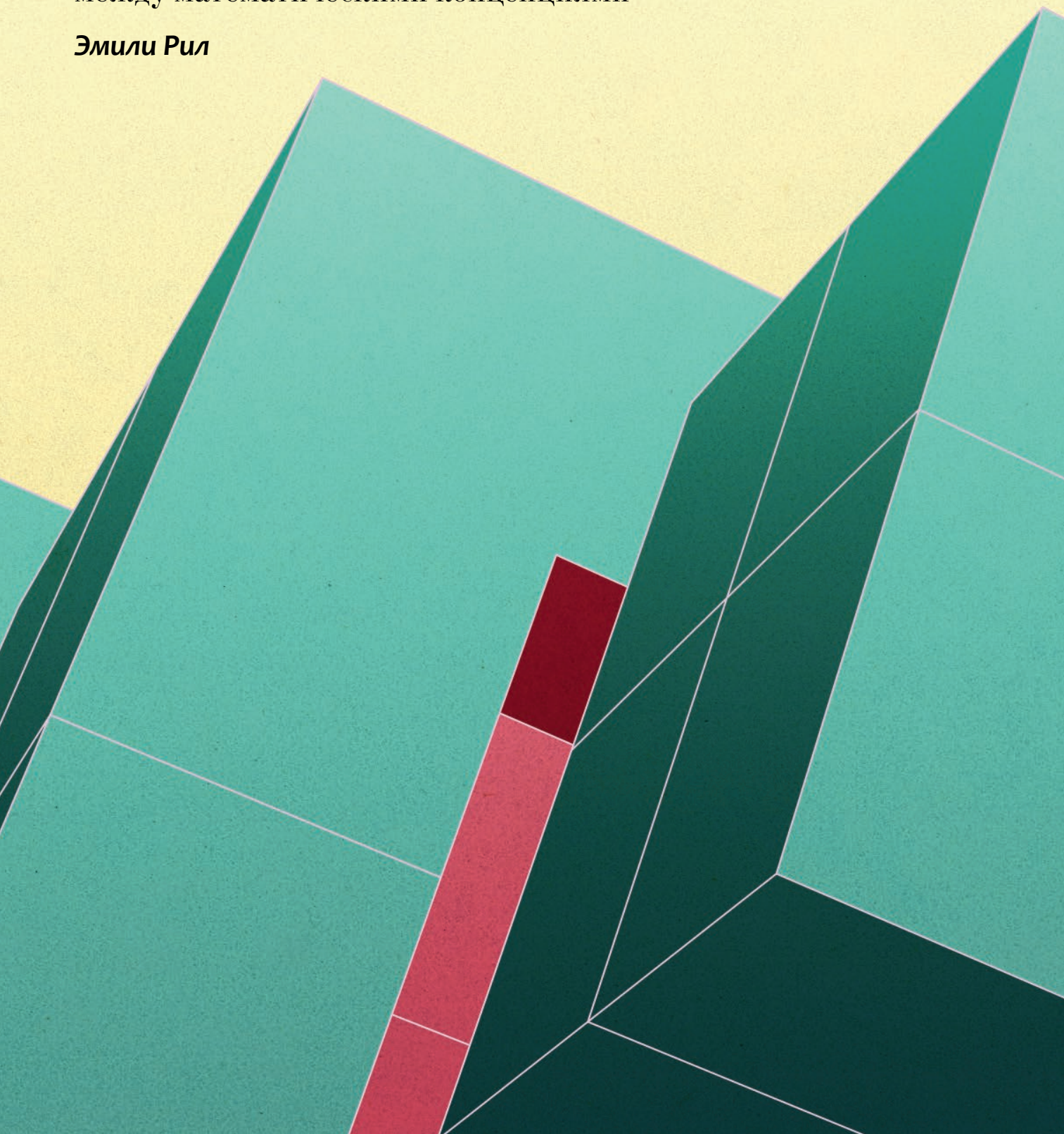
МАТЕМАТИКА

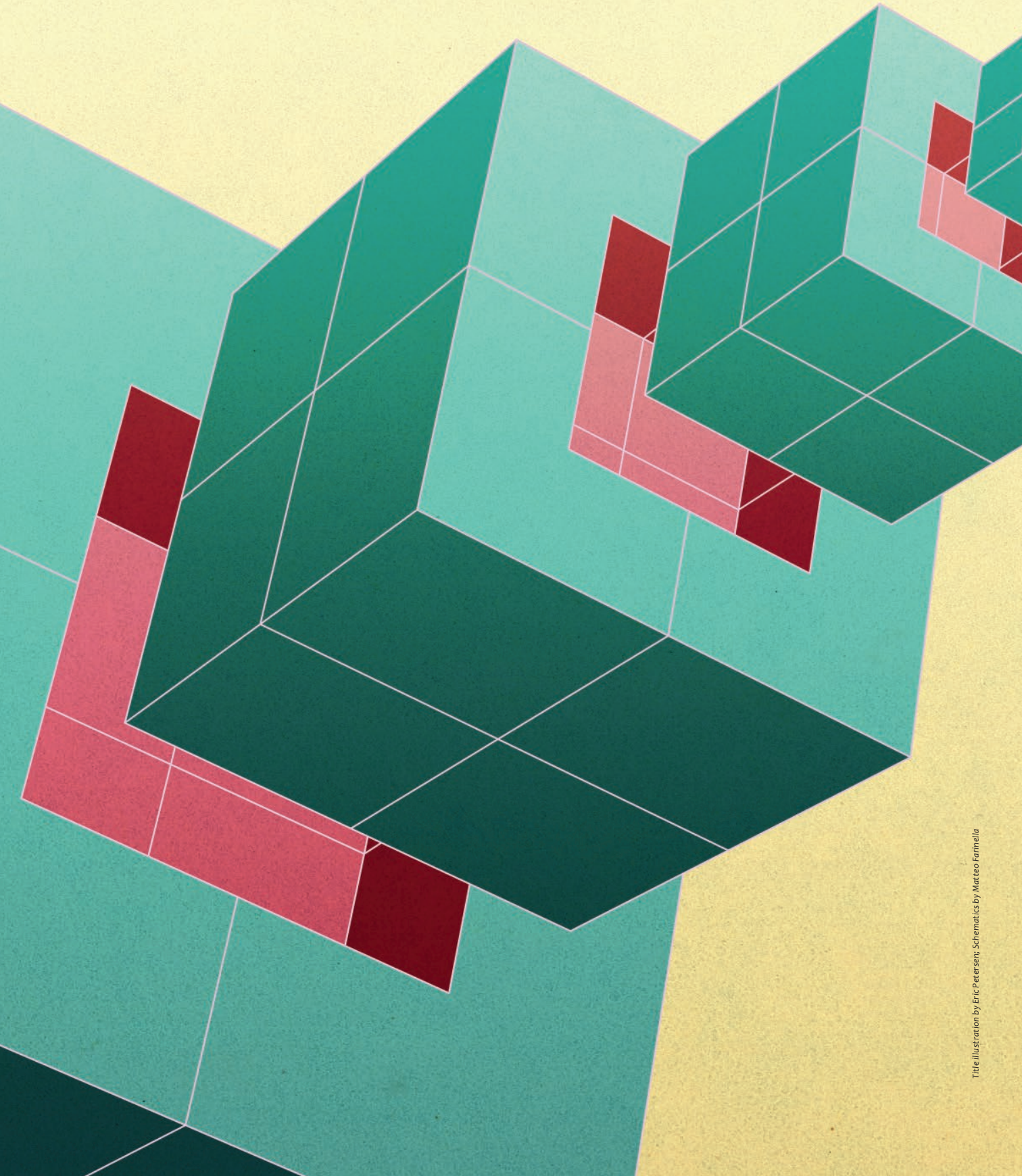
Бесконечная м

Расширение теории категорий на бесконечные измерения открыло путь к новым теориям и неожиданным связям между математическими концепциями

Эмили Рил



атематика



Title illustration by Eric Petersen; Schematics by Matteo Farinella

ОБ АВТОРЕ

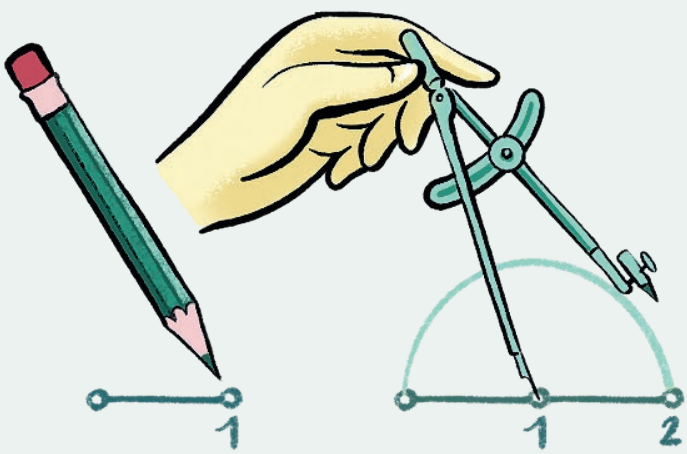
Эмили Рил (Emily Riehl) — математик из Университета Джонса Хопкинса, где она занимается теорией категорий и основами бесконечных категорий. Ее книга «Элементы теории ∞-категорий» (*Elements of ∞-Category Theory*), написанная в соавторстве с Домиником Верити (Dominic Verity), будет опубликована в 2022 г.

Одним погожим осенним днем в Новой Англии я, тогда студентка первого курса колледжа, шла мимо входа в метро, как вдруг мое внимание привлекла математическая задача. Какой-то человек рисовал прямо на стене задачи-головоломки. Согласно одной из них, при помощи линейки и циркуля нужно было построить куб, объем которого был бы вдвое больше, чем у заданного куба.

Эта картина заставила меня остановиться. Я видела эту задачу раньше. Фактически ей более двух тысячелетий: по словам Плутарха, подобная формулировка восходит к Платону. При помощи линейки (считается, кстати, что на ней нет привычных делений) можно соединить две точки и удлинить полученный отрезок в любом направлении. Посредством циркуля можно нарисовать круг любого радиуса с заданным центром. Ключевая особенность подобного типа головоломок состоит в том, что любые точки или линии, присутствующие на окончательном чертеже, либо находились там изначально согласно условию задачи, либо были получены последовательно из предыдущего шага заданным построением.

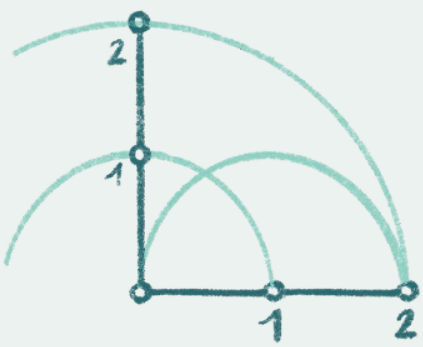
Чтобы удвоить объем куба, начнем с одного из его ребер, длину которого можно принять равной 1, так как это единственная

ЗАДАЧА НА ПОСТРОЕНИЕ



Шаг 1. С помощью циркуля и линейки отложите на прямой фиксированное расстояние (примем его за 1).

Шаг 2. Используя тот же радиус, отложите расстояние, равное 2.

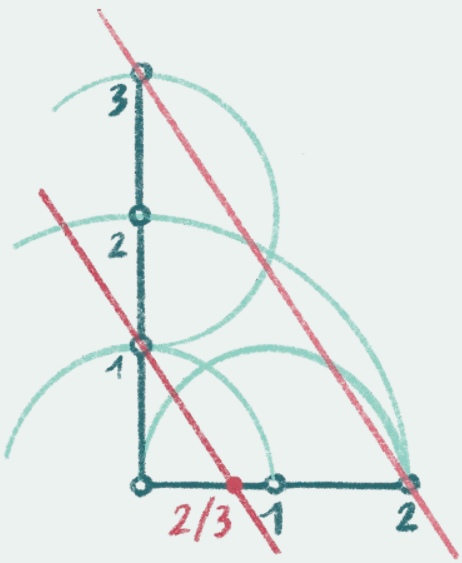


Шаг 3. При помощи циркуля и линейки постройте перпендикуляр к данной прямой, проходящий через условное начало координат. Разбейте этот перпендикуляр на единичные отрезки, как указано ранее.

заданная единица измерения. Чтобы построить куб большего размера, нужно найти способ, используя в качестве инструментов только линейку и циркуль, нарисовать ребро новой требуемой длины, которая соответственно должна составлять $\sqrt[3]{2}$ (кубический корень из двух).

Это сложная задача, и более 2 тыс. лет никому не удавалось ее решить. Наконец в 1837 г. Пьер Лоран Ванцель объяснил, почему никому так и не удалось добиться успеха, доказав, что это невозможно. В его доказательстве использовался передовой математический аппарат того времени, основы которого были заложены его французским современником Эваристом Галуа, который погиб в 20 лет на дуэли, вероятно, связанной с несчастной любовной историей. В мои 20 на моем счету было куда меньше впечатляющих математических достижений, но я по крайней мере поняла доказательство Ванцеля.

Идея заключается в следующем: рассматривая произвольную точку на плоскости как начало координат, а длину заданного отрезка принимая равной 1, сравнительно несложно использовать линейку и циркуль для построения всех точек на числовой прямой, координаты которых представляют собой рациональные числа (игнорируя, подобно всем настоящим математикам, невозможность построить бесконечное количество точек за конечный промежуток времени).



Шаг 4. С помощью линейки проведите прямую через точку 2 на горизонтальной оси и точку 3 на вертикальной оси. Постройте параллельную прямую, проходящую через точку 1 вертикальной оси и точку 2/3 горизонтальной оси.

Ванцель показал, что если использовать только эти инструменты, то каждая вновь построенная точка должна быть решением квадратного полиномиального уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, коэффициенты которого a, b и c находятся среди ранее построенных точек. Напротив, точка $\sqrt[3]{2}$ представляет собой корень кубического многочлена $x^3 - 2 = 0$, и теория Галуа убедительно доказывает, что вы никогда не сможете получить решение неприводимого кубического многочлена, решая квадратные уравнения (по сути, потому что нет степени 2, которая бы делилась на 3 без остатка).

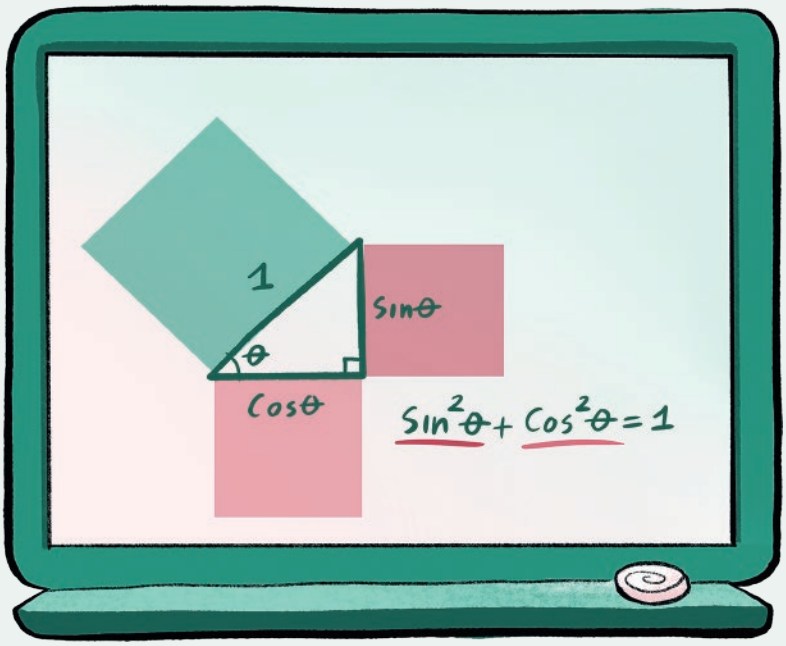
Вооруженная этим знанием, я не смогла удержаться от общения с тем человеком на улице. Как и ожидалось, моя попытка объяснить, откуда я знаю, что эта задача не имеет решения, ни к чему не привела. Вместо этого он стал утверждать, что образование сделало меня ограниченной и неспособной «мыслить нестандартно». В конце концов моей девушке удалось увести меня и мы продолжили путь.

Только один вопрос вертелся в моей голове. Каким образом мне, желторотой студентке-третьекурснице, удалось всего за несколько недель научиться достаточно свободно оперировать такими абстрактными понятиями, как поля Галуа? Этот материал пришелся на окончание курса, наполненного группами симметрии, кольцами многочленов и связанными с ними теоретическими сокровищами, которые взорвали бы умы математических гигантов, таких как Исаак Ньютон, Готфрид Лейбниц, Леонард Эйлер и Карл Фридрих Гаусс. Как удается математикам столь быстро обучать следующие поколения студентов, рассказывая им о теориях, которые еще вчера удивляли экспертов и были доступны единицам?

Частично ответ связан с недавними достижениями в математике, которые открывают взгляд на нее «с высоты птичьего полета», через постоянно растущие уровни абстракции. Теория категорий — это раздел математики, который объясняет, как различные математические объекты могут считаться «одинаковыми». Его фундаментальная теорема говорит нам, что любой математический объект, каким бы сложным он ни был, полностью определяется его отношениями к подобным объектам. Теория категорий нашла применение и в процессе обучения молодых математиков новейшим идеям и теориям. Вместо того чтобы углубляться в изучение отдельных законов, применимых только в конкретных областях, можно попытаться понять общие абстрактные правила, действующие во всей математической теории.

По мере развития математики расширяется представление о том, при каких условиях два объекта могут считаться «одинаковыми». В течение нескольких последних десятилетий я и многие другие исследователи работали над расширением теории категорий, проливающим свет на новое понятие «уникальности». Объектом исследований стали новые категории, называемые категориями бесконечности (∞-категории), которые расширяют теорию категорий на бесконечные измерения. Язык ∞-категорий дает математикам мощные инструменты для изучения областей, в которых отношения между объектами слишком тонкие, чтобы их можно было определить

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА



в терминах традиционных категорий. Перспектива «бесконечного уменьшения масштаба» предлагает новый способ осмысления старых концепций и путь к открытию новых.

Категории

Как и многих моих коллег, меня эта теория привлекла отчасти из-за плохой памяти. Со школьной скамьи мы привыкли к изобилию формул, необходимых для запоминания, — на ум, например, приходят тригонометрические тождества. Лично меня утешало то, что наиболее часто используемые формулы могут быть получены заново из тождества $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$, которое имеет элегантное геометрическое объяснение: это приложение теоремы Пифагора к прямоугольному треугольнику с гипотенузой, равной 1, и острым углом θ градусов.

Подобное утопическое ви́дение математики, при котором все просто «имеет смысл» и ничего не нужно запоминать, в определенной степени сходит на нет в университете. На этом этапе студенты знакомятся с «зоопарком» математических объектов, возникших в течение последних нескольких столетий. Группы, кольца и поля относятся к области математики, известной как алгебра. (Это слово взято из книги IX в. персидского математика и астронома Аль-Хорезми, название которой переводится как «Книга о восполнении и противопоставлении».) В течение следующего тысячелетия алгебра эволюционировала от изучения природы решений алгебраических уравнений к изучению абстрактных систем. Например, поскольку никакое действительное число x не удовлетворяет уравнению $x^2 + 1 = 0$, математикам пришлось расширить это множество, добавив мнимое число i, удовлетворяющее соотношению $i^2 + 1 = 0$. Так родились комплексные числа.

Алгебра — лишь один из предметов в программе бакалавриата по специальности «математика». Другие краеугольные камни — это топология (абстрактное исследование пространств) и математический анализ, который начинается с вещественного исчисления и переходит к более экзотическим областям вероятностных пространств и случайных величин, а также комплексных многообразий и голоморфных функций. Как студенту усвоить все это?

Парадоксальная идея математики заключается в упрощении посредством абстракции. Как пишет Юджиния Чэнь (Eugenia Chen) из Чикагского института искусств в своей книге «Искусство логики в нелогичном мире» (*The Art of Logic in an Illogical World*), «важное свойство абстракции — то, что многие различные ситуации становятся одинаковыми, когда вы опускаете некоторые детали». Современная алгебра была создана в начале XX в., когда математики решили объединить исследования различных структур, возникавших при анализе решений алгебраических уравнений или конфигураций фигур на плоскости. Чтобы связать исследования этих структур, математики ввели основные абстрактные понятия и аксиомы, описывающие их общие свойства. Группы, кольца и поля были введены в математическую вселенную вместе с идеей о том, что математический объект может быть описан в терминах свойств, которыми он обладает, и исследован абстрактно, независимо от конкретных примеров или конструкций.

Джон Хортон Конвей (John Horton Conway), как известно, размышлял над любопытной онтологией любых математических объектов: «Нет сомнений в том, что они действительно существуют, но взять и ткнуть в них пальцем можно лишь мысленно. Это удивительно, и я до сих пор этого не понимаю, несмотря на то что всю свою жизнь был математиком. Как что-то может быть где-то, не будучи на самом деле?»

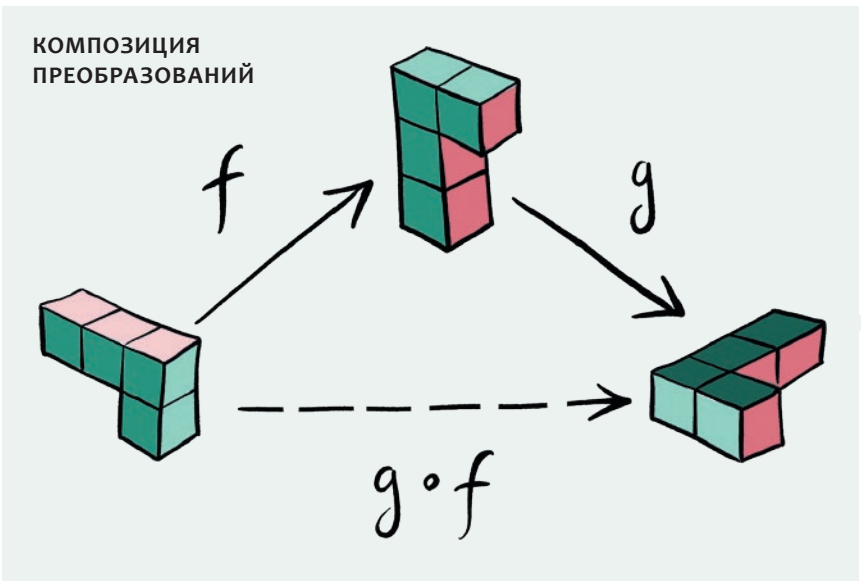
Но этот мир математических объектов, которые могут существовать, «фактически не суще-

ствуя», создал проблему: он слишком велик для понимания любого человека. Даже в алгебре существует достаточное количество понятий и теорий, обязательных для изучения и требующих немалого времени для осмысления. Примерно на рубеже XX в. математики начали исследовать так называемую универсальную алгебру — раздел математики, изучающий общие свойства алгебраических систем, элементами которого могли бы быть совершенно различные объекты (например, числа) и операции над ними (например, сложение и умножение), удовлетворяющие списку соответствующих аксиом, таких как ассоциативность, коммутативность и дистрибутивность. Можно наложить дополнительные ограничения и сделать выбор: частично или полностью определена та или иная операция? Обратима ли она? Сужая таким образом выбранную нами систему, мы приходим к стандартным алгебраическим структурам: группам, кольцам и полям. Но можно и не ограничивать себя этим выбором, который неизбежно приводит нас к исчезающе малой части бесконечного многообразия возможностей.

Распространение новых абстрактных математических объектов вносит свою сложность. Один из способов все упростить — выйти на новый уровень абстракции, где (что удивительно) мы сможем доказывать теоремы, касающиеся большого количества математических объектов одновременно, не уточняя, о каких именно объектах идет речь.

Распространение новых абстрактных математических объектов вносит свою сложность. Один из способов все упростить — выйти на новый уровень абстракции, где мы сможем доказывать теоремы, касающиеся большого количества математических объектов одновременно, не уточняя, о каких именно объектах идет речь

Теория категорий, созданная в 1940-х гг. Сэмюэлом Эйленбергом (Samuel Eilenberg) и Сондерсом Маклейном (Saunders Mac Lane), и есть этот новый уровень абстракции. Изначально эта теория была введена лишь для того, чтобы дать строгое определение разговорного термина «естественная эквивалентность». Однако фактически теория категорий предложила новый способ универсального мышления, применимый и в универсальной алгебре, и в других областях математики. С помощью языка Эйленберга и Маклейна мы теперь способны осознать, что каждое множество математических объектов может быть отнесено к своей собственной категории, которая есть не что иное, как совокупность объектов и допустимых преобразований, схематически изображаемых в виде стрелок между объектами. Например, в линейной алгебре изучаются абстрактные векторные пространства, такие как трехмерное евклидово пространство. Соответствующие преобразования в этом случае суть линейные преобразования, для каждого из которых необходимо определить исходное и результирующее векторные пространства, то есть указать типы векторов, возникающие в качестве «входных» и «выходных».



Подобно функциям, преобразования (или морфизмы) в данной категории обладают определенными свойствами. Они могут быть «составными», то есть допустимо применять один морфизм к результатам другого. Для любой пары преобразований $f\colon A \to B$ (читается как «f — преобразование из A в B») и $g\colon B \to C$ категория определяет уникальное составное преобразование обозначаемое как $g \circ f\colon A \to C$ (читается как «композиция g и f — преобразование из A в C»). Закон композиции морфизмов

ассоциативен, что означает: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Наконец, определен тождественный морфизм: каждый объект B имеет «преобразование идентичности», обычно обозначаемое 1_B и обладающее свойством $g \circ 1_B = g$ и $1_B \circ f = f$ для любых преобразований g и f, исходный и результирующий объект которых, соответственно, равен B.

Каким образом категории способны помочь незадачливому студенту, столкнувшемуся с непомерно большим количеством математических объектов и не имеющему достаточно времени, чтобы изучить их все? Любой класс структур, определяемых в универсальной алгебре, может сильно отличаться от других, но категории, включающие в себя эти объекты, очень похожи с точки зрения свойств и единого «категориального» языка.

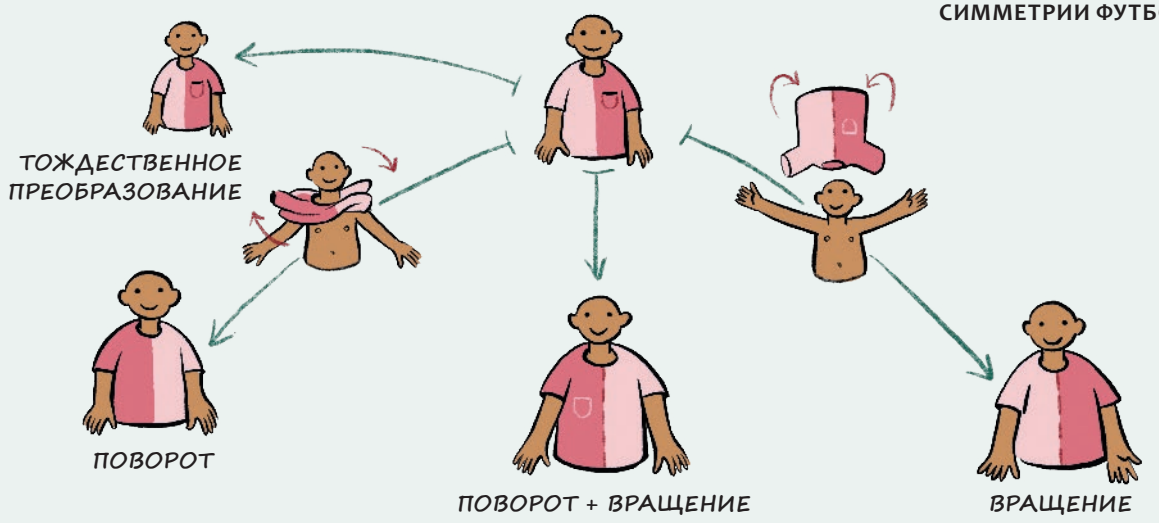
Обладающие достаточным опытом математики знают, чего ожидать при встрече с новыми типами алгебраических структур. Эта идея отражена в современных учебниках, где теориям групп, колец и векторных пространств отведены соответствующие последовательные главы, главным образом потому, что эти теории параллельны. Легко представить себе и другие, более свободные аналогии между теорией категорий и математическими структурами, с которыми студенты сталкиваются на курсах топологии или анализа. Благодаря этим сходствам новый материал усваивается быстрее. Подобные шаблоны позволяют тратить больше времени на изучение специальных тем, принципиально различающихся в отдельных математических дисциплинах. И все же не стоит забывать, что новые открытия в области математики часто бывают вдохновлены неожиданными аналогиями и сопоставлениями между ранее не связанными областями.

АССОЦИАТИВНОСТЬ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ КОМПОЗИЦИИ

Симметрии

Последовательные уровни абстракции от конкретных математических структур до аксиоматических систем и далее до категориальных объектов порождают новую проблему. Что означает фраза «Этот объект такой же, как и тот»? В качестве примера рассмотрим группу, представляющую собой абстрактную совокупность преобразований — симметрий, элементы которой Эми Уилкинсон (Amie Wilkinson) из Чикагского университета любит описывать как «движения», переворачивающие или вращающие объект перед установкой его в нечто вроде «исходной позиции».

СИММЕТРИИ ФУТБОЛКИ

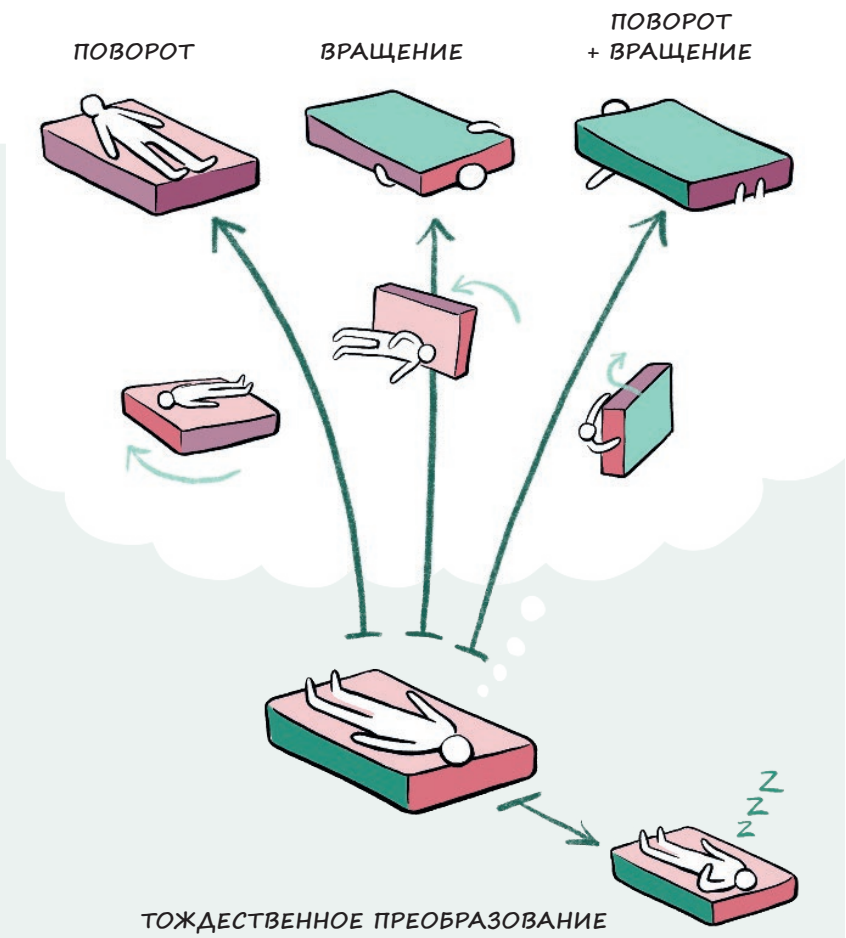


Можно, например, изучить группу симметрий футболки. Одно преобразование можно рассматривать как тождественное: человек просто носит футболку как обычно. Другая симметрия соответствует преобразованию, при котором владелец вынимает руки из рукавов и, все еще удерживая футболку на шее, поворачивает ее на 180°, меняя тем самым рукава местами. Футболка теперь надета задом наперед. Следующая симметрия соответствует движению, при котором футболку полностью снимают, выворачивают наизнанку и снова надевают таким образом, чтобы руки попали в те же рукава. Итоговая симметрия объединяет последние два преобразования (что нетипично для групп: движения могут выполняться в любом порядке без изменения конечного результата). Каждое из этих четырех преобразований считается «симметричным», потому что они приводят к тому, что футболку носят, по существу, так же, как и в начале.

Другая группа симметрий — это группа переворачивания матраса. В дополнение к тождественному преобразованию (при котором матрас остается в исходном положении) можно рассмотреть возможные вращения матраса вокруг различных осей или их комбинации. (Матрасы редко бывают квадратными, но если бы это было так, то различных симметричных преобразований было бы больше, чем описано здесь.) Несмотря на то что футболка не имеет ничего общего с матрасом, в некотором смысле эти две группы очень схожи. Прежде всего, они имеют одинаковое количество возможных преобразований (в данном случае четыре). Но, что особенно важно, легко можно построить пары преобразований из группы надевания футболки и группы переворачивания матраса так, чтобы композиции соответствующих преобразований также соответствовали бы друг другу. Другими словами, можно сопоставить преобразования из этих двух групп (тождественность с тождественностью, поворот с поворотом, вращение с вращением и т.д.). Кроме того, если рассмотреть композицию двух последовательных преобразований в одной группе, она будет соответствовать композиции последовательных преобразований другой группы. Математики говорят, что эти группы связаны «изоморфизмом» (от греч. *isos* — «равный, подобный» и *morphe* — «форма»).

Понятие изоморфизма можно определить для любой категории, что позволит нам распространить его на различные математические контексты. Изоморфизм между двумя объектами A и B в категории определяется парой преобразований, f: $A \to B$ и g: $B \to A$, с условием, что композиции $g \circ f$ и $f \circ g$ равны соответствующим тождественным преобразованиям 1_A и 1_B. В категориях топологических пространств понятие изоморфизма представлено парой непрерывных взаимообратных функций. Например, существует непрерывное преобразование (деформация), которое позволит вам придать бублику форму кофейной чашки: дырка от бублика при этом превратится в дырку от ручки, и наоборот. (Чтобы деформация была действительно непрерывной, не следует разрывать тесто, из которого вы делаете бублик, и тем более не стоит выпекать его до начала эксперимента.)

СИММЕТРИИ МАТРАСА



Так родился анекдот о том, что тополог не может отличить чашку от бублика: как абстрактные пространства эти объекты совершенно одинаковы. Но на деле выясняется, что топологи еще менее разборчивы и наблюдательны. Они привыкли называть объекты «одинаковыми» и в том случае, если они «гомотопически эквивалентны». Это тоже своего рода изоморфизм, но в более экзотической категории пространств. Гомотопическая эквивалентность — еще один тип непрерывной деформации. Например, представьте, что вы начинаете сокращать длину ваших брюк до тех пор, пока они не превратятся в стринги. И «брюки», и «стринги» — это пространства разной размерности, но с одинаковой фундаментальной топологической структурой: два отверстия для ног сохраняются несмотря ни на что.

Другая гомотопическая эквивалентность сжимает трехмерное евклидово пространство в одну точку посредством преобразования, которое иногда называют «Большим взрывом наоборот». При этом каждая точка непрерывно движется к «центру взрыва» со скоростью, пропорциональной расстоянию до этого начала координат.

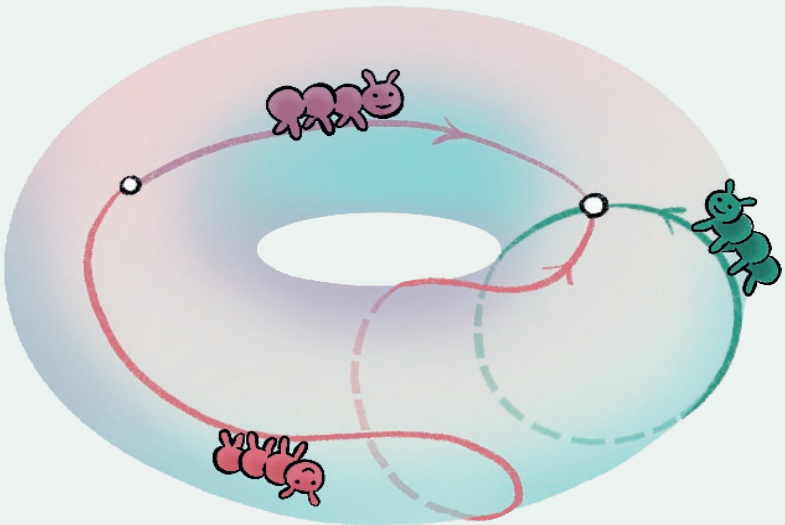
Интуитивное представление о том, что изоморфные объекты оказываются полностью взаимозаменяемыми в рамках данной конструкции или теории, чрезвычайно привлекательно. В качестве примера можно рассмотреть операцию, известную как несвязное объединение двух множеств A и B. Подобно обычному объединению, несвязное (дизъюнктивное) объединение $A \cup B$ содержит в себе копию каждого элемента A и копию каждого элемента B. Однако если у A и B есть общий элемент, то несвязное объединение $A \cup B$ включает сразу две копии этого элемента, одна из которых «помечена» как принадлежащая множеству A, а другая — множеству B. Используя аксиомы теории множеств, можно поразному строить дизъюнктное объединение. В результате будут получаться хотя и различные, но изоморфные друг другу множества. Вместо того чтобы тратить время на споры о том, какая конструкция — наиболее каноническая, удобнее просто закрыть глаза на эту двусмысленность и «с точностью до изоморфизма» ссылаться на универсальные свойства операции дизъюнктивного объединения для каждого конкретного множества. Точно так же и вышеописанные группы надевания футболки и переворачивания матраса, по сути, представляют собой одну и ту же группу, которую математики называют «четверная группа Клейна».

Бесконечные категории

История о происхождении фундаментальной теоремы теории категорий пользуется большой популярностью. В 1954 г. на Северном вокзале Парижа, сперва в привокзальном кафе, а после в вагоне поезда перед самым его отправлением, молодой математик по имени Нобуо Йонеда (Nobuo Yoneda) изложил Сондерсу Маклейну свою «лемму». Ее следствием становится тот факт, что любой объект в любой категории полностью определяется его отношением к другим объектам в данной категории, то есть множеством преобразований, имеющих данный объект в качестве исходного или результирующего. Таким образом, мы можем охарактеризовать топологическое пространство X, исследуя его с помощью непрерывных отображений $f\colon T \to X$, прообразом которых выступает другое пространство T. Под T можно подразумевать, например, пространство, состоящее из одной точки, и тогда элементы X будут соответствовать некоторым непрерывным функциям $x\colon * \to X$ с областью определения, состоящей из этой самой точки. Можно ответить и на вопрос, связано ли пространство X или нет, рассмотрев для этого отображения $p\colon I \to X$, область определения которых — интервал $I = [0,1]$. Каждое такое отображение определяет параметризованный «путь» или «траекторию движения» в пространстве X от точки $p(0)$ до точки $p(1)$.

Точки и подобные «пути» можно использовать для переформулирования топологических задач в алгебраические: каждое топологическое пространство X имеет связанную категорию $\pi_1 X$,

ПУТИ МУРАВЬЕВ В ПРОСТРАНСТВЕ X

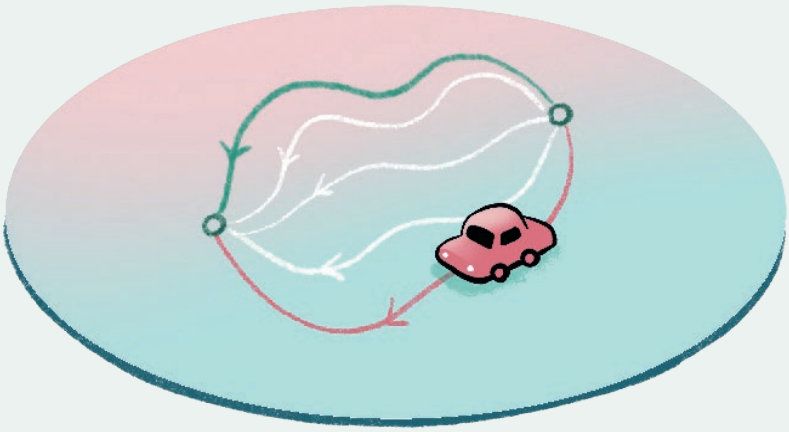


называемую «фундаментальным группоидом» X. Элементы этой категории — точки пространства, а преобразования — это и есть пути. Если в данном пространстве один путь может быть преобразован в другой, в то время как его начальная и конечная точки совпадают, эти два пути определяют одно и то же преобразование. Такие деформации — гомотопии — необходимы для описания композиции нескольких путей и определения ассоциативной операции, как того требует категория.

Ключевое преимущество фундаментальной конструкции группоидов — то, что она «функториальна». Это означает, что непрерывная функция $f: X \to Y$, действующая из одного топологического пространства в другое, порождает соответствующее преобразование $\pi_1 f: \pi_1 X \to \pi_1 Y$, действующее между фундаментальными группоидами. Для этого отображения определены композиция и тождественное преобразование, то есть $\pi_1(g \circ f) = \pi_1 g \circ \pi_1 f$ и $\pi_1(1_X) = 1_{\pi_1 X}$ соответственно. Эти два свойства, которые в совокупности называются «функториальностью», предполагают, что фундаментальная группа «наследует» некоторую важную информацию об исходных топологических пространствах. В частности, если два пространства не гомотопически эквивалентны, их фундаментальные группоиды также неэквивалентны.

Однако фундаментальный группоид — не полный инвариант. С его помощью можно, например, легко отличить окружность (или кольцо) от круга (или диска). В фундаментальном группоиде окружности различные варианты путей, соединяющих две точки, можно охарактеризовать целыми числами — они показывают, сколько полных оборотов вокруг центра совершит траектория (при этом знак «+» или «–» указывает направление по часовой стрелке или против нее).

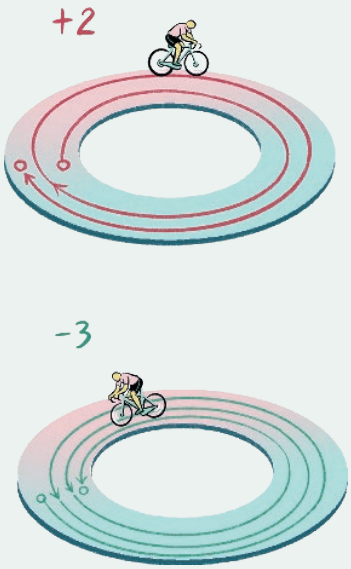
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ГРУППОИД КРУГА



В фундаментальном группоиде круга, наоборот, существует только один путь между любыми двумя точками, с точностью до гомотопии. И, например, фундаментальный группоид трехмерной сферы описывается аналогично: между любыми двумя точками также существует только один путь, с точностью до гомотопии.

С понятием фундаментального группоида связана и серьезная проблема. Дело в том, что отдельные точки и соединяющие их пути не обнаруживают многомерную структуру пространства, поскольку точка и кривая траектории сами имеют размерность 0 или 1 соответственно. Решение состоит в том, чтобы ввести дополнительные непрерывные функции, называемые «гомотопиями» (если они определены на плоском круге) или «высшими гомотопиями» (в случае трехмерного или — в общем случае — n-мерного шара).

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ГРУППОИД ОКРУЖНОСТИ



Естественно задаться вопросом, какую алгебраическую структуру образуют точки, пути, гомотопии и высшие гомотопии пространства X. Эта структура — $\pi_\infty X$, называемая фундаментальным ∞-группоидом X, определяет пример ∞-категории, — бесконечномерного аналога категорий, впервые введенных Эйленбергом и Маклейном. Как и обычная категория, ∞-категория содержит объекты и преобразования. Но она содержит также и «высшие преобразования» (изображаемые на рисунках двумерными, трехмерными и т.д. стрелками). Например, в $\pi_\infty X$ объекты и преобразования — это по-прежнему точки и пути, однако последние уже не считаются одинаковыми с точностью до гомотопии, преобразования более высоких измерений определяют более «высокие»

гомотопии. Как и в обычной категории, в любом фиксированном измерении определена композиция двух преобразований: если существуют два отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$, должно существовать также и отображение $g \circ f\colon X \to Z$. Но тут возникает одна загвоздка: для согласования теории с естественными примерами (например, при попытке описать фундаментальный ∞-группоид пространства) закон композиции должен быть ослаблен. Для любой пары отображений по-прежнему должна быть определена их композиция, но она больше не единственная.

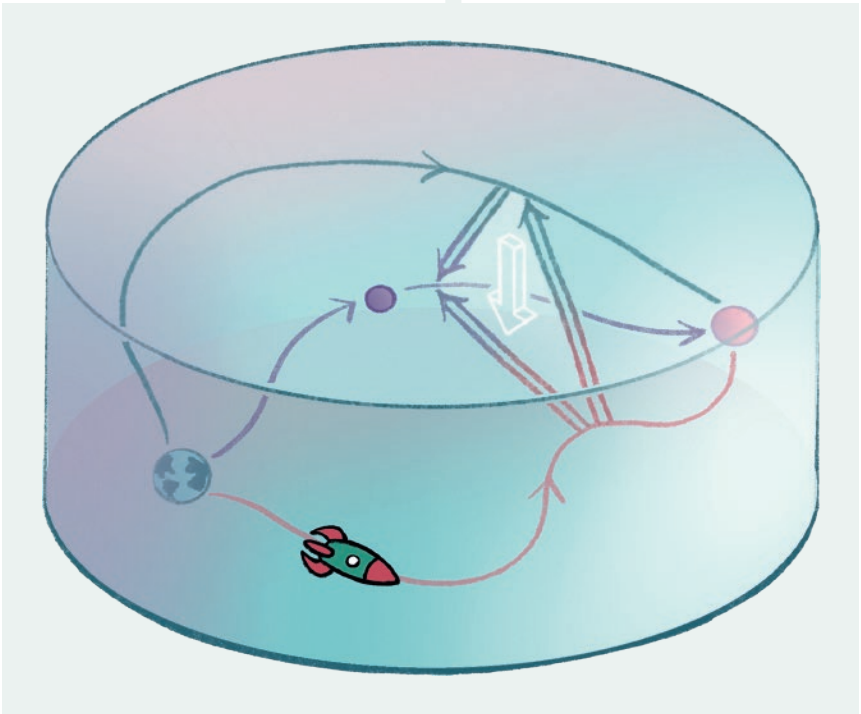
Это нарушение единственности затрудняет определение ∞-категорий в рамках классических математических законов теории множеств. Определение композиции двух отображений в теории ∞-категорий отличается от аналогичного определения в универсальной алгебре. Несмотря на то что ∞-категории играют все более значимую роль в современных теоретических и прикладных исследованиях от квантовой теории поля до алгебраической геометрии и топологии, они все еще считаются «слишком сложными», проходят по разряду «только для специалистов» и далеко не всегда включаются в учебные программы даже на старших курсах. Тем не менее я, как и многие мои коллеги, рассматриваю ∞-категории как революционно новое направление, позволяющее мечтать о выдающихся математических открытиях, невозможных в рамках прежних теорий.

Горизонты будущего

История учит нас тому, что даже самая экзотическая математическая теория прошлого сегодня может считаться достаточно простой даже для студентов первых лет обучения. Как исследователю теории ∞-категорий, мне интересно думать о ее упрощении. Ключевая аксиома обычной теории категорий — существование единственного преобразования $g \circ f\colon X \to Z$, композиции, определенной для каждой пары отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$. Напротив, в ∞-категории существует множество отображений из X в Z, которые в фундаментальном ∞-группоиде можно понимать как своего рода «пространство путей». Правильным аналогом единственности композиции отображений в рамках обычной теории категорий будет утверждение, что в ∞-категории «пространство композиций сжимаемо», то есть каждая из его точек стремится к некоторой исходной (подобно теории «Большого взрыва наоборот»).

Обратите внимание, что «сжимаемость» не означает существование единственной композиции: действительно, как можно убедиться на примере фундаментального ∞-группоида, может существовать большое количество разных составных путей. Однако «сжимаемость» гарантирует, что любые два составных пути гомотопны, любые две гомотопии, связывающие эти составные пути, связаны более высокой гомотопией и т.д.

Условие сжимаемости как альтернатива единственности становится центральным в новой системе, предложенной математиком Владимиром Воеводским и его коллегами. Исследователи из многих стран мира совместно разрабатывают новые компьютерные программы — «помощников в доказательствах», которые могут построчно проверять



Как удается так быстро обучать следующие поколения студентов, рассказывая им о теориях, которые еще вчера удивляли экспертов и были доступны единицам?

Если математика — наука аналогий и изучение закономерностей, то теория категорий — это изучение закономерностей математического мышления

формальное математическое доказательство. Эти «помощники» обладают механизмом, имитирующим обычную математическую практику последовательного вывода следующего утверждения из предыдущего. Подобная цепочка понимается с точки зрения изоморфизма или гомотопической эквивалентности. В таком случае механизм позволяет пользователю последовательно распространять доказательство от одной точки до другой по соединяющему их пути, строго соблюдая понятия тождественности.

В своем эссе 1974 г. математик Майкл Фрэнсис Атья (Michael Francis Atiyah) писал: «На самом деле, цель любой теории — в значительной степени систематическая организация прошлого опыта таким образом, чтобы следующие поколения, наши ученики, ученики учеников и т.д. смогли усвоить наиболее существенные аспекты теории настолько легко и безболезненно, насколько это возможно. И это единственный способ, с помощью которого вы можете продолжать развивать и наращивать любую научную деятельность, не заходя в конечном итоге в тупик». Теория категорий, вероятно, играет эту роль в современной математике: если математика — наука аналогий и изучение закономерностей, то теория категорий — это изучение закономерностей математического мышления, изучение «математики математики», как формулирует Юджиния Чэнь.

Причина, по которой студенты начальных курсов оказываются способными усвоить такое большое количество различных тем, кроется в том, что наше понимание математических концепций было упрощено за счет введения все новых абстракций. Этот процесс можно рассматривать как отступление от конкретной задачи и попытку посмотреть на нее более широко. При таком подходе многие мелкие детали исчезают — например, численные приближения или вообще что-либо, имеющее отношение к конкретным вычислениям. Однако весьма примечательно наблюдать, как различные теоремы из алгебры, теории множеств, топологии, алгебраической геометрии вдруг оказываются весьма схожими и одинаковым образом описываются на языке теории категорий.

Что же ждет нас в будущем? В некоторых областях математики постепенно формируется общее мнение, что «естественная среда обитания» математических объектов XXI в. — это ∞-категории, по аналогии с ролью классической теории категорий в XX в. Надеемся, что со временем наше сознание смирится с головокружительным многообразием преобразований в ∞-категориях и оно спокойно займет свое место в коллективном математическом бессознательном, позволяя отнестись к этим категориям как к новому и чрезвычайно полезному универсальному инструменту. И останется только задаться вопросом: если XX в. принес нам такой ощутимый прогресс, где окажется математика в конце XXI в.? ■

Перевод: Д.С. Хованский

Краткий справочник современной математической терминологии

Категория — определенный набор объектов и преобразований между ними с правилом композиции.

Композиция — применение одного преобразования к результатам другого.

Тождественное преобразование — преобразование объекта, которое никак его не изменяет.

Симметрия — обратимое преобразование объекта самого в себя.

Изоморфизм — структурное понятие «сходства», которое может существовать между парой объектов в категории.

Фундаментальный группоид — категория, объекты которой — точки в пространстве, а преобразования — пути между ними, с точностью до гомотопии.

Гомотопия — «путь между путями», непрерывная деформация от одного пути к другому.

Категория бесконечности — бесконечномерный аналог категории, который добавляет многомерные преобразования и ослабляет правило композиции.

Фундаментальный бесконечный группоид — бесконечная категория точек, путей, гомотопий и высших гомотопий в пространстве.

ИЗ НАШИХ АРХИВОВ

■ Монтгомери Р. Задача трех тел // ВМН, № 10, 2019.