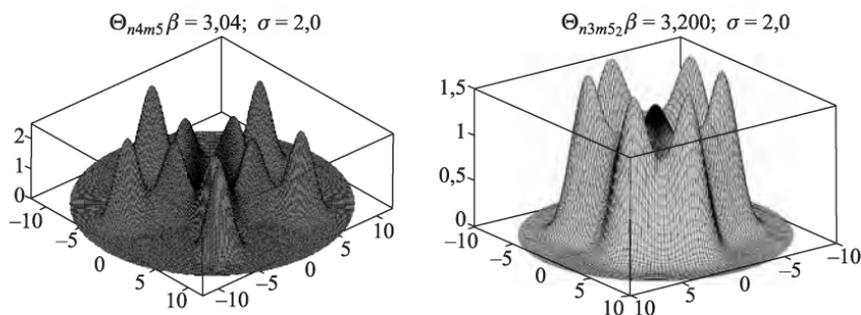


Рис. 3. Собственные функции нелинейной среды

Во многих научных школах бывает «переходный возраст», когда представления о том, что делать и куда идти дальше, у лидера и у «старших учеников» начинают все больше расходиться. Этот «переходный возраст» может закончиться и обидами, и «разводом», и горечью одиночества.

Академик Никита Николаевич Моисеев, который всегда с глубоким уважением и симпатией обносился к Сергею Павловичу, рассказывал об этом с грустным юмором.

— Перефразируя слова из «Праздника Святого Иоргена», можно сказать, что «в профессии вора, святого и ученого самое главное — вовремя смыться». Уйти из этой области, оставив ее ученикам, к чему-то новому. Да вот, беда, ученики не всегда готовы это понять и принять. И ты «среди своих» оказываешься обречен на непонимание.

Оглядываясь назад, я понимаю, что и в нашей научной школе был свой переходный возраст, своя «точка бифуркации». Просто благодаря мудрости, силе и терпению Сергея Павловича, мы на взгляд многих учеников и коллег Сергея Павловича, легко миновали этот рубеж.

В какой-то момент внимание Сергея Павловича все больше стали занимать проблемы взаимодействия гуманитарных наук и естествознания, способы преодолеть пропасть между двумя культурами — есте-

ственна научной, обращенной в прошлое, и гуманитарной, опирающейся на традицию и авторитет.

Сергей Павлович начал ездить на конференции философов, психологов, экономистов и даже буддологов. Он с восхищением рассказывал мне о книгах Татьяны Петровны Григорьевой, посвященных японской культуре. Все большее место в его мыслях начинали занимать идеи, дела и заботы его «философских учеников» — Лены Князевой, Владимира Аршинова, Якова Свицкого, Владимира Буданова.

Появилась еще одна научная жизнь. Но не вместо той, которая связана с Институтом, с теорией режимов с обострением, а вместе с ней. Мы много говорили об этом. Я убеждал его, что, начав новое, можно упустить что-то важное или даже главное в том деле, где мы профессионалы, где завоеваны позиции. Сергей Павлович слушал, порой соглашался, но спокойно и настойчиво шел своим путем.

Сейчас, приходя в Институт философии РАН, каждый раз ловлю то отблеск идей Сергея Павловича, то кем-то брошенное его любимое выражение, то ссылки на его мнение. И понимаю: эта «гуманитарная научная жизнь» Сергея Павловича была тоже интересной, полной и насыщенной. Думаю, что в этом очень велика роль директора Института философии академика Вячеслава Семеновича Степина. И это не удивительно — одним из самых ярких достижений постнеклассической науки — концепцию, которую создал В. С. Степин — является синергетика.

Сергей Павлович считал, что достижения науки, пусть даже теоретической и абстрактной, должны непосредственно и немедленно служить людям, влияя на мировоззрение, поддерживая образование, обосновывая мечту. Поэтому большое место в работе Сергея Павловича занимала популяризация науки. Сначала это были брошюры общества «Знание», потом — книги серии «Кибернетические возможности и возможные ограничения». (И председатель редколлегии этой серии академик И. М. Макаров и ее энергичный доброжелательный секретарь Семен Наумович Гоншорек этому очень способствовал.)

В эпоху кризиса и развала потребность в такой деятельности стала еще более острой. И тогда появился сайт, посвященный синергетике <http://spkurdyumov.narod.ru>. Этот сайт, который вел и ведет Владимир Курдюмов, за несколько лет стал одним из крупнейших образовательных сайтов России. Сейчас на нем выложено более 300 книг и статей по синергетике. Ежедневно его посещает несколько сотен людей. Этот сайт был для Сергея Павловича источником радости и удовлетворения.

Огромное впечатление на Сергея Павловича произвела междисциплинарная конференция по синергетике в Пущино, в которой участвовали классики этого подхода Илья Пригожин и Герман Хакен. «Это Сольвеевский конгресс, — говорил он мне с восхищением. — И очень важно, что идеи ученых немедленно отражаются в «Шпрингеровской

серии по синергетике». Было бы очень здорово создать у нас в стране что-то похожее».

И когда пару лет назад благодаря энтузиазму главы издательства УРСС Доминго Мартина Рикоя и его коллег появилась такая возможность, Сергей Павлович сразу оценил это. «В нашей серии будет не меньше сотни книг! Это будет прорыв», — энергично говорил он мне, игнорируя мои призывы к осторожности и реальной оценке доступных ресурсов.

Но вот прошло чуть более двух лет и вот уже в нашей серии «Синергетика — от прошлого к будущему» вышло около 20 книг общим тиражом около 40 тысяч экземпляров. Каждый месяц в 50 городах России в среднем продается более 1200 книг серии. Может быть, и тут Сергей Павлович, оценивая масштаб, был прав?

После конференции в Пущино Сергей Павлович говорил: «Междисциплинарные исследования, синергетика особенно нужны в нашей стране. Именно в ней они будут поняты и приняты лучше, чем где-либо еще. Во-первых, потому что это важно для решения тех масштабных, стратегических задач, которые нужны в России. Во-вторых, это созвучно самому духу отечественной науки.

— Так что синергетика будет прирастать Россией?

— Именно! И ты это увидишь!

В последние годы Сергей Павлович был также профессором кафедры социальной самоорганизации и антикризисного управления Российской академии госслужбы при Президенте РФ (РАГС), которой руководит профессор Вячеслав Леонидович Романов. «Люди, принимающие решения, должны знать, что такое наука в государстве, зачем она нужна и как с ней обращаться!», — восклицал он на одном из заседаний кафедры. И, кроме того, его очаровал лозунг, который мы прочли на одной из стен РАГСa: «Да возвеличится Россия! Да сгинут наши имена!»

В июне 2004 г. в РАГСe была проведена международная конференция «Динамическое развитие России. Единство управления и самоорганизации». И на ней был профессор Герман Хакен — один из отцов-основателей синергетики, придумавший само название «синергетика». В разговорах он не раз подчеркивал, что междисциплинарные идеи с трудом пробивают себе дорогу в американской науке, признаются, но сдержанно оцениваются в большинстве стран Европы, но по-настоящему развиваются, расцветают, пропагандируются именно в России. Эти слова было очень приятно слышать.

Память о человеке является функцией времени. Не только потому, что люди с годами много забывают. Но и потому, что дело ушедшего человека — одна из главных вещей, которые остаются — оказывается в руках учеников, коллег, последователей. «И нужно не слезы лить и памятники ставить, а продолжать Дело. Это и будет лучшая память!» — как сказал однажды Сергей Павлович. Наверно, и здесь он был прав.

Книги С. П. Курдюмова, вышедшие после 1982 г.

1. *Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г.* Парадоксы мира нестационарных структур. — М.: Знание, 1983. — 48 с.
2. *Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г.* Синергетика — теория самоорганизации. Идеи, методы, перспективы. — М.: Знание, 1983. — 63 с.
3. Итоги науки и техники. ВИНТИ. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. — Т. 28. — М., 1987. — 316 с.
4. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987. — 480 с.
5. *Малинецкий Г. Г., Курдюмов С. П., Потапов А. Б.* Синергетика — новые направления. — М.: Знание, 1989. — 64 с.
6. *Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос. — М.: Наука, 1992. — 544 с.
7. Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур: Сб. статей / Ред. С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий. — М.: Наука, 1996. — 263 с. (Сер. «Кибернетика: неограниченные возможности и возможные ограничения»).
8. Режимы с обострением. Эволюция идеи: Законы коэволюции сложных структур: Сб. статей / Ред. Г. Г. Малинецкий. — М.: Наука, 1998. — 255 с. (Сер. «Кибернетика: неограниченные возможности и возможные ограничения»).
9. Новое в синергетике: Взгляд в третье тысячелетие / Ред. Г. Г. Малинецкий, С. П. Курдюмов. — М.: Наука, 2002. — 480 с. (Сер. «Информатика: неограниченные возможности и возможные ограничения»). <http://www.keldysh.ru/book/ns.html>
10. *Князева Е. Н., Курдюмов С. П.* Основания синергетики. Режимы с обострением, самоорганизация, темпомиры. — СПб.: Алетейя, 2002. — 414 с.
11. *Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г.* Синергетика и прогнозы будущего. — 3-е изд. — М.: Эдиториал УРСС, 2003. — 288 с. <http://iph.ras.ru/~mifs/kkm/Vved.htm>
12. *Князева Е. Н., Курдюмов С. П.* Основания синергетики. Синергетическое мировидение // Синергетика: от прошлого к будущему. — 2-е изд. — М.: КомКнига, 2005. — 240 с.

Избранные труды С. П. Курдюмова

Статьи, вошедшие в эту книгу, не исчерпывают тех основных направлений, в которых развивались и использовались представления о режимах с обострением и диссипативных структурах. За кадром остались исследования по лазерному термоядерному синтезу, теория приближенных автомодельных решений, теория жесткой турбулентности, самоорганизованной критичности, диффузионного хаоса, приложение этих идей в стратегическом планировании и моделировании образовательных систем; анализ философских проблем современного естествознания. За отдельными «деревьями» скрывается большой «лес». Чтобы дать читателю представление о нем, мы помещаем список избранных трудов С. П. Курдюмова.

1. *Волосевич П. П., Бусурина А. Н., Крус В. П., Курдюмов С. П.* Решение одномерной плоской задачи о движении поршня в идеальном теплопроводном газе // ЖВМ и МФ. — 1963. — Т. 3, № 1. — С. 159–169.
2. *Самарский А. А., Курдюмов С. П., Волосевич П. П.* Бегущие волны в среде с нелинейной теплопроводностью // ЖВМ и МФ. — 1965. — Т. 4, № 2. — С. 199–217.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А., Заглязьминский Л. А., Волосевич П. П., Дегтярев Л. М., Курдюмов С. П., Попов Ю. П., Соколов В. С., Фаворский А. П.* Нелинейный эффект образования самоподдерживающегося высокотемпературного электропроводного слоя газа в нестационарных процессах магнитной гидродинамики // ДАН СССР. — 1967. — Т. 173, № 4. — С. 808–811.
4. *Волосевич П. П., Курдюмов С. П., Попов Ю. П.* Взаимодействие ударной волны с магнитным полем в среде с конечной проводимостью // МЖГ. — 1968. — № 1. — С. 1–67.
5. *Волосевич П. П., Курдюмов С. П., Попов Ю. П.* Влияние конечной проводимости на взаимодействие ударной волны с магнитным полем // МЖГ. — 1968. — № 6. — С. 4–15.
6. *Самарский А. А., Волосевич П. П., Волчинская М. И., Курдюмов С. П.* Метод конечных разностей для решения одномерных нестационарных задач магнитной газодинамики // ЖВМ и МФ. — 1968. — Т. 8, № 5. — С. 1025–1038.
7. *Дегтярев Л. М., Заглязьминский Л. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А., Соколов В. С., Фаворский А. П.* Развитие конечных локальных возмущений электропроводности в потоке слабопроводящего газа в присутствии магнитного поля // ТВТ. — 1969. — Т. 7, № 3. — С. 471.
8. *Александров А. Ф., Зосимов В. В., Курдюмов С. П., Попов Ю. П., Рухадзе А. А., Тимофеев И. Б.* Динамика и излучение прямых сильноточных разрядов в воздухе // ЖЭТФ. — 1971. — Т. 61, вып. 5(11). — С. 1841–1855.
9. *Волосевич П. П., Курдюмов С. П., Леванов Е. И.* Различные режимы теплового нагрева при взаимодействии мощных n оттоков излучения с веществом // Прикладная механика и техн. физика. — 1972. — № 5. — С. 41–48.

10. Самарский А. А., Курдюмов С. П., Куликов Ю. Н., Лесков Л. В., Попов Ю. П., Савичев В. В., Филиппов С. С. Магнитогидродинамическая модель нестационарного ускорения плазмы // ДАН СССР. — 1972. — Т. 206, № 2. — С. 307–310.
11. Самарский А. А., Дородницын В. А., Курдюмов С. П., Попов Ю. П. Образование T -слоев в процессе торможения плазмы магнитным полем // ДАН СССР. — 1974. — Т. 216, № 6. — С. 1254.
12. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. Автомодельный режим сжатия конечной массы плазмы // ДАН СССР. — 1974. — Т. 218, № 6. — С. 1306–1309.
13. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. Возникновение структур при автоматическом режиме сжатия плазмы // ДАН СССР. — 1974. — Т. 219, № 3. — С. 578–581.
14. Афанасьев Ю. В., Басов Н. Г., Волосевич П. П., Гамалий Е. Г., Исаков А. И., Крохин О. Н., Курдюмов С. П., Розанов В. Б., Самарский А. А., Соболевский Н. М. Условия в камере лазерного термоядерного реактора, создаваемые в результате микровзрыва мишени // Квантовая электроника. — 1975. — Т. 2, № 6. — С. 1196–1199.
15. Афанасьев Ю. В., Басов Н. Г., Волосевич П. П., Гамалий Е. Г., Крохин О. Н., Курдюмов С. П., Леванов Е. И., Розанов В. Б., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Анализ физических процессов в лазерных мишенях для эксперимента на уровне энергии лазера 200–300 Дж // Квантовая электроника. — 1975. — Т. 2, № 8. — С. 1816–1818.
16. Афанасьев Ю. В., Басов Н. Г., Волосевич П. П., Гамалий Е. Г., Крохин О. Н., Курдюмов С. П., Леванов Е. И., Розанов В. Б., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Лазерное инициирование термоядерной реакции в неоднородных сферических мишенях // Письма в ЖЭТФ. — 1975. — Т. 21, вып. 2. — С. 150–155.
17. Афанасьев Ю. В., Басов Н. Г., Волосевич П. П., Гамалий Е. Г., Крохин О. Н., Курдюмов С. П., Леванов Е. И., Розанов В. Б., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Экстремальные физические условия в процессе термоядерного горения, инициированного излучением лазера // Письма в ЖЭТФ. — 1976. — Т. 24, вып. 1. — С. 23–25.
18. Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью // ДАН СССР. — 1975. — Т. 223, № 6. — С. 1344–1347.
19. Афанасьев Ю. В., Волосевич П. П., Гамалий Е. Г., Крохин О. Н., Курдюмов С. П., Леванов Е. И., Розанов В. Б. Лазерное сжатие стеклянных оболочек // Письма в ЖЭТФ. — 1976. — Т. 23, вып. 8. — С. 470–473.
20. Волосевич П. П., Дегтярев Л. М., Курдюмов С. П., Леванов Е. И., Попов Ю. П., Самарский А. А., Фаворский А. П. Процесс сверхвысокого сжатия вещества и инициирования термоядерной реакции мощным импульсом лазерного излучения // Физика плазмы. — 1976. — Т. 2, вып. 6. — С. 883–897.
21. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. Автомодельные режимы сжатия плазмы конечной массы // Проблемы лазерного термоядерного синтеза. Доп. 2. — М.: Атомиздат, 1976. — С. 279–294.
22. Самарский А. А., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной тепло-

- проводностью и объемными источниками тепла // ДАН СССР. — 1976. — Т. 227, № 2. — С. 321.
23. *Змитренко Н. В., Курдюмов С. П.* N- и S-режимы сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением // ПМТФ. — 1977. — № 1. — С. 3–23.
24. *Самарский А. А., Еленин Г. Г., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П.* Горение нелинейной среды в виде сложных структур // ДАН СССР. — 1977. — Т. 237, № 6. — С. 1330–1333.
25. *Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью // Письма в ЖЭТФ. — 1977. — Т. 26, вып. 9. — С. 620–624.
26. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Локализация процессов диффузии в средах с постоянными свойствами // ДАН СССР. — 1979. — Т. 247, № 2. — С. 349–353.
27. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* Об одном подходе к сравнению решений параболических уравнений // ЖВМ и МФ. — 1979. — Т. 19, № 6. — С. 1451–1461.
28. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* О сравнении решений параболических уравнений // ДАН СССР. — 1979. — Т. 248, № 3. — С. 586–589.
29. *Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П., Самарский А. А.* Взаимодействие диссипативных тепловых структур в нелинейных средах // ДАН СССР. — 1980. — Т. 251, № 4. — С. 836–840.
30. *Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.* Диссипативные структуры в неоднородной нелинейной горячей среде // ДАН СССР. — 1980. — Т. 251, № 3. — С. 587–590.
31. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* О неограниченных решениях задачи Коши для параболического уравнения // ДАН СССР. — 1980. — Т. 252, № 6. — С. 1362–1365.
32. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* Асимптотическая стадия режимов с обострением и эффективная локализация тепла в задачах нелинейной теплопроводности // Дифференциальные уравнения. — 1980. — Т. 16, № 7. — С. 1196–1204.
33. *Афанасьев Ю. В., Бусурина Л. Н., Волосевич П. П., Галигузова И. И., Гамалий Е. Г., Гуськов С. Ю., Данилова Г. В., Крохин О. Н., Курдюмов С. П.* Вычислительные эксперименты в ЛТС // Физика плазмы. — 1983. — Т. 9, вып. 4. — С. 791–799.
34. *Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А., Леванов Е. И., Маслянкин В. И., Розанов В. Б., Царева Л. С.* Нестационарные диссипативные структуры в нелинейных двухкомпонентных средах с объемными источниками // ДАН СССР. — 1981. — Т. 258, № 5. — С. 1084–1088.
35. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А.* Локализация тепла в нелинейных средах // Дифференциальные уравнения. — 1981. — Т. 17, № 10. — С. 1826–1841.
36. *Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П., Самарский А. А.* Диссипативные структуры в триггерных средах // Дифференциальные уравнения. — 1981. — Т. 17, № 10. — С. 1875–1886.

37. Афанасьев Ю. В., Басов Н. Г., Волосевич П. П., Гамалий Е. Г., Крохин О. Н., Курдюмов С. П., Розанов В. Б., Самарский А. А. Экспериментальные физические условия в процессе термоядерного горения, инициированного излучением лазера // Сб. трудов ФИАН СССР. — М.: Наука, 1982. — Т. 134. — С. 98–99.
38. Афанасьев Ю. В., Волосевич П. П., Гамалий Е. Г., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Розанов В. Б., Феоктистов Л. П. Теоретический анализ возможности осуществления термоядерной «вспышки» в лазерной мишени при энергии $E_{\text{лаз}} \sim 10^5$ Дж // Сб. трудов ФИАН АН СССР. — М.: Наука, 1982. — Т. 134. — С. 167–176.
39. Курдюмов С. П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации // Совр. проблемы математической физики и вычислительной математики. — М.: Наука, 1982. — С. 217–243.
40. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика — теория самоорганизации. Идеи, методы, перспективы. — М.: Знание, 1983. — № 2. — 64 с. (Сер. «Математика, кибернетика»).
41. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде // ЖВМ и МФ. — 1983. — Т. 23, № 3. — С. 19–28.
42. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Потапов А. Б., Самарский А. А. Архитектура многомерных тепловых структур // ДАН СССР. — 1984. — Т. 274, № 5. — С. 1071–1075.
43. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Об одной параболической системе квазилинейных уравнений (ч. 1) // Дифференциальные уравнения. — 1983. — Т. 19, № 12. — С. 2123–2140.
44. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Об одной параболической системе квазилинейных уравнений (ч. 2) // Дифференциальные уравнения. — 1985. — Т. 21, № 9. — С. 1544–1559.
45. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Об асимптотической устойчивости инвариантных решений нелинейных уравнений теплопроводности с источником // Дифференциальные уравнения. — 1984. — Т. 20, № 4. — С. 614–632.
46. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. О классификации двухкомпонентных систем в окрестности точки бифуркации // ДАН СССР. — 1984. — Т. 279, № 3. — С. 591–595.
47. Бункин Ф. В., Галактионов В. А., Кириченко Н. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Об одной нелинейной задаче лазерной термохимии // ДАН СССР. — 1984. — Т. 279, № 4. — С. 838–842.
48. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. О диффузионном хаосе в нелинейных диссипативных системах // ДАН СССР. — 1984. — Т. 279, № 5. — С. 1091–1096.
49. Бункин Ф. В., Галактионов В. А., Кириченко Н. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Об одной нелинейной задаче лазерной термохимии (ч. 2) // Дифференциальные уравнения. — 1985. — Т. 21, № 12. — С. 2097–2105.
50. Бункин В. А., Галактионов В. А., Кириченко Н. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Об одной нелинейной задаче лазерной термохимии (ч. 1) // Дифференциальные уравнения. — 1985. — Т. 21, № 11. — С. 1947–1958.

51. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Об асимптотической устойчивости автомодельных решений уравнения теплопроводности с нелинейным стоком // ДАН СССР. — 1985. — Т. 281, № 1. — С. 23–28.
52. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Об асимптотических «собственных функциях» задачи Коши для одного нелинейного параболического уравнения // Матем. сб. — 1985. — Т. 126 (168), № 4. — С. 435–472.
53. Ахромеева Т. С., Бункин Ф. В., Кириченко Н. А., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. О некоторых свойствах математической модели лазерного нагрева металлов в воздухе // ДАН СССР. — 1985. — Т. 281, № 1. — С. 55–59.
54. Курдюмов С. П., Посашков С. А., Самарский А. А., Синило А. В. Нестационарные тепловые структуры в нелинейной среде со стоками тепла // ДАН СССР. — 1986. — Т. 290, № 3. — С. 595–599.
55. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Парадоксы мира нестационарных структур. — М: Знание, 1985. — № 5. — 48 с. (Сер. «Математика и кибернетика»).
56. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Нелинейные явления и вычислительный эксперимент // Вестн. АН СССР. — 1985. — № 9. — С. 64–77.
57. Ахромеева Т. С., Малинецкий Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Двухкомпонентные диссипативные системы в окрестности точки бифуркации // Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. — М.: Наука, 1986. — С. 1–51.
58. Галактионов В. А., Посашков С. А., Самарский А. А. Квазилинейное параболическое уравнение со сложным спектром неограниченных автомодельных решений // Математическое моделирование процессов в нелинейных средах. — М.: Наука, 1986. — С. 142–182.
59. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Посашков С. А., Самарский А. А. Об одной нелинейной эллиптической задаче со сложным спектром решений // ЖВМ и МФ. — 1986. — Т. 26, № 3. — С. 398–407.
60. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А. О новом классе асимптотических собственных функций задачи Коши для одного нелинейного параболического уравнения // ЖВМ и МФ. — 1985. — Т. 25, № 12. — С. 1833–1839.
61. Бункин Ф. В., Галактионов В. А., Кириченко Н. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Качественные методы в физике нагрева металлов в воздухе // Изв. АН СССР. Сер. физ. — 1985. — Т. 49, № 6. — С. 1046–1053.
62. Самарский А. А., Курдюмов С. П., Ахромеева Т. С., Малинецкий Г. Г. Моделирование нелинейных явлений в современной науке // Информатика и научно-технический прогресс. — М.: Наука, 1987. — С. 69–91.
63. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Теория режимов с обострением в сжимаемых средах // Сб. ВИНТИ. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. — М., 1986 (1987). — Т. 28. — С. 3–99.
64. Галактионов В. А., Дородницын В. А., Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотика,

- структуры // Сб. ВИНТИ. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. — М., 1986 (1987). — Т. 28. — С. 95–205.
65. *Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.* О классификации решений системы нелинейных дифференциальных уравнений в окрестности точки бифуркации // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. — М., 1986. — Т. 28. — С. 207–313.
66. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987. — 480 с.
67. *Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г.* Синергетика — теория самоорганизации. Идеи, методы, перспективы // Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. Введение в информатику с позиций математического моделирования. — М.: Наука, 1988. — С. 79–136.
68. *Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б., Самарский А. А.* Структуры в нелинейных средах // Компьютеры и нелинейные явления. М.: Наука, 1988. — С. 5–43.
69. *Бакирова М. И., Димова С. Н. (НРБ), Дородницын В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А., Свирицевский С. Р.* Инвариантные решения уравнения теплопроводности, описывающие направленное распространение горения и спиральные волны в нелинейной среде // ДАН СССР. — 1988. — Т. 299, № 2. — С. 346–350.
70. *Бункин Ф. В., Галактионов В. А., Кириченко Н. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Локализация в одной нелинейной задаче зажигания излучением // ДАН СССР. — 1988. — Т. 302, № 1. — С. 68–71.
71. *Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Потапов А. Б., Самарский А. А.* Сложные многомерные структуры горения нелинейной среды // ЖВМ и МФ. — 1986. — Т. 26, № 8. — С. 1189–1205.
72. *Ахромеева Т. С., Бункин Ф. В., Кириченко Н. А., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.* Периодические колебания и диффузионный хаос при нагреве металлов излучением // Изв. АН СССР. Сер. физ. — 1987. — Т. 51, № 6. — С. 1154–1161.
73. *Басов Н. Г., Гарина С. М., Гуськов С. Ю., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Розанов В. Б., Самарский А. А.* Коэффициенты усиления лазерных мишеней с дейтериевым горючим // Письма в ЖЭТФ. — 1988. — Т. 48, вып. 5. — С. 245–247.
74. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Процессы в открытых диссипативных системах. — М.: Знание, 1988. — № 11. — 32 с. (Сер. «Математика и кибернетика»).
75. *Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Тельковская О. В.* Режимы с обострением в двухкомпонентных средах // Математическое моделирование. — 1989. — № 1. — С. 34–50.
76. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* О структуре предельных распределений неограниченных решений квазилинейных параболических уравнений // ДАН СССР. — 1988. — Т. 301, № 4. — С. 781–785.

77. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А. О методе стационарных состояний для квазилинейных параболических уравнений // Матем. сб. — 1989. — Т. 180, № 8. — С. 995–1016.
78. Малинецкий Г. Г., Курдюмов С. П., Потапов А. Б. Синергетика — новые направления. — М.: Знание, 1989. — № 11. — 64 с. (Сер. «Математика и кибернетика»).
79. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. О приближенном исследовании симметрических локализованных структур // ДАН СССР. — 1990. — Т. 314, № 2. — С. 327–331.
80. Аршинов В. А., Курдюмов С. П., Свирский Я. И. Классическая механика Ньютона и проблема самоорганизации в современном научном познании // Ньютон и философские проблемы XX века. — М.: Наука; ИФ РАН, 1991. — С. 98–116.
81. Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. — М.: Наука, 1992. — С. 511.
82. Князева Е. Н., Курдюмов С. П. Синергетика как новое мировидение: диалог с И. Пригожиным // Вопр. философии. — 1992. — № 12. — С. 3–20.
83. Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Возникновение структур в нелинейных средах и нестационарная термодинамика режимов обострения // Наука, технология, вычислительный эксперимент. — 1993. — С. 33–62.
84. Князева Е. Н., Курдюмов С. П. Синергетика: начала нелинейного мышления // Обществ. науки и современность. — 1993. — № 2. — С. 38–51.
85. Князева Е. Н., Курдюмов С. П. Интуиция как самодообраивание // Вопр. философии. — 1994. — № 2. — С. 110–122.
86. Князева Е. Н., Курдюмов С. П. У истоков синергетического видения мира // Самоорганизация и наука. Опыт философского осмысления. — М.: ИФРАН, 1994. — С. 162–186.
87. Князева Е. Н., Курдюмов С. П. Законы эволюции и самоорганизации сложных систем. — М.: Наука, 1994. — 238 с.
88. Курдюмов С. П., Гуревич М. И., Тельковская О. В. Автомодельные решения квазилинейного уравнения теплопроводности с распределенной плотностью и нелинейными объемными источниками // Дифференциальные уравнения. — 1995. — Т. 31, № 10. — С. 1722–1733.
89. Князева Е. Н., Курдюмов С. П. Синергетика и восток. Близость далекого // Духовные истоки Японии: Альманах. — М.: Толк, 1995. — С. 273–312.
90. Князева Е. Н., Курдюмов С. П. Синергетика в контексте диалога восток–запад // Россия и современный мир. — М., 1995. — № 3. — С. 57–78.
91. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Нестационарные структуры, динамический хаос, клеточные автоматы // Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур. — М.: Наука, 1996. — С. 95–164.

Научное издание

РЕЖИМЫ С ОБОСТРЕНИЕМ: ЭВОЛЮЦИЯ ИДЕИ

Под ред. *Г.Г. Малинецкого*
Составитель *В.С. Курдюмов*

Редактор *И.Л. Легостаева*
Оригинал-макет: *Е.Н. Водоватова*
Оформление переплета: *А.Ю. Алехина*

Подписано в печать 07.07.06. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 19,5.
Уч.-изд. л. 21,5. Тираж 600 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
<http://www.fml.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ППП «Типография «Наука»
121099, г. Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 5-9221-0768-2



9 785922 107686