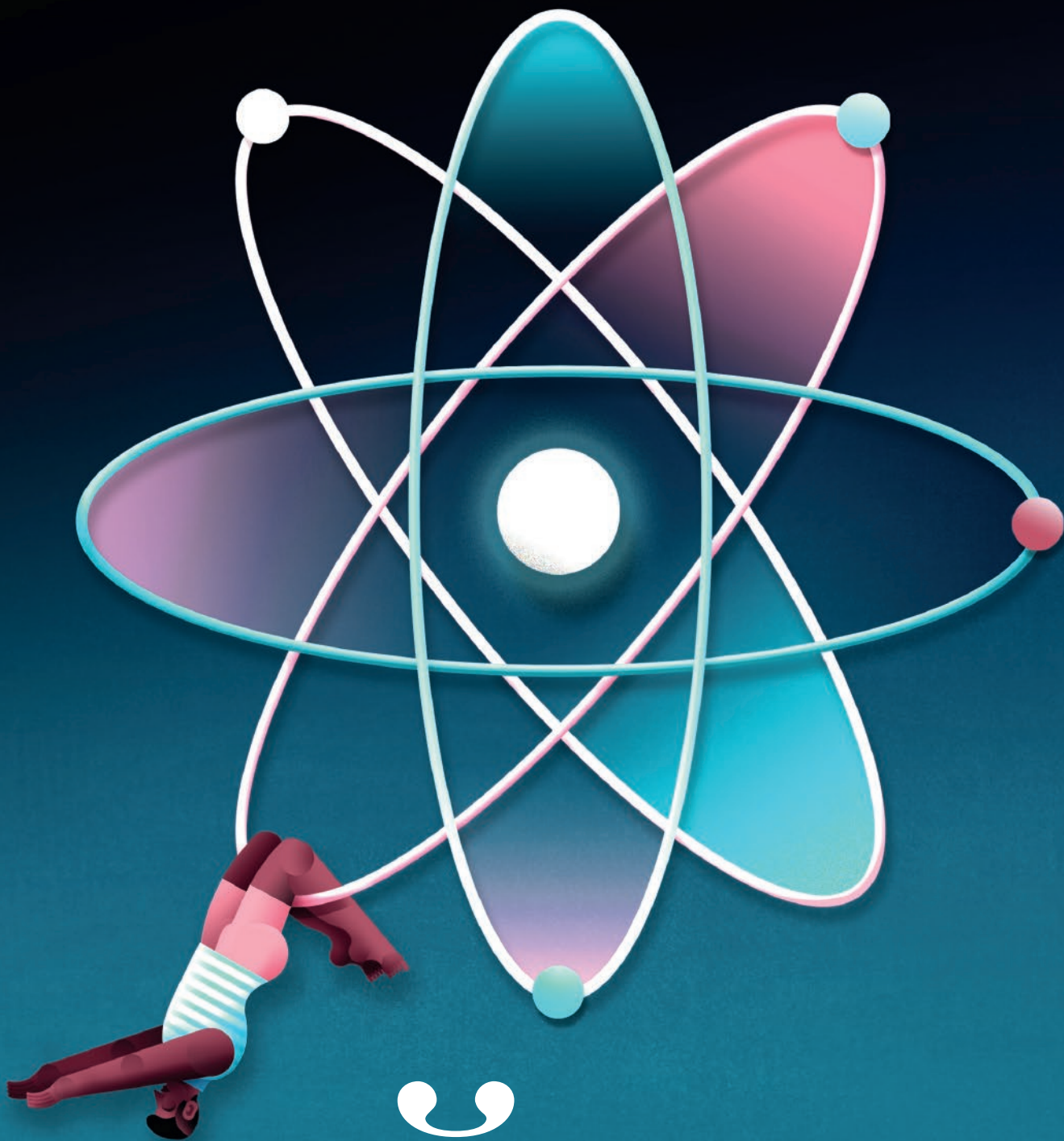


МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

# Кванто

Поиск решения одного из важнейших остающихся открытыми вопросов в физике: каким образом квантовое явление становится макроскопическим?

*Спиридон Михалакис*



# ВЫЙ СКАЧОК

**ОБ АВТОРЕ**

**Спиридон Михалакис** (Spyridon Michalakis) — специалист в области математической физики и менеджер по связям с общественностью Института квантовой информации и вещества Калифорнийского технологического института.



**Я**

сизжу один в председательском кресле большого конференц-стола, когда отдаленно знакомый голос приветствует меня: «Привет, ты, должно быть, Спирос!» Я обращаюсь и замечаю Пола Радда (Paul Rudd), голливудского актера, с его знаменитой обезоруживающей улыбкой. Он весь в поту, по пути с какой-то тренировки для супергероев.

Спустя несколько минут он и куча других киношников усаживаются вокруг меня. Радд сразу берет быка за рога: «Так какие же классные штучки происходят, когда ты становишься очень маленьким?» Я прилетел, чтобы проконсультировать по физике супергероя фильма «Человек-муравей» кинокомпании *Marvel*, и теперь я должен что-то объяснить. Но все, что я знаю об уменьшении до размеров муравья, почерпнуто мною в девятилетнем возрасте из фильма «Дорогая, я уменьшил детей!». На секунду я собираюсь сказать ему, что он обратился не по адресу, но никоим образом не хочу позволить этой возможности ускользнуть из моих рук. Может быть, я не очень много знаю о муравьях, но я знаю кое-что о квантовой физике. «Понятия времени и пространства теряют свое привычное значение, когда вы уменьшаетесь до размеров квантового мира», — отвечаю я с уверенностью. Оглядывая аудиторию, замечаю: это последнее, что они ожидали услышать. Но их зацепило. В течение следующих двух часов все внимание обращено ко мне, по мере того как я все глубже и глубже погружаюсь в законы и странности квантовой механики.

Днем позже один из продюсеров шлет мне электронное письмо: «Привет! Как нам назвать место, кудаходишь, когда уменьшаешься до микроскопического размера?» Я печатаю в ответ: «Как насчет квантового мира?» Пять лет спустя, в 2019 г., Мстители — персонажи фильма компании *Marvel* — попадают в Квантовый мир и возвращаются во времени, чтобы спасти Вселенную. Неожиданно приходит мысль, что, оказывается, быть экспертом по квантовой физике довольно круто.

Я не всегда увлекался физикой или героями комиксов. В колледже я специализировался на математике и информатике, а лето проводил, пытаюсь описать, как одномерные последовательности ДНК складываются в трехмерные белки. И только в аспирантуре я впервые записался на курс физики, выходящий за рамки базовых требований колледжа. Мой научный руководитель в Калифорнийском университете в Дейвисе решил записать меня на курс лекций по квантовой механике, который читали для аспирантов, и у меня не оставалось выбора, кроме как согласиться с этим. Когда в первый день занятий нам вручили односторонний тест уровня бакалавриата с целью оценить

**ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ**

- Квантовый эффект Холла — макроскопическое явление, представляющее собой электрический ток, текущий вдоль проводящей поверхности, который квантуется, — традиционно относят к микроскопическому квантовому царству.
- Объяснение того, почему это явление квантуется, было названо одной из важнейших нерешенных задач в физике.
- Недавно специалисты в области математической физики ответили на этот вопрос с помощью доказательства, основанного на топологии — теории, изучающей свойства форм.

наши знания, я вернул мой со своей фамилией и смайликом рядом с ней. Тем не менее я проявил упорство, окончив в июне 2008 г. аспирантуру со степенью в области прикладной математики в приложении к математической физике и квантовой теории информации. Через три месяца я собрал вещи и переехал в Лос-Аламос, штат Нью-Мексико, место рождения атомной бомбы, чтобы занять должность постдока в Лос-Аламосской национальной лаборатории. Тогда я еще не знал, что в течение следующего года с головой уйду в квантовый мир. Это рассказ о том, что я там обнаружил и как вернулся, чтобы поведать эту историю кинокомпании *Marvel*.

### Нечто интересное

Все началось с простого вопроса. Мой научный руководитель в Лос-Аламосе Мэттью Гастингс (Matthew Hastings), восходящая звезда и один из самых проницательных умов в физике, сидел напротив меня в суши-ресторане, когда задал решающий вопрос: «Здесь, в лаборатории, в качестве постдока вы хотите начать с разминки или все же желаете поработать над чем-нибудь интересным?» Не прося дополнительных разъяснений, я ответил: «Хочу заняться чем-нибудь интересным». По-видимому, он остался доволен моим ответом. Позже в тот же день он прислал мне ссылку на список из 13 нерешенных проблем в физике, который составил и ведет Майкл Айзенман (Michael Aizenman), профессор Принстонского университета и выдающаяся фигура в математической физике. Я должен был заняться второй проблемой в этом списке — вопросом, поставленным специалистами в области математической физики Джозефом Авроном (Joseph Avron) и Руди Зайлером (Ruedi Seiler): «Почему квантуется холловская проводимость?»

Возможно, вы зададитесь вопросом, что такое проводимость по Холлу или что значит «квантуется». Тогда у меня возникли эти же вопросы. Ни одна из проблем в списке, кроме третьей, загадочно озаглавленной «Экспоненты и размерности», не была помечена словом «Решена!». Пролистав страницы, я увидел, что на самом деле она решена только частично. Однако одно из этих частичных открытий привело в 2006 г. к Филдсовской премии, одной из высших наград в математике, а за другое медаль Филдса будет получена четыре года спустя. Было ясно, что в такой компании задача, которую передо мной поставили, — не трудна, а чертовски трудна. Я тщательно обдумывал, смогу ли я решить такую задачу в течение года. Причина ограниченности временных рамок в том, что постдокторантура в математике или физике обычно длится два года. В конце первого года, если вы провели выдающееся исследование, вы можете обратиться в ведущие университеты для получения

профессорской должности с перспективой бессрочного контракта. Если ваше исследование хорошего уровня, но не выдающееся, вы можете подать заявку на вторую постдокторантуру или же искать профессорскую должность в менее престижном университете. Если вам нечего показать после первого года, всегда есть Уолл-стрит.

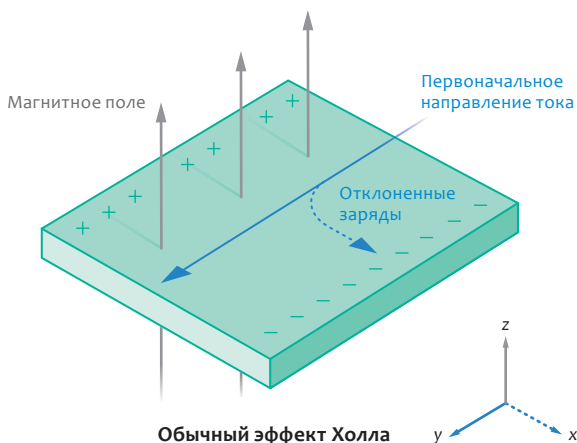
Тем не менее идею отступить уже сейчас, даже не попытавшись атаковать проблему, проглотить было трудно. Для человека, выросшего в Спате, небольшом греческом городке недалеко от Афин, грандиозные мечты были делом нетипичным. Мой отец вырос в том же доме, что и я. Он играл в футбол и был задирой. Когда в конце концов он бро-

## В своем «Трактате об электричестве и магнетизме» Максвелл заявил, что в присутствии магнитного поля проводящий материал с током, текущим через него, будет изгибаться из-за магнитной силы, действующей на материал, а не на ток

сил школу, его отец предложил ему работу в местном продуктовом магазине. Мой отец отказался. Несмотря на то что он забросил учебу, у него были амбиции. Он прошел стажировку в местном агентстве по недвижимости и научился хорошо ориентироваться в покупке и продаже земли. Позднее по настоянию моей матери он вернулся в школу, чтобы получить аттестат о среднем образовании. Впоследствии, когда мой старший брат Никос принес домой табель успеваемости с отличными оценками, отец плакал от счастья, узнав, что его сын — примерный ученик. Мы с Никосом продолжили соревнование на Международной математической олимпиаде — честь, которой ежегодно удостоиваются по шесть учеников старших классов из каждой страны. Затем один за другим Никос, я и мой младший брат Мариос сменили среднюю школу в Афинах на колледж при Массачусетском технологическом институте в Кеймбридже — редкий успех для любой семьи, не говоря уже о семье со скромными средствами, и заслуга моих родителей. Я подумал, что если они могли творить чудеса, то, возможно, я тоже смогу. Итак, осенью 2008 г. я начал работать над проблемой номер два,

стремясь, как указано в списке, «сформулировать теорию целочисленного квантового эффекта Холла, которая объясняет квантование холловской проводимости так, чтобы она применялась также для взаимодействующих электронов в термодинамическом пределе».

Целочисленный квантовый эффект Холла имеет долгую историю. Эффект Холла был открыт в 1879 г. Эдвином Холлом, студентом Университета Джонса Хопкинса. Молодой Холл решил опровергнуть утверждение, сделанное отцом электромагнетизма Джеймсом Клерком Максвеллом. В своем «Трактате об электричестве и магнетизме» (1873) Максвелл с полной убежденностью заявил, что в присутствии магнитного поля проводящий материал с током, текущим через него, будет изгибаться из-за магнитной силы, действующей на материал, а не на ток. Максвелл пришел к выводу, что «если заставить действовать на систему постоянной магнитной силой <...>, окажется, что распределение тока будет таким же, как если бы магнитная сила не действовала вообще». Чтобы проверить эту идею, Холл пропускал ток через тонкий лист золота, помещенный в магнитное поле, перпендикулярное его поверхности, и заметил, что его гальванометр (прибор, используемый для обнаружения малых токов) регистрирует ток, который указывает на существование напряжения (электрического потенциала) в направлении, перпендикулярном первоначальному направлению тока. Он пришел к выводу, что магнитное поле подталкивает электроны тока к одному краю проводника, постоянно изменяя их распределение на поверхности материала. Максвелл оказался неправ. Это неожиданное появление зарядов [противоположного знака] по краям проводника стали называть напряжением Холла.



Квантовый эффект Холла первым обнаружил немецкий физик-экспериментатор Клаус фон Клитцинг спустя почти 100 лет, 5 февраля 1980 г., в Гренобле, Франция. Его целью было более тщательно изучить эффект Холла

при сверхнизких температурах и сильных магнитных полях. Он искал небольшие отклонения от ожидаемого эффекта в некоторых двумерных полупроводниках, материале, лежащем в основе всех современных транзисторов. В частности, он пытался измерить сопротивление Холла, величину, пропорциональную напряжению Холла. То, что он наблюдал, было удивительным: сопротивление Холла было квантованным! Позвольте объяснить. По мере увеличения напряженности магнитного поля сопротивление между краями материала остается одинаковым, пока поле не становится достаточно высоким. Затем, вместо того чтобы постоянно расти, как первоначально наблюдал Холл и предсказывали все известные физики того времени, сопротивление подскочит до нового значения. Еще более удивительно то, что значения проводимости Холла, величины, обратной сопротивлению Холла, были точными целыми числами, умноженными на величину, тесно связанную с постоянной тонкой структуры, фундаментальной постоянной природы, которая описывает силу электромагнитного взаимодействия между элементарными заряженными частицами. Целочисленный квантовый эффект Холла явил себя миру.



Квантовый эффект Холла

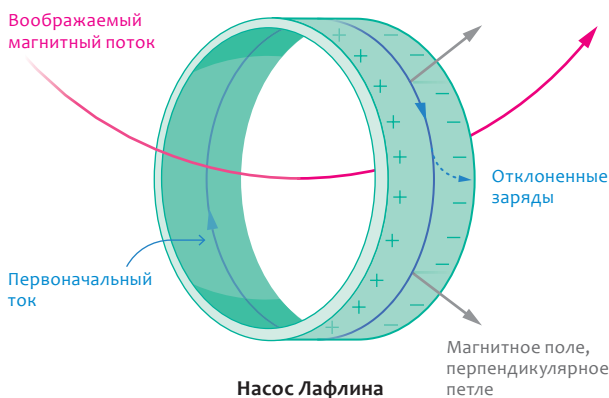
Открытие фон Клитцинга было поразительным, не в последнюю очередь потому, что, как считалось, постоянная тонкой структуры описывает аспекты квантового мира, которые слишком малы для любого макроскопического явления, такого как проводимость Холла, чтобы их можно было исследовать, не говоря уже о том, чтобы измерить с невероятной точностью. Тем не менее проводимость Холла не только охватила важный аспект микроскопического мира квантовой физики, но и сделала это с невероятной легкостью. Целочисленные плато сопротивления Холла появлялись независимо от размера, чистоты или даже типа полупроводникового материала, используемого в эксперименте. Словно симфонический оркестр из триллиона триллионов электронов поддерживал свою коллективную квантовую мелодию на огромных атомных расстояниях без какого-либо дирижера и, что еще более удивительно, был неподвластен принципам физики, которые

на протяжении миллиардов лет охраняли квантовое царство от незваных гостей из макроскопического мира.

В тот день была открыта дверь в квантовое царство — макроскопическая дверь, которая, как полагали многие, не существует. В 1985 г., спустя пять лет после открытия, Клаус фон Клитцинг был удостоен Нобелевской премии по физике. Его открытие приведет к другим выдающимся научным прорывам: еще три Нобелевские премии были присуждены двум экспериментаторам — Хорсту Штермеру (Horst Störmer) и Дэниелу Цуи (Daniel Tsui), а также теоретику Роберту Лафлину (Robert Laughlin) в 1998 г. за обнаружение того, что электроны, действующие совместно в сильных магнитных полях, могут образовывать новые типы «частиц» с зарядами, равными долям заряда электрона, — явление, получившее название «дробный квантовый эффект Холла».

### Квантовый насос Лафлина

Роберт Лафлин был одним из первых физиков, попытавшихся объяснить квантовый эффект Холла. В 1981 г. он предложил блестящий мысленный эксперимент — идеализированную модель оригинального эксперимента, которая стала математической метафорой его понимания. Лафлин представил, что электроны движутся вдоль проводящей петли с плоским краем, наподобие обручального кольца. Магнитное поле проходит перпендикулярно поверхности кольца, но Лафлин добавил воображаемую линию магнитного поля, называемую магнитным потоком, проходящего через середину петли, как палец сквозь кольцо. Увеличение воображаемого потока индуцировало ток, идущий по петле, таким образом вводя продольный ток, присутствующий в классическом эффекте Холла. В процессе, получившем название «квантовый насос Лафлина», полный цикл завершается всякий раз, когда воображаемый магнитный поток увеличивается на один «квант потока» — величину, определяемую как  $h/e$ , где  $h$  — постоянная Планка, а  $e$  — заряд электрона.



После каждого цикла квантовая система возвращается в свое исходное состояние в результате явления, известного как калибровочная инвариантность. Лафлин утверждал, что это возвращение в исходное состояние предполагает, что проводимость Холла квантуется в целых числах, равных количеству электронов, перемещаемых квантовым насосом. Великолепно! Но, увы, существовала проблема. Проводимость Холла была экспериментально измерена (и усреднена) по большому числу циклов работы насоса. Поскольку Лафлин предположил (правильно), что система описывается квантовой механикой, не было никакой гарантии, что в каждом цикле участвует одинаковое количество электронов. Как позже напишут Аврон и Зайлер со своим сотрудником Дэниелом Осадчим (Daniel Osadchy): «Только в классической механике точное воспроизведение предыдущего состояния гарантирует воспроизведение предыдущего результата измерения. В квантовой механике воспроизведение состояния системы не обязательно воспроизводит результат измерения. Поэтому из одной только калибровочной инвариантности нельзя сделать вывод, что в каждом цикле работы насоса переносится одинаковое количество электронов». Физикам нужен был новый набор идей, чтобы показать, что среднее число электронов, перенесенных за несколько циклов, — также целое число.

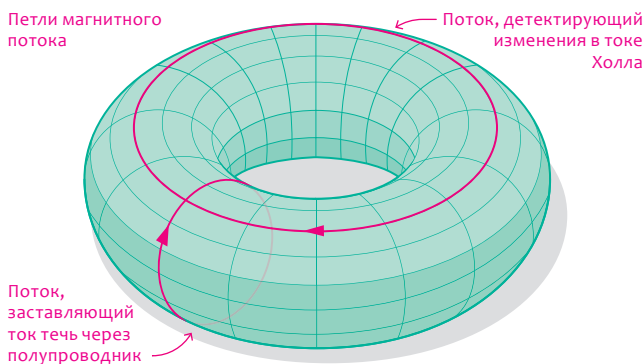
Вдохновленные аргументацией Лафлина, следующие попытки объяснить квантование проводимости Холла в значительной степени базировались на концепции адиабатической эволюции. Адиабатическая эволюция — это физический процесс, цель которого — запечатлеть эволюцию системы, которая все время находится в состоянии с самой низкой энергией, в то время как некоторые внешние параметры меняются. Когда спектральная щель системы — энергия, необходимая для ее перехода в возбужденное состояние, — становится небольшой, адиабатическая эволюция замедляется, чтобы предотвратить переход системы в возбужденное состояние. В исходной аргументации Лафлина это понятие используется для математического моделирования квантового эффекта Холла как адиабатической эволюции электронного состояния квантовой системы Холла при увеличении воображаемого магнитного потока.

### Нерезываемая пластилиновая фигура

Чтобы глубже изучить квантовый эффект Холла, физики обратились к разделу математики, называемому топологией. Топология — это способ изучения фундаментальной сущности форм — свойств, которые не изменяются даже при их непрерывной деформации. Представьте что-то вроде пластилиновой фигуры, которую невозможно разорвать и которую невозможно приклеить

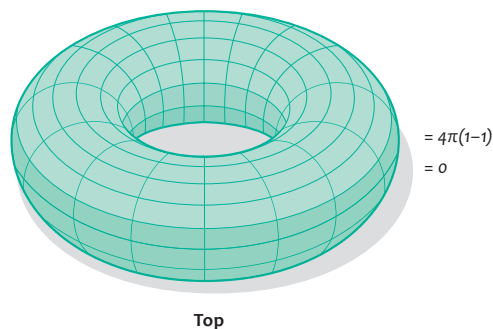
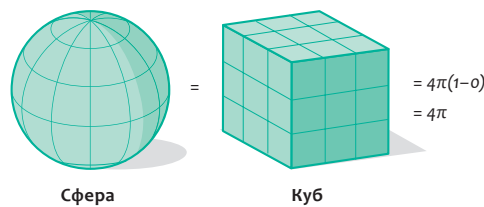
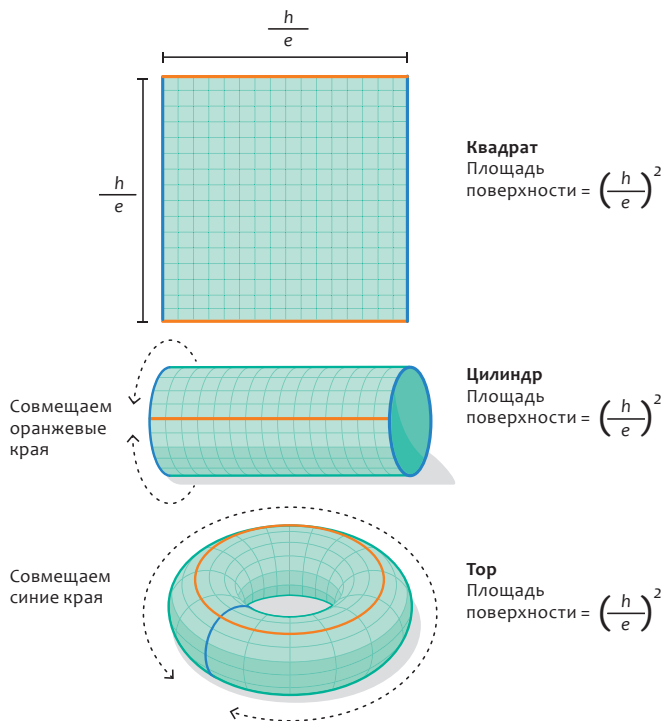
саму к себе. Куб из этого вещества вы можете превратить в шар, скругляя его острые края и углы, но превратить его в пончик невозможно. Последняя трансформация потребовала бы либо пробить дыру в кубе, либо растянуть и приклеить его самого к себе. В этом смысле кубик и пончик имеют топологически различную форму, а вот кубики и шарики топологически одинаковы (хотя геометрически все они различны). Топология была формализована в 1895 г., но редко взаимодействовала с физикой до 1950–1960-х гг.

Интересно, что первоначальные попытки понять роль топологии в квантовом эффекте Холла были признаны настолько значительными, что в 2016 г. физики-теоретики Дэвид Таулесс (David Thouless) и Данкан Холдейн (F. Duncan M. Haldane) получили за эту работу Нобелевскую премию. В частности, Таулесс и его сотрудники расширили доводы Лафлина, показав, что проводимость по Холлу квантуется в среднем. Поскольку для доказательства квантования одного воображаемого потока было недостаточно, они предложили второй воображаемый поток. В новом мысленном эксперименте один поток индуцировал электрический ток вдоль полупроводника, а другой фиксировал изменения тока между циклами насоса. Этот сценарий позволял моделировать циклы насоса Лафлина при различных начальных условиях. Адиабатическая эволюция, генерируемая дополнительным воображаемым потоком, играла роль усреднителя по многим циклам насоса Лафлина и показала, что средняя холловская проводимость квантуется.



Примерно в то же время Барри Саймон (Barry Simon), специалист в области математической физики из Калифорнийского технологического института, заметил, что адиабатическая эволюция наводит математический мост между проводимостью Холла и локальной кривизной двумерного фазового пространства, создаваемого двумя воображаемыми магнитными потоками. Эта локальная кривизна называется кривизной Берри в честь ее первооткрывателя, специалиста в области математической физики Майкла Берри (Michael Berry). В частности, Саймон показал, что холловская

проводимость равна  $h/2\pi$ , умноженному на локальную кривизну в начальной точке этого фазового пространства. Это было важным результатом 1848 г., теорема Гаусса – Бонне, утверждает, что полная кривизна геометрической формы — характеристика топологическая, а не геометрическая. Другими словами, сумма всех локальных кривизн трехмерной формы одинакова для всех топологически эквивалентных фигур с одинаковой

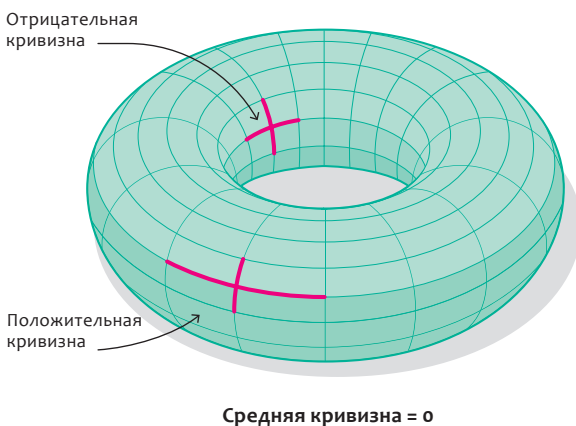


**Теорема Гаусса – Бонне**  
Суммарная кривизна =  $4\pi(1-g)$

площадью поверхности. Еще более впечатляюще то, что суммарная кривизна задается просто как  $4\pi(1-g)$ , где  $g$  — количество отверстий в форме.

Самое важное для нас — современное обобщение теоремы Гаусса — Бонне китайским математиком Шэншэнем Чженем (Shiing-shen Chern), показавшее, что тот же результат применяется для полной кривизны Берри нашего двумерного фазового пространства, описывающего квантовый эффект Холла. Кривизна Берри этого пространства теперь дается выражением  $2\pi C$ , где  $C$  — целое число, известное как первое число Чжэня. Чтобы показать, что проводимость Холла квантована, Саймон и его сотрудники рассмотрели среднее значение проводимости по всему фазовому пространству, которое равно  $h/2\pi$ , умноженному на (суммарную кривизну), деленной на (площадь поверхности). Подставляя  $2\pi C$  (суммарная кривизна) и  $(h/e)^2$  (площадь поверхности), получаем  $Ce^2/h$ . И вуаля: средняя проводимость по Холлу, как показал Таулесс, — целое число, умноженное на  $e^2/h$ . Однако впервые целое число перед  $e^2/h$  было отождествлено с «топологическим инвариантом» — свойством, которое не изменяется, если вы поворачиваете или изменяете форму объекта, — и, следовательно, результат был невосприимчив к небольшим возмущениям и несовершенствам в физической структуре квантового эффекта Холла. Это стало переломным моментом.

К сожалению, красота выводов Таулесса и Саймона, о которых рассказано выше, была омрачена серьезной проблемой: проводимость Холла, из-



меренная экспериментаторами, соответствовала локальной кривизне в исходной точке двумерного фазового пространства, а не средней кривизне по всему пространству. Чтобы понять, почему локальная кривизна произвольной формы почти никогда не равна ее средней кривизне, рассмотрим тор. Согласно теореме Гаусса — Бонне, средняя кривизна тора и любой другой формы с одним отверстием в ней равна нулю. Но локальная кривизна тора, очевидно, отлична от нуля в большинстве

точек его поверхности и может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Собственно, Таулесс и его коллеги пытались решить эту проблему, но все же оставался вопрос: почему проводимость Холла квантуется, если нельзя усреднять по всем возможным начальным условиям насоса Лафлина? Это и был вопрос, на который я должен был ответить.

### Чувство отчаяния

Предполагалось, что мои первые шаги к загадке квантового эффекта Холла начнутся с изучения книги, написанной самим Дэвидом Таулес-

**Через две недели после того, как я получил эту книгу от моего научного руководителя, я понял, что у меня не хватает знаний, необходимых даже для отдаленного понимания изложенной там физики. Я запер книгу в ящике своего стола и спрятал ключ**

сом: «Топологические квантовые числа в нерелятивистской физике». Через две недели после того, как я получил эту книгу от Мэтта, моего научного руководителя, я понял, что у меня не хватает знаний, необходимых даже для отдаленного понимания изложенной там физики. Я запер книгу в ящике своего стола и спрятал ключ. Уже само существование этой книги вызывало у меня чувство отчаяния. Как мне добиться прогресса в решении проблемы, если я не в силах даже понять, о чем эта книга? На тот момент я был полным профаном. Конечно, у меня была возможность обратиться за помощью к Мэтту. Он мог бы научить меня тому, что мне необходимо было знать. Черт возьми, мы могли бы даже совместно работать над этой проблемой. Но примерно через месяц-другой после того, как я перебрался в Лос-Аламос, Мэтт сказал мне, что покидает лабораторию. Поскольку собеседования по трудоустройству теперь занимали большую часть его времени, я его почти не видел. Несколько месяцев спустя, когда ему предложили должность в отделении *Station Q* компании *Microsoft* в Санта-Барбаре, штат Калифорния, мои отношения с ним практически прекратились. Те несколько раз, когда мы все же встречались, убедили меня, что Мэтт допустил серьезную ошибку, предоставив мне



постдокторат в Лос-Аламосе. Из того, что он говорил, все, что я мог понять, — несколько отдельных словосочетаний. Одним из них, которое он постоянно повторял, было «квазиadiaбатическое продолжение», — абсолютно незнакомое мне понятие. К моему еще большему смятению, этот термин в огромной горе литературы, посвященной квантовому эффекту Холла, до того момента, похоже, нигде не встречался.

Не зная, куда двигаться дальше, я делал то, что сделал бы каждый молодой ученый моего поколения: гуглил словосочетания «квантовый эффект Холла» и «квазиadiaбатическое продолжение» (КАП). Первая фраза встречалась в сотнях научных работ, но продираться сквозь текст любой

**Статья под названием «Топологический взгляд на квантовый эффект Холла», появившаяся в журнале *Physics Today*, предназначалась для физиков, не очень хорошо разбирающихся в этой области. Она была написана настолько ясно, что заложила основы моего понимания квантового эффекта Холла**

из них мне было так же сложно, как и читать книгу Таулесса. Однако в результате этих поисков я нашел слово, которое постоянно появлялось в связи с квантовым эффектом Холла: «топологический». Когда я добавил это слово в строку поиска, первой в результатах стала статья Аврона, Осадчего и Зайлера под названием «Топологический взгляд на квантовый эффект Холла». Эта статья, появившаяся в журнале *Physics Today* в августе 2003 г., предназначалась для физиков, не очень хорошо разбирающихся в этой области. Статья была написана настолько ясно, что заложила основы моего понимания квантового эффекта Холла.

В противоположность сотням статей, посвященных квантовому эффекту Холла, мои поиски термина «квазиadiaбатическое продолжение» дали только два результата, и оба принадлежали Мэтту. Первая статья, написанная им в соавторстве с физиком-теоретиком Вэнь Сяоганом (Xiao-Gang Wen), была введением в квазиadiaбатическое

продолжение. Вторая среди прочих прикладных проблем содержала краткий раздел об использовании КАП для вычисления версии кривизны Берри, относящейся к дробному квантовому эффекту Холла. Это была первая и единственная опубликованная попытка применить КАП к какому бы то ни было типу кривизны Берри. Я был полон энтузиазма изучить выводы Мэтта от корки до корки. Но я все еще не понимал, что такое КАП и как оно связано с адиабатической эволюцией. Поэтому я углубился в первую статью — и после месяца ее обдумывания почувствовал, что хорошо разбираюсь в этой проблеме. Квазиadiaбатическое продолжение было предложено как эволюция квантовой системы, при которой сохраняются определенные топологические свойства ее квантового состояния. В отличие от него адиабатическая эволюция лучше подходила для локальных, геометрических свойств, таких как упомянутая ранее кривизна Берри.

Следующей задачей было придумать, как вычислить кривизну Берри, используя КАП. К моему ужасу, я не смог разобраться с кратким рассуждением Мэтта о том, каким образом можно навести мост между двумя понятиями. Я решил воссоздать этот мост (или, по крайней мере, свою версию) с чистого листа. Идея была в том, чтобы следовать рассуждениям Саймона, связывающим адиабатическую эволюцию с кривизной Берри, одновременно заменив адиабатическую эволюцию на КАП. Замена одной эволюции на другую замечательно сработала по одной простой причине — я смог показать, что квазиadiaбатическое продолжение было точно таким же, как и адиабатическая эволюция, при следующих особых условиях: в течение эволюции системы разрыв энергии между основным состоянием и первым возбужденным должен оставаться выше определенного положительного значения независимо от размера системы. К счастью, это особое условие выполнялось точно вблизи начала двумерного фазового пространства. Фактически, если бы это условие нарушалось, я мог бы показать, что проводимость по Холлу не квантуется.

Поупражнявшись в установлении связи КАП с кривизной Берри, соответственно, и с проводимостью Холла, я обратился к следующему трудному вопросу: воспроизведению рассуждений Саймона, который вычислил усредненную проводимость Холла как неизменяемую топологическую величину, которая дает первое число Чжэня. Это был настоящий подвиг. Как я уже отмечал, чтобы преодолеть начальную проблему моделирования адиабатической эволюции с помощью КАП, я воспользовался тем фактом, что квазиadiaбатическое продолжение точно совпадает с адиабатической эволюцией, пока в его спектре существует достаточно большой разрыв между основным и возбужденным состояниями системы.

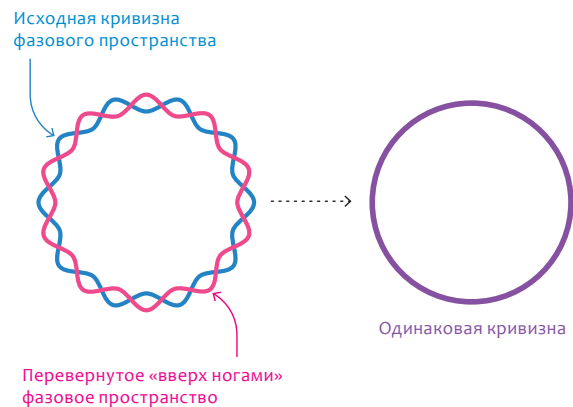
К сожалению, это предположение о спектральной щели сразу же вылетело в трубу, как только я начал более глубоко изучать двумерное фазовое пространство, полную кривизну которого мне требовалось вычислить. По сути, это предположение было настолько мощным, что его использовали во всех предыдущих попытках квантовать проводимость Холла. Другими словами, никто не предполагал, что квантование можно доказать без этого дополнительного предположения. И я в том числе. Когда в конце весны 2009 г. я наконец обратился к Мэтту с решением, в котором использовалось это ключевое предположение, он сказал мне: «Хорошая работа. Но, я думаю, ты сможешь доказать квантование и без него». Мэтт указал мне на свою, казалось бы, не имеющую отношения к предмету статью под названием «Теорема Либа — Шульца — Маттиса для пространств более высоких размерностей» (ЛШМ), в которой он заложил основы для устранения этого предположения.

Когда я начал продираться через статью Мэтта о ЛШМ, меня одолело такое же упадочническое настроение, какое возникло у меня, когда я пробовал разобраться с его попыткой связать КАП с кривизной Берри. Расшифровка его в одиночку должна была стать долгим и изнурительным путешествием. Но по второй иронии судьбы мой научный руководитель Бруно Нахтергеле (Bruno Nachtergaele), работая с одним из своих в то время постдоков, Робертом Симсом (Robert Sims), опубликовал то, что некоторые сочли математически строгой версией статьи Мэтта о ЛШМ. Хотя большая часть блестящих идей уже содержалась в оригинальной статье Мэтта, версия Бруно была настолько хорошо написана и тщательно продумана, что в течение месяца у меня сложилось четкое представление о том, как действовать дальше. Я наконец понял, как применить элементы ЛШМ, чтобы преодолеть второе препятствие, как показать, что усредненная холловская проводимость, вычисленная с использованием вместо адиабатической эволюции квазиадиабатического продолжения, остается целым числом, умноженным на  $e^2/h$ .

Исходные допущения, используемые в насосе Лафлина, чтобы добиться возврата к исходному состоянию системы после завершения цикла, — адиабатическая эволюция и калибровочная инвариантность — в случае с КАП не работают. Основная проблема заключалась в том, что при КАП после того, как введен квант потока, больше нет никакой гарантии, что в конце цикла система останется в том же квантовом состоянии. Адиабатическая эволюция проделала такой трюк, раз и навсегда запретив системе возбуждаться из состояния с самой низкой энергией. С другой стороны, у квазиадиабатического продолжения на этот счет были собственные соображения. Если по мере того как ученые будут все больше

и больше увеличивать магнитный поток, ширина спектральной щели упадет ниже критического значения, то КАП с радостью позволит системе перескочить в новое, возбужденное квантовое состояние, оставив позади свое низкоэнергетическое прошлое. К сожалению для меня, это означало, что в конце цикла Лафлина, даже если динамика, описывающая систему, вернулась в исходное состояние, квантовое состояние самой системы могло значительно измениться. Если бы это действительно было так, то ключевой элемент в выводах Лафлина и Таулесса улетучился бы.

Чтобы преодолеть это препятствие, в дополнение к исходным двум воображаемым магнитным потокам мне потребовалось ввести еще два (в общей сложности четыре), что дало мне возможность преобразовать эволюцию в условиях квазиадиабатического продолжения в такую, которая гарантировала бы в конце цикла безопасный возврат к исходному основному состоянию. Этот трюк, замислованный мною из статьи Мэтта о ЛШМ, заставлял состояние системы сохранять одну и ту же энергию в течение модифицированной эволюции вокруг границы двумерного фазового пространства, даже когда эта энергия больше не соответствовала минимально возможной энергии системы. Другими словами, все, что требуется, чтобы гарантировать возврат системы в исходное состояние, — это чтобы оба состояния имели одинаковую энергию. Об остальном позаботилось то, что основное состояние системы однозначно определяется этой энергией. Требование, чтобы адиабатическая эволюция поддерживала систему в состоянии с наименьшей энергией на протяжении всей эволюции, было излишним. Что еще более важно, как я понял позже, требование использовать адиабатическую эволюцию для квантования холловской проводимости также стало причиной того, что прогресс остановился почти на два десятилетия.



Каждый из дополнительных потоков генерировал перевернутую версию фазового пространства, так что новое пространство имело равномерную кривизну

К тому времени я чувствовал себя разбитым. Но главное препятствие наконец-то было видно. Все, что я проделал до этого момента, — изящным способом показал то, что уже доказали Таулесс, Саймон и их сотрудники: усредненная холловская проводимость действительно квантуется в целых, умноженных на  $e^2/h$ . Казалось бы, я не добился прогресса в устранении предположения об усреднении, мешающего всем попыткам объяснить загадку целочисленного квантового эффекта Холла. За исключением одной незначительной детали: двумерное фазовое пространство, генерируемое КАП, имело почти идеальную постоянную кривизну Берри. Другими словами, реальная проводимость Холла, соответствующая кривизне Берри крошечного пятна около начала двумерного фазового пространства, была равна средней кривизне по всему пространству потока. Поскольку было хорошо известно, что последняя квантуется, следовательно, фактическая проводимость Холла также квантуется. Что и требовалось доказать.

Для преодоления этого последнего теоретического препятствия понадобилось много месяцев беспокойных дней и бессонных ночей. Несколько раз я чуть не сдался, прежде чем достичь цели. Както в особенно мрачное время я сказал маме, что не уверен в желании проснуться на следующее утро. В типичной греческой манере она ответила: «Если ты совершишь какую-нибудь глупость, я прилечу и задушу тебя своими собственными руками». Потерянному в мире гипераналитического мышления, мне нужно было как раз такое абсурдное утверждение, чтобы выкарабкаться из этого состояния. Доказательство я закончил в ноябре 2009 г., поделился им с Мэттом, который быстро добавил раздел о том, как результат можно обобщить, чтобы объяснить и дробный квантовый эффект Холла, а затем разместил его в интернете. Потребуется еще пять лет, прежде чем результат будет опубликован, и еще четыре, прежде чем физико-математическое сообщество сможет его полностью переварить. 25 февраля 2018 г. я получил электронное письмо от Майкла Айзенмана — письмо, которого я ждал восемь лет. В нем было написано:

*«Дорогие Мэтт и Спирос!*

*Веб-страница "Нерешенные задачи математической физики" теперь дополнена сообщением о том, что вопрос о целочисленном квантовом эффекте Холла (QHE), опубликованный Йозефом Авроном и Руди Зайлером, решен в вашей совместной работе.*

*Настоящим я благодарю вас за ваш вклад, а также поздравляю вас с ним. Приятно отметить, что в каждой из двух проблем, о прогрессе в которых сообщается, прорыв был достигнут благодаря новым глубинным прозрениям и новым инструментам. Список решивших их — подлинная доска почета».*

Фундаментальной загадкой, с которой мы начали, был вопрос о том, почему микроскопическое, квантовое явление проявляется в макроскопическом масштабе. Вместо этого мы обнаружили, что одна из фундаментальных констант природы — это отражение глобального порядка, находящегося вне пределов нашего конечного понимания, — бесконечного приобщения к бесконечно малому. И хотя мы сосредоточили свое внимание на теории, лежащей в основе квантового эффекта Холла, эксперименты, которые он вдохновил за последние три десятилетия, были столь же, если не более захватывающими. Исследования топологических фаз материи за пределами двумерных квантовых систем Холла прокладывают путь к таким технологиям, как крупномасштабные отказоустойчивые квантовые вычисления. Впечатляющие результаты, полученные в таких лабораториях, как лаборатория Аны Марии Рей (Ana Maria Rey) в Колорадском университете в Боулдере, решают даже такие фундаментальные проблемы, как вопрос о природе времени.

Этот опыт также преподавал мне ценный урок: моя самооценка не связана с моим жизненным успехом. Тот самый телефонный разговор с моей мамой произошел за три месяца до того, как я добавил последние штрихи в решение задачи. Я не превратился в математического гения за несколько месяцев. Но я добился прогресса, разбив проблему на простые части, которые смог понять. Для этого мне нужно было спокойно относиться к чувству собственной некомпетентности, испытываемому большую часть времени. Без веры моих родителей в меня как личность, независимо от того, был ли я достаточно силен или нет, чтобы решить эту задачу, я бы сдался прямо перед финишем. Случись так, проблема, возможно, осталась бы нерешенной и Мстителям пришлось бы найти еще более невероятный с научной точки зрения способ спасти Вселенную, чем прыгнуть в Квантовый мир через макроскопический портал. ■

**Перевод: А.П. Кузнецов**

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ИСТОЧНИКИ

- Вольф М., Кьюбитт Т., Перес-Гарсиа Д. Неразрешимая задача // ВМН, № 12, 2018.
- Quantization of Hall Conductance for Interacting Electrons on a Torus. Matthew B. Hastings and Spyridon Michalakis in Communications in Mathematical Physics. Vol. 334, No. 1, pages 433–471; February 2015. <https://arxiv.org/abs/0911.4706>
- Open Problems in Mathematical Physics. [http://web.math.princeton.edu/~aizenman/OpenProblems\\_MathPhys/index.htm](http://web.math.princeton.edu/~aizenman/OpenProblems_MathPhys/index.htm)