



МАТЕМАТИКА

Задача трех тел

Хотя математики знают, что им никогда не удастся до конца решить задачу, история которой насчитывает уже несколько столетий, попытка получить ответ на небольшую ее часть привела к интригующим открытиям

Ричард Монтгомери

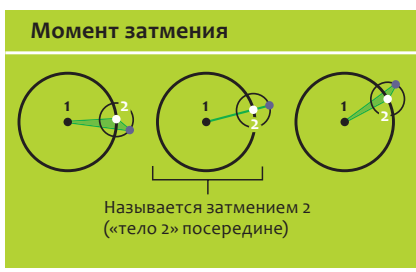
К весне 2014 г. я почти перестал заниматься задачей трех тел. В отсутствие каких-либо идей я занялся программированием на своем ноутбуке, чтобы получить и исследовать ее приближенные решения. Эти попытки никогда не позволят мне решить эту задачу до конца, но, возможно, они помогут собрать данные, ведущие к ответу. Отсутствие у меня опыта программирования и, как следствие этого, раздражительность замедляли работу, делая ее малоприятным занятием для математика вроде меня, основные инструменты которого — карандаш и бумага. Я разыскал своего старого друга Карлеса Симо (Carles Simó), профессора Барселонского университета, чтобы убедить его помочь мне в моих громоздких и неэффективных поисках.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

- Одна из самых старых неразрешимых задач в математике и физике называется задачей трех тел — это вопрос о том, как будут двигаться три тела, притягиваемые силами взаимной гравитации, если известны их текущие положения и скорости.
- Исаак Ньютон первым поставил эту задачу вместе с более простой задачей двух тел. Позднее в случае трех тел было найдено, что задача практически «неразрешима» — принципиально невозможно найти формулу, точно предсказывающую их орбиты.
- Математики тем не менее продолжили откалывать от нее небольшие куски, находя интересные решения для специальных случаев. Изучая задачу трех тел, ученые открыли новые захватывающие принципы математики.

Той осенью я отправился в Испанию, чтобы встретиться с Симо, у которого была репутация одного из самых изобретательных и дотошных аналитиков, использующих методы численного анализа в небесной механике. К тому же он прямой человек, который не тратит время впустую и не смягчает выражения. В мой первый день у него в кабинете после того, как я объяснил свой вопрос, он посмотрел на меня пронзительным взглядом и спросил: «Ричард, а почему тебя это волнует?»

Ответ на этот вопрос восходит к истории задачи трех тел. **Исаак Ньютон первым сформулировал и решил задачу двух тел**, когда в 1687 г. опубликовал свои «Принципы натуральной философии». Он задался вопросом: «Как будут двигаться в пространстве две массы, если единственная действующая на них сила — сила их взаимного гравитационного притяжения?» Ньютон свел вопрос к задаче по решению системы дифференциальных уравнений — уравнений, которые определяют будущее движение объекта исходя из его текущих местоположения и скорости. Он полностью решил свои уравнения для двух тел. Эти решения, называемые также орбитами, представляют собой движение тела по одному из конических сечений — окружности, эллипсу, параболе или гиперболу. Найдя все возможные орбиты, Ньютон вывел законы Кеплера, описывающие движение планет, — эмпирические законы, которые Кеплер опубликовал в 1609 г. и которые обобщили несколько десятилетий астрономических наблюдений, проведенных его покойным работодателем Тихо Браге. Первый закон Кеплера утверждает, что каждая планета (или комета) движется по коническому сечению с Солнцем, расположенным в его фокусе. В решениях Ньютона, однако, два тела — Солнце и планета — движутся по двум различным



сечениям. Оба эти сечения имеют общий фокус, представляющий собой центр масс двух тел. Солнце массивнее любой из планет настолько, что центр массы системы «Солнце — планета» расположен внутри самого Солнца, очень близко к его центру массы, так что центр массы

Солнца едва качается вокруг их общего центра по крошечной эллиптической орбите.

Возьмите вместо двух масс три — и получите задачу трех тел. Как и в предшествующем случае, их орбиты — решения системы дифференциальных уравнений. Однако в отличие от двух тел найти точные формулы для некоторых частных случаев трех тел можно, хотя и очень сложно, а вот в общем случае задача неразрешима. На сегодня, несмотря на суперкомпьютеры и многовековую работу лучших физиков и математиков, точные формулы получены лишь для пяти семейств орбит, **три из которых найдены Леонардом Эйлером (в 1767 г.) и два Жозефом Луи Лагранжем (в 1772 г.)**. В 1890 г. Анри Пуанкаре открыл хаотический характер динамики задачи трех тел, результат, который означает, что нам никогда не удастся найти все решения задачи с такой же или хотя бы приближающейся к ней степенью полноты, которой удалось добиться Ньютону при решении задачи двух тел. В то же время, используя метод, называемый численным интегрированием, эффективно реализуемый на компьютере, мы все же можем рассчитать приближенные конечные фрагменты орбит, что чрезвычайно важно при подготовке космических полетов. Увеличивая время расчетов на компьютере, можно получить приближения с любой необходимой нам точностью.

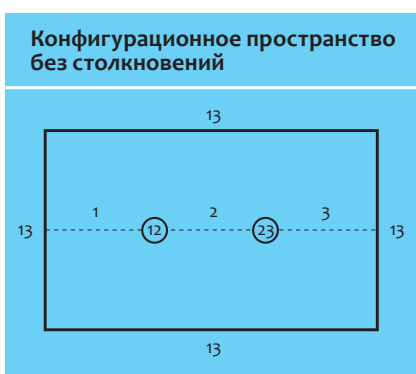
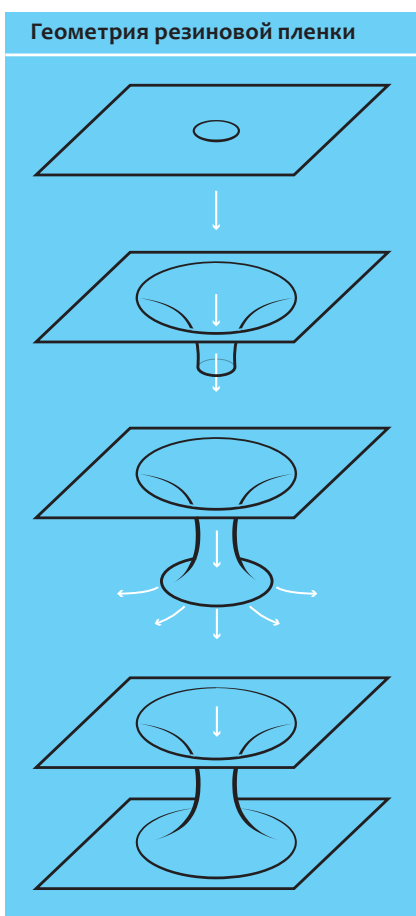
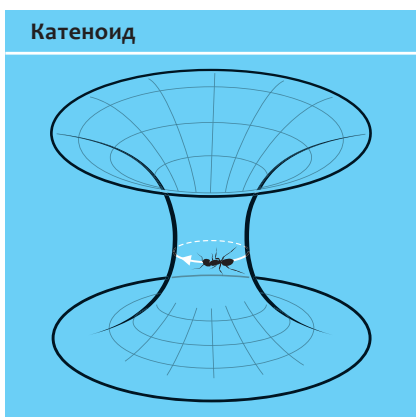
Затмения

От слов Симо у меня перехватило дыхание. «Конечно же волнуется, — подумал я. — Я бился над этой задачей почти 20 лет!» Собственно, я занимался одним из интересующих меня частных вопросов этой задачи:

«Будет ли каждая последовательность периодических затмений какой-нибудь периодического решения планарной задачи трех тел?»

Позвольте объяснить. Представим себе три тела (пусть это будут звезды или планеты), которые движутся в одной плоскости, удерживая друг друга гравитацией. Пронумеруем эти тела как первое, второе и третье. **Время от времени все три они выстраиваются в одну прямую линию.** Назовем эти события затмениями. (В специальной литературе такое «затмение» называется «сизигия», никто не расколется это слово, если вы загадаете его, играя в «виселицу».) Запасемся терпением и будем записывать каждое из затмений, присваивая ему числа один, два или три — в зависимости от того, какая из звезд находится в середине. Таким способом мы получим список затмений первого, второго и третьего типа, называемый последовательностью затмений.

Например, в несколько упрощенной версии нашей системы «Солнце — Земля — Луна» Луна (которой мы присвоим имя «тело 3») совершает оборот вокруг Земли («тело 2») каждый месяц, тогда как Земля совершает оборот вокруг Солнца («тело 1») один раз в год. Это движение повторяющееся, поэтому дает нам периодическую последовательность затмений, а именно: 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3. В этой последовательности не встречается 1, поскольку Солнце никогда не располагается между Землей и Луной. Такой список за один год содержит 24 числа, так что 2 и 3 можно обнаружить в каждом из 12 месяцев года. Нет никаких причин, чтобы последовательность затмений для какого-либо из решений была повторяющейся. Она могла бы продолжаться бесконечно, не выказывая явной картины. Однако если спустя какой-то промежуток времени решение в точности повторяется, как в системе «Земля — Луна — Солнце» через год, то эта последовательность повторяющаяся: все те же 24 числа системы «Земля — Луна — Солнце»



всплывают каждый год. Поэтому возвращаемся к моему вопросу: будет ли каждая периодическая последовательность затмений какой-нибудь периодического решения планарной задачи трех тел? Я подозревал, что ответом будет «да», но не мог этого доказать.

Дырявые объекты

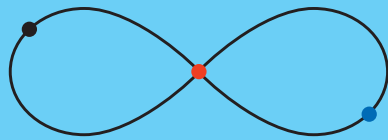
Чтобы обосновать важность моего вопроса, я напомнил Симо основные положения, связывающие вместе три ветви математики: топологию, иногда называемую «резиновой геометрией», Риманову геометрию — теорию искривленных поверхностей, и динамику — теорию движения тел. **Представьте себе жука, ползущего вдоль искривленной поверхности, по форме напоминающей «кротовую нору» (пространственно-временной туннель в гипотетической модели Вселенной. — Примеч. пер.), называемую также «катеноид».** Задача жука — найти самый короткий путь однократного обхода дыры. С точки зрения топологии поверхность кротовой норы — то же, что и плоскость с осями x и y , в которой проколото одно отверстие. **В самом деле, представьте отверстие, проколотое в эластичном резиновом листе. Потянув за края листа у отверстия вниз, а затем растянув наружу, вы можете получить поверхность кротовой норы.** Если раструб получился достаточно большой, то не просто существует самый короткий путь обхода, он к тому же удовлетворяет дифференциальному уравнению, очень похожему на уравнения движения трех тел. Таким путем наш жук нашел периодическое решение интересующего нас дифференциального уравнения.

В задаче трех тел роль кротовой норы играет нечто, называемое конфигурационным пространством, — пространство, каждая точка которого задает местоположение всех трех тел

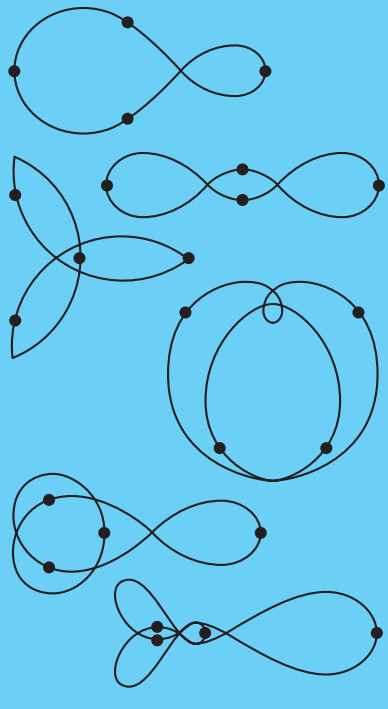
в данный момент, и таким образом кривая в конфигурационном пространстве строго определяет движение каждого из трех тел. Настояв на том, чтобы наши тела не сталкивались друг с другом, мы проделаем дырки в этом конфигурационном пространстве. Как мы увидим, с точки зрения топологии или резиновой геометрии **конфигурационное пространство, в котором нет столкновений, — это то же самое, что и плоскость, натянутая на оси x и y , с двумя проколами в ней дырками**. Мы назовем эти проколы «12», подразумевая под этим столкновения тел 1 и 2, и «23», обозначая столкновение тел 2 и 3, а также расположим их на оси x . Третью же дырку, которая представляет собой столкновение тел 1 и 3, мы расположим на бесконечности и назовем ее «13». Эти три прокола разбивают ось x на три сегмента, обозначенные 1, 2 и 3. Любая кривая в этой плоскости с двумя проколами представляет собой движение всех трех тел — иначе говоря, это потенциальное решение задачи трех тел. Когда кривая проходит через сегмент 1, это означает затмение типа 1, и аналогичное верно для пересечения сегмента 2 или 3. Таким образом последовательность затмений предоставляет способ обходить наши точки столкновений.

Теперь наш жук пытается минимизировать длину своего пути, когда он однократно обходит кротовую нору. Чтобы добиться корректной аналогии между проблемой жука и задачей трех тел, мы должны длину пути заменить величиной, называемой действием на этом пути. (Действие — это что-то вроде среднего от мгновенного значения кинетической энергии минус потенциальная энергия вдоль пути.) Теорема из механики, возраст которой — уже несколько столетий, утверждает, что любая кривая в конфигурационном пространстве, которая минимизирует действие, должна

Решение в виде восьмерки



Новые орбиты



быть решением ньютоновской задачи трех тел. Таким образом, мы можем попытаться решить нашу задачу о последовательности затмений, найдя среди всех возможных замкнутых путей, дающих фиксированную последовательность затмений, такие замкнутые пути, которые минимизируют действие.

Эта стратегия — поиск способа минимизировать действие в конфигурационном пространстве для петель с данной последовательностью затмений — поглощала все мое внимание на протяжении большей части из 17 лет и привела ко многим интересным результатам. Например, в 2000 г. Ален Шансине (Alain Chenciner) из Университета Париж VII им. Дени Дидро и я заново открыли то, что, по-видимому,

было первым известным периодическим решением задачи трех тел с нулевым моментом импульса. **Это было решение в форме восьмерки**, впервые найденное в 1993 г. Крисом Муром (Chris Moore) из Института Санта-Фе. В данном случае три тела равной массы гонялись друг за другом по траектории в форме плоской восьмерки. Последовательность их затмений была 123123, повторяющаяся бесконечно. Наша работа сделала популярной фигуру в виде восьмерки и дала строгое доказательство ее существования. Это также привело к взрыву открытий **множества новых орбит для тел равных масс для задачи N тел, орбит, которые Симо**, открывший сотни этих новых семейств орбит, окрестил «танцами». Наша орбита в форме восьмерки привела даже к созданию ставшего бестселлером научно-фантастического романа китайского писателя Лю Цысиня под названием «Задача трех тел».

На следующий день после того, как я поделился своими соображениями с Симо, он произнес нечто такое, что глубоко запало мне в душу. «Ричард, если все то, что ты думаешь по поводу своего вопроса, верно, то должен существовать некий динамический механизм». Другими словами, если я был прав в том, что ответ на мой вопрос положительный, то должно было быть нечто, управляющее движением этих тел, что заставляет их вести себя так.

Эти несколько слов поставили под вопрос мои убеждения и привели меня к отказу от продолжения 17-летних попыток получить ответ на мой вопрос с помощью нахождения минимума действия вдоль различных путей. Я задавался вопросом, какой динамический механизм в этой задаче я все же понимал. Я мог вспомнить два, из которых лишь один позволял на что-то надеяться. Этот открытый Пуанкаре механизм, относящийся к теории хаоса, заставил меня поразмыслить

над старой работой моего нынешнего соавтора Рика Меккеля (Rick Moeckel) из Миннесотского университета. В 1980-х гг. мы показали, как кривые, называемые гиперболическими сплетениями, порожденные тройными столкновениями в задаче трех тел, могут привести к поразительным результатам. Когда я перечитывал его старые статьи, мне казалось, что у Меккеля есть ключи к моей проблеме. Я связался с ним, и уже через нескольких дней мы с Меккелем совместно ответили на мой вопрос! Ну, почти что. Мы ответили на вопрос, бесконечно близкий ему.

Сфера форм

Понимание динамического механизма Меккеля наряду с соотношением, связывающим конфигурационное пространство трех тел и плоскость с двумя дырками, описанную выше, требует рассмотрения объекта, называемого сферой формы. Когда три тела движутся в плоскости, в каждый момент они образуют три вершины треугольника. Вместо того чтобы продолжать отслеживать положение каждой из вершин, давайте проследим лишь форму треугольника. В результате получим кривую на сфере форм, сфере, каждая из точек которой представляет собой определенную «форму» треугольника.

Что такое «форма»? Две фигуры на плоскости имеют **одинаковую форму**, если мы можем превратить одну из фигур в другую, перемещая ее параллельно, вращая и изменяя масштаб. Операция по переходу от обычного конфигурационного пространства, то есть от знания местоположения всех трех вершин треугольника, к точке на сфере форм, — это процесс потери, а именно потери информации о размере его центра масс и ориентации треугольника на плоскости. То, что сфера — двумерный объект, легко понять из школьной



геометрии: мы знаем форму треугольника, если знаем величину каждого из его трех углов, но поскольку сумма трех углов всегда равна 180° , на самом деле нам нужно знать два из трех углов — следовательно, для описания формы треугольника достаточно двух чисел. То, что сфера форм — это действительно сфера, понять труднее, и для этого необходимо, чтобы мы позволили треугольникам вырождаться, что означает, что мы позволим «треугольникам», все три вершины которых лежат на одной прямой, также называться треугольниками. Эти так называемые вырожденные треугольники, площадь которых равна нулю, образуют экватор сферы форм: все они — затмения!

Площадь треугольника, деленная на его размер (r) в квадрате, — это его расстояние до экватора. Северный и южный полюса сферы представляют треугольники с максимально возможной площадью, и это две формы равносторонних треугольников. Но почему существуют две формы равносторонних треугольников? **Эти две формы равносторонних треугольников отличаются циклической последовательностью своих вершин.** Невозможно превратить один из этих треугольников в другой на плоскости с помощью вращения или изменения масштабов: они разной формы. Однако операция симметрии относительно прямой (любой прямой) на плоскости превращает один равносторонний треугольник в другой. Эта операция симметрии действует на все треугольники, а значит, и на саму сферу, где она действует при симметрии относительно экватора, сохраняя точки на самом экваторе (вырожденные треугольники) неподвижными при взаимной смене положения северного и южного полушарий.

Случай вырожденных треугольников включает двойные столкновения: такие

«треугольники», в которых две из трех вершин лежат одна на другой. Существуют ровно три таких треугольника с двойным столкновением, обозначенные «12», «23» и «13», в соответствии с тем, какие две вершины лежат друг на друге.

Теперь я могу объяснить, как сфера форм показывает нам, что конфигурационное пространство трех тел топологически эквивалентно обычной плоскости с осями x и y минус две точки. Мы должны знать, что сфера минус одна точка — топологически один и тот же объект, что и обычная плоскость. Один из способов проверить этот факт о сфере — воспользоваться стереографической проекцией, которая отображает сферу с одной изъятой точкой (источником света) на обычную плоскость с осями x и y . По мере того как точка на сфере приближается к источнику света, ее изображение на плоскости x - y сдвигается к бесконечности, поэтому мы можем также сказать, что плоскость с добавленной точкой на бесконечности топологически эквивалентна сфере. Перенесите источник света в точку двойного столкновения 13. Сориентируйте сферу таким образом, чтобы экваториальная плоскость пересекала ось x плоскости x - y . Тогда стереографическая проекция отобразит экватор вырожденных треугольников на ось x этой плоскости, и другие точки двойного столкновения отобразятся двумя точками на этой оси x - y . Таким образом, мы приходим к картине, точно описанной ранее.

Три точки двойных столкновений образуют три особые точки на сфере форм. Помимо этих трех, на сфере форм существуют дополнительные особые точки, называемые центральными конфигурациями. Эти пять центральных конфигураций соответствуют пяти семействам решений, полученных Эйлером и Лагранжем. Их решения — единственные решения задачи



трех тел для случая, когда форма треугольника не изменяется при его эволюции! В решениях Лагранжа треугольник остается равносторонним в каждый момент времени; как мы видели, существуют две конфигурации и они совпадают с северным и южным полюсами сферы форм. Мы называем их «точка Лагранжа 4» и «точка Лагранжа 5». Остальные три конфигурации — конфигурации Эйлера, называемые «точка Эйлера 1», «точка Эйлера 2» и «точка Эйлера 3». Это коллинеарные (лежат на одной прямой), вырожденные конфигурации, поэтому они расположены на экваторе сферы форм. Они находятся на экваторе между тремя точками двойных столкновений. (Их расположение на экваторе зависит от соотношения масс трех тел.) Точка Эйлера 1, например, лежит на дуге экватора, помеченной 1, поэтому коллинеарна форме, в которой тело 1 лежит между телами 2 и 3. (Часто все пять точек центральной конфигурации называют точками Лагранжа, а точки Эйлера при этом обозначают как $L1$, $L2$ и $L3$.)

Что такое решения центральной конфигурации, можно понять, освободив три тела, — я имею в виду, дать возможность трем телам двигаться из состояния, в котором у них нет

начальной скорости. Обычно, когда проделываешь это, начинают происходить всякие сумасшедшие вещи: близкие двойные столкновения, дикие танцы и, возможно, даже бегство одного из тел в бесконечность. Но если освободить три тела, когда они находятся в одной из пяти форм центральной конфигурации, то образованный ими треугольник просто сожмется в точку, оставаясь строго той формы, которая была у них с самого начала, все эти три массы будут притягивать друг друга, сохраняя форму образованного ими треугольника, пока решение не закончится одновременным тройным столкновением.

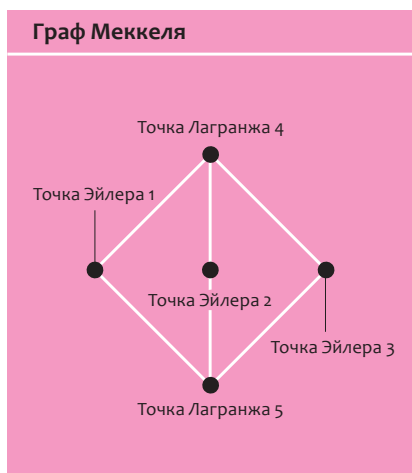
Пять путей к тройному столкновению

Тройное столкновение — важная особенность в задаче трех тел, что-то вроде Большого взрыва в центре задачи, и источник значительной части ее хаоса и трудностей. В начале 1900-х гг. финский математик Карл Зундман (Karl Sundman) доказал, что пять центральных конфигураций, представленные только что описанными решениями для получивших свободу тел, — единственный путь к тройному столкновению. А это означает, что любое решение, заканчивающееся тройным столкновением, должно приближаться к нему способом, очень близким к одной из пяти центральных конфигураций освобожденных тел, и по мере того как оно все более приближается к тройному столкновению, форма решения должна приближаться к форме одной из пяти центральных конфигураций.

Работа Зундмана представляла собой нетривиальное сочетание методов алгебры и анализа. Затем, в том году, когда я окончил среднюю школу (не имея ни малейшего представления о задаче трех тел), американский математик Ричард Макги (Richard McGehee) придумал свой так

называемый метод увеличения, который позволил нам наглядно представить работу Зундмана и гораздо более детально изучать динамику состояний, близких к тройному столкновению. Пусть r обозначает расстояние до тройного столкновения — мера, определяющая размеры треугольника. Когда r приближается к нулю, уравнения Ньютона начинают очень плохо себя вести, многие их члены устремляются в бесконечность. Макги нашел преобразование переменных конфигурационного пространства и времени, которое замедляет скорость приближения к тройному столкновению и превращает точку тройного столкновения, для которой $r = 0$, в целый набор точек: многообразие точек столкновения. Большая неожиданность! Многообразие точек столкновения — это не что иное, как сфера форм. Метод Макги продлил уравнения Ньютона, первоначально справедливые только для r больших нуля, на систему дифференциальных уравнений, которые приобретают смысл при $r = 0$.

Уравнения Ньютона не допускают точек равновесия, а это означает, что не существует равновесных конфигураций из трех тел: три звезды, каждая из которых притягивает две другие, не могут просто так, не двигаясь, находиться в пространстве. Но когда уравнения Ньютона расширяются до многообразия столкновений, появляются точки равновесия. Существует ровно десять таких точек, по паре для каждой из пяти точек центральной конфигурации на сфере форм. Один элемент пары представляет собой конечный результат соответствующей конфигурации освобожденных тел, когда они приближаются к точке тройного столкновения. Уравнения Ньютона остаются теми же самыми, даже если мы направим время в обратную сторону, поэтому мы можем прокрутить любое решение в обратную



Не существует равновесных конфигураций из трех тел: три звезды, каждая из которых притягивает две другие, не могут просто так, не двигаясь, находиться в пространстве

сторону и получить еще одно решение. Когда мы направляем в обратную сторону решение для освобожденных тел центральной конфигурации, мы получаем решение, которое «взрывается» из тройного столкновения, достигая своего максимального размера в конфигурации только что освобожденных тел. Другой элемент пары представляет собой исходную начальную точку этого «взрывного» решения. Вместе эти два решения центральной конфигурации — столкновение и извержение — хорошо сочетаются друг с другом и дают единственное решение: извержение-столкновение, растущее

из равновесной точки извержения, в которой $r = 0$, входит в область, где r больше нуля, где достигает своего максимального размера, а затем снова сжимается в конечную равновесную точку столкновения на многообразии тройных столкновений. Это полное решение связывает один элемент равновесной пары с другим.

Создав эти точки равновесия, связанные с центральными конфигурациями и запрятанные глубоко внутри задачи трех тел, Макги вручил Меккелю ключ, который позволил тому применить только что полученные результаты из теории динамических систем — результаты, неизвестные Ньютону, Лагранжу или Зундману, — чтобы получить некоторый прогресс в задаче трех тел.

Прогулка Меккеля

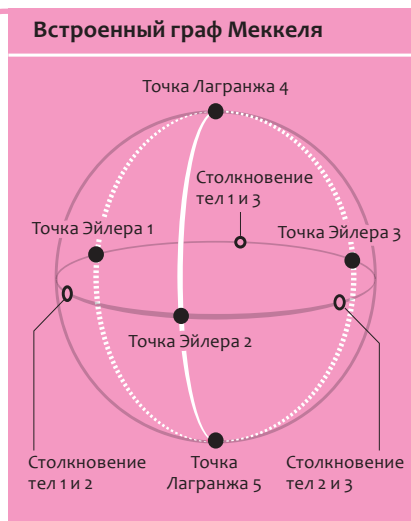
В статьях Меккеля я увидел рисунок, на котором была изображен граф с пятью вершинами, обозначенными каждая одной из центральных конфигураций и соединенными друг с другом отрезками.

Обойти вершины графа по кругу можно, перемещаясь от вершины к вершине по отрезкам прямых. Меккель доказал, что любой из возможных обходов по линиям его фигуры соответствует одному из решений задачи трех тел, которое на протяжении некоторого времени приближается к решению центральной конфигурации, обозначенной соответственной вершиной. Например, путь $E1 L4 E2 L5$ соответствует решению, очень близкому к решению Эйлера «извержение-столкновение, связанное с точкой Эйлера 1», затем приближается к тройному столкновению почти рядом с решением Лагранжа $L4$ центрального столкновения, но прежде чем произойдет тройное столкновение, все три тела вылетают по одному из пяти «путей» в непосредственной близости от точки 2 Эйлера решения центральной

конфигурации. Затем, наконец, когда это решение Эйлера снова сожмется, приближаясь к тройному столкновению, это решение растянется в лагранжевский равносторонний треугольник $L5$. Более того, если мы повторим этот же самый обход, сделав его периодическим, решения, возникающие в результате него, тоже будут периодическими.

Вскоре после того как Симо указал мне, что должен существовать динамический механизм, я понял, что граф Меккеля хорошо встраивается в сферу формы. Что важно, этот встроенный граф несет в себе всю топологию сферы с ее тремя дырами двойных столкновений. В самом деле, мы можем деформировать проколотую в трех местах сферу в граф и, проделав это, превратить любую петлю в проткнутую сферу, чтобы прогуляться по графу. Чтобы увидеть эту деформацию, представьте себе сферу как поверхность воздушного шарика. Прокोलите в нем булавкой три отверстия, по одному в каждой дырке двойного столкновения. Воздушный шарик сделан из очень эластичного материала, поэтому мы можем расширить три наших прокола, увеличить их до такого размера, чтобы края всех трех дырок почти касались друг друга и оставшийся материал образовал ленту, плотно сжимающуюся около встроенного графа. В ходе такой деформации любая замкнутая петля на сфере, проткнутой в трех точках, деформируется в замкнутую петлю этой состоящей из полосок структуры — и отсюда в замкнутый путь по встроенному графу Меккеля.

Чтобы превратить эту картинку в теорему о решениях системы уравнений, мне требовалось доказать, что если я проецирую решения, гарантируемые теоремой Меккеля, на сферу форм, то они никогда не отклонятся далеко от этого встроенного графа. Если бы это все же произошло, они могли бы извиваться



вокруг точек двойных столкновений или даже пройти через одну из них, разрушая или добавляя некоторые топологически важные петли и меняя таким образом последовательность затмений. Я отправил Меккелю по электронной почте сообщение с просьбой о помощи. Он ответил: «Вы что, хотите заставить меня перечитывать статьи, которые я написал 20 лет назад?» Тем не менее он снова окунулся в свои старые исследования и доказал, что проекции решений, которые он символически закодировал много лет назад, никогда далеко не отклонялись от встроенного графа. Я получил ответ на свой вопрос — вернее, почти получил.

Чтобы доказательство заработало, Меккелю требовался крошечный момент импульса. (Момент импульса в нашем контексте — это мера суммарного количества «вращения» системы, и он представляет собой постоянную величину для каждого решения.) Но на протяжении всех этих 17 лет до нашего с Симо разговора я настаивал на решениях, в которых момент количества движения был равен нулю. Это настойчивое требование возникло из-за того, что решения, минимизирующие действие вдоль всех возможных путей, имеющих данную последовательность затмений, должны иметь

нулевой момент импульса. С другой стороны, Меккелю требовался небольшой момент импульса, чтобы получить решения, проходящие по сторонам его графа. Символ, обозначающий очень малую положительную величину в математическом анализе, — эпсилон. Нам был необходим эпсилон момента импульса.

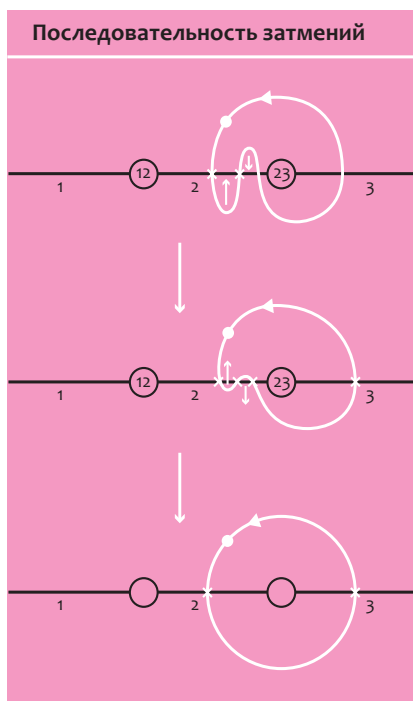
Была и другая уловка, ведущая к результату Меккеля: его решения, когда они пересекали экватор сферы форм вблизи точек Эйлера $E1$, $E2$ и $E3$, начинали совершать колебательные движения взад-вперед через экватор, прежде чем пройти вверх к северному или вниз к южному полюсу, когда они проходили возле точки тройного столкновения вдоль соответствующих путей Лагранжа, $L4$ или $L5$. Чтобы понять, о каких осцилляциях идет речь, возьмите целое положительное число N и назовите последовательность затмений «длины N », если каждый раз число встречается в последовательности по крайней мере N раз подряд. Например, последовательность 1112222333332222 имеет длину 3, а не 4, поскольку там только три 1 идут подряд.

А вот, наконец, и наша главная теорема: рассмотрим задачу трех тел с небольшим ненулевым моментом импульса эпсилон и массами в широком открытом диапазоне. Тогда существует большое целое положительное число N , обладающее следующими свойствами. Если мы выберем любую произвольную последовательность затмений — длиной N , — то существует соответствующее решение нашей задачи трех тел, имеющее точно такую же последовательность затмений. Если эта последовательность сделана периодической, то периодическим будет и реализующее ее решение.

А что же относительно первоначального вопроса? Там не было никакого упоминания о каком-либо большом N . Я задал вопрос о каждой последовательности

затмений. Но я не рассказывал вам о моем настоящем вопросе. То, что я в действительности хотел выяснить, — так это можно или нельзя реализовать любой «топологический тип» периодической кривой, а не последовательность затмений. Последовательность затмений я использовал как удобную символику или способ обозначения топологического типа, то есть, другими словами, как способ обозначения хаотичной картины петель вокруг трех дырок двойных столкновений. Представление последовательности затмений топологического типа замкнутой кривой обладает избыточностью: многие различные последовательности затмений обозначаются одним и тем же типом топологической кривой. Рассмотрим, например, топологический тип «совершить однократный обход прокола, проделанного, чтобы исключить двойное столкновение 23». Последовательность затмений 23 как раз и представляет этот топологический тип. Но его же представляют и последовательности 2223, 22223 и 2333. **Всякий раз когда у нас есть два последовательных пересечения дуги 2, мы можем исключить их, выпрямив наш меандр (замкнутую кривую без самопересечений, пересекающую прямую несколько раз. — Примеч. пер.), заставив кривую на протяжении этой ее части оставаться в одной или другой полусфере, не пересекая экватор.** Более того, мы можем исключить любые последовательные пары одинаковых чисел, которые появляются в последовательности затмений, не изменяя топологический тип замкнутой кривой, задаваемой последовательностью.

Чтобы использовать нашу основную теорему для ответа на мой настоящий вопрос, заметьте, что, исключая последовательные пары, я могу добиться того, чтобы последовательность затмений, соответствующая данному топологическому типу,



никогда не включала в себя два последовательных числа одного типа: никаких 11, 22 или 33. Назовем такую последовательность разрешенной последовательностью. Теперь возьмем любую разрешенную последовательность, например 123232. Позвольте мне воспользоваться экспоненциальной нотацией для записи последовательности затмений, таким образом, например, $13 = 111$. Возьмем нечетное число n , по крайней мере не меньше, чем число N из нашей теоремы. Заменим допустимую последовательность более длинной $1n 2n 3n 2n 3n 2n$ и продолжим ее периодически. Эта более длинная последовательность представляет тот же самый первоначально выбранный тип, поскольку n — нечетное число. Наша теорема говорит, что эта более длинная последовательность реализована периодическим решением. Это периодическое решение представляет собой наш исходный периодический тип 123232.

Что дальше?

Нам предстоит еще многое сделать. Когда почти 20 лет назад я в первый раз поставил свой

вопрос, я хотел найти решения с нулевым моментом импульса. Но накапливалась гора свидетельств, что ответ на мой вопрос в случае нулевого момента импульса — «нет». У нас есть некоторые данные, которые говорят, что даже простейшая непустая периодическая последовательность 23 никогда не реализуется в виде периодического решения задачи трех тел равной массы с нулевым моментом импульса.

Наш основной вопрос в виде, сформулированном здесь, даже для момента импульса ϵ , остается открытым, поскольку наша теорема позволяет нам реализовать последовательности длиной N только для некоторых больших N . Например, у нас нет никакого ключа к пониманию того, как реализовать допустимые последовательности, то есть последовательности, в которых рядом нет чисел одного типа. По большому счету мы, возможно, не продвинулись в решении задачи трех тел в традиционном смысле, но мы узнали много нового. И мы продолжим работу в этом направлении — эта задача продолжит приносить плоды тем из нас, кого она притягивает. Оказывается, в одной из классических нерешаемых задач в истории математики все еще возможны новые озарения. ■

Перевод: А.П. Кузнецов

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ИСТОЧНИКИ

- Remarkable Periodic Solution of the Three-Body Problem in the Case of Equal Masses. Alain Chenciner and Richard Montgomery in *Annals of Mathematics*, Vol. 152, No. 3, pages 881–901; November 2000.
- Realizing All Reduced Syzygy Sequences in the Planar Three-Body Problem. Richard Moeckel and Richard Montgomery in *Nonlinearity*, Vol. 28, No. 6, pages 1919–1935; June 2015.