

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Змитренко, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, Теория режимов с обострением в сжимаемых средах, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Нов. достиж.*, 1986, том 28, 3–94

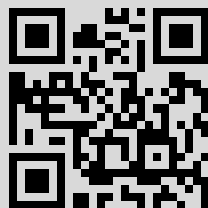
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 90.154.48.235

16 октября 2018 г., 23:30:56



ТЕОРИЯ РЕЖИМОВ С ОБОСТРЕНИЕМ В СЖИМАЕМЫХ СРЕДАХ

Н. В. Змигренко, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов

ВВЕДЕНИЕ

В этой работе излагаются результаты теоретических исследований воздействия на сплошную среду граничных режимов с обострением.

Математическая модель, описывающая сплошную среду, включает нестационарные уравнения газовой динамики [99, 126, 128] вместе с соответствующими уравнениями состояния и, в более общем случае, дополнительные уравнения, учитывающие различные физические процессы [15, 22, 129] (теплопроводность, вязкость, тепловые источники, давление и диффузию магнитного поля). Искомые функции $F_i(r, t)$ зависят от пространственных координат r и времени t .

Постановка задачи включает в соответствии с физическими условиями задание ряда искомых функций на определенных поверхностях, ограничивающих среду (граничные условия), а также задание значений искомых функций в начальный момент времени (начальные условия).

Особенностью настоящей работы является рассмотрение определенного класса граничных условий. Именно, будем интересоваться процессами в сплошной среде, когда некоторые из искомых функций $F_i(r, t)$, например, плотность среды или давление в ней, неограниченно возрастают ($F_i(r, t) \rightarrow \infty$) с ходом процесса при стремлении времени t к конечному моменту t_f ($t \rightarrow t_f < +\infty$). При этом говорят, что данные величины F_i ведут себя в *режиме с обострением*. Одной из причин такого поведения может быть задание режима с обострением в качестве граничного условия: для ряда F_i на ограничивающих среду поверхностях Γ задаются режимы с обострением $F_i(r, t) |_{\Gamma} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_f$.

Существуют и другие причины возникновения режимов с обострением: пространственная неоднородность начальных данных и другие геометрические факторы, приводящие к появлению кумулятивных эффектов [12, 16, 62, 128, 134], интенсивные источники тепла (горение взрывного характера) [30, 34, 73—75,

77, 92, 93, 119, 120, 138—140]. Анализ развития в сплошной среде режимов с обострением под действием этих причин остается за рамками настоящей работы.

Основное внимание в работе уделено анализу автомодельных задач, решения которых являются частным случаем инвариантно-групповых решений, допускаемых системой уравнений газовой динамики и уравнениями газовой динамики с учетом диссипативных процессов [21, 55, 78, 109]. Инвариантно-групповые решения являются важным классом решений систем гиперболических и параболических нелинейных уравнений и представляют собой те асимптотики, к которым приходит состояние среды с течением времени [12, 34]. Анализ инвариантно-групповых решений позволяет указать режимы, в которых развитие процессов в среде происходит с обострением.

В автомодельных режимах зависимости всех величин от времени имеют степенной вид [62, 126, 128].¹⁾ В этом случае режим с обострением для зависимости от времени $F_{i0}(t)$ некоторой величины $F_i(r, t)$ на поверхности гГГ дается выражением

$$F_{0i}(t) = B_{0i}(t_f - t)^{n_i}. \quad (1)$$

Здесь $B_{0i} = \text{const}$, $n_i < 0$, $t < t_f$ и $t \rightarrow t_f < +\infty$. Отметим, во избежание дальнейшей путаницы, что поскольку рассматриваемые в настоящей работе уравнения не меняются при замене t на $t' = t + \tau$, $\tau = \text{const}$ (допускают «сдвиг по времени»), то запись (1) эквивалентна записи

$$F_{0i}(t) = B_{0i}(-t)^{n_i}. \quad (2)$$

Чтобы исключить дополнительные безразмерные параметры, содержащиеся в неавтомодельных начальных данных, полагают в (2) $t \in (-\infty, 0)$: $-\infty < t < 0$, $t \rightarrow 0$ (подробнее см. в § 2, гл. 2). Аналогично, в автомодельной задаче без обострения [19—21, 23—28, 40, 41, 77, 86, 87, 107, 126, 128, 141] $t > 0$ и $t \in (0, +\infty)$, $t \rightarrow +\infty$, а граничные режимы имеют вид

$$F_{0i}(t) = B_{0i}t^{n_i}. \quad (3)$$

Почему при анализе граничных воздействий на сплошную среду внимание было обращено на режимы с обострением?

Во-первых, желание рассмотреть сжатие среды в рамках автомодельности первого рода, изменения величин в которой определяются изменением граничных условий, с необходимостью приводит к постановке граничных задач с режимом обострения на границе. В противном случае, как известно, в решении может возникнуть ударная волна, кумулирующаяся по автомодельному закону [134], никак не связанному с изменениями величин на границе.

¹⁾ Экспоненциальная зависимость от времени [128] здесь не рассматривается.

Во-вторых, вид зависимостей всех $F_i(r, t)$ от времени в автомодельных задачах с $t < 0$ (2) и с $t > 0$ (3) одинаков. Это дает возможность использовать опыт, накопленный при решении автомодельных задач с $t > 0$ [19—21, 23—28, 40, 107, 126, 128].

В-третьих, «похожесть» (2) и (3) позволяет поставить вопрос о существовании «зеркальных» режимов, пространственные распределения величин в которых одинаковы, но меняются со временем противоположным образом (см. § 3, гл. 2): при некотором $n < 0$ в (2), (3) имеем $\lim_{t \rightarrow -0} (-t)^n \rightarrow +\infty$, а $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^n \rightarrow 0$. Существенно,

что в «зеркальных» режимах направление времени одинаково; оно возрастает (как при $-\infty < t < 0$, $t \rightarrow 0^-$, так и при $0 < t < +\infty$, $t \rightarrow +\infty$ значение времени t увеличивается по абсолютной величине). Поэтому, такое «обращение процессов во времени» не противоречит второму началу термодинамики: ход энтропии в «зеркальных» режимах одинаков [64, 72].

Наконец, изучение режимов с обострением [6, 7, 45—50, 57, 66—69, 74, 77, 88—92, 117—120, 138—140] привело к обнаружению эффекта локализации тепловых, гидродинамических, магнито-гидродинамических процессов в определенных участках среды и связанного с ним явления образования нестационарных структур в сплошной (в общем случае диссипативной) среде. Эта причина представляется авторам одной из наиболее важных. Автомодельная формулировка позволяет аналитически изучить условия возникновения структур. Тем самым, с одной стороны, даются конструктивные законы построения организации среды [93], а с другой стороны, выясняется роль режимов с обострением как асимптотик поведения среды при определенном ходе процессов в ней. Изучение режимов с обострением во многом стимулировалось этой обнаруженной способностью обеспечивать условия возникновения организации в сплошной среде. Впервые эффект локализации тепла был обнаружен А. А. Самарским и И. М. Соболев [122]. Соответствующее точное решение уравнения нелинейной теплопроводности получило название *остановившейся тепловой волны*.

Полезно проследить взаимосвязь понятий режима с обострением, локализации и возникновения структур в среде в историческом плане.

Исследование с помощью численных методов нелинейных уравнений магнитной газодинамики для теплопроводной, проводящей (и, в ряде случаев, излучающей) среды дало возможность наблюдать сложную картину взаимодействия тепловых и магнито-гидродинамических процессов [20, 24, 28, 88, 89, 91, 93, 130]. Были выяснены условия, при которых в среде возникали самоподдерживающиеся, локализованные на определенных участках массы температурные, токовые образования (Т-слои). Определенные жидкие частицы среды, в которых преимущест-

венно сосредоточиваются электрические токи, нагреваются до температур много больших, чем средняя по среде. Эти структуры поддерживаются за счет диссипации энергии магнитного поля в джоулево тепло при диффузии поля в среду. Механизмы, способствующие отводу энергии из области ее выделения в Т-слое, сдерживали и ограничивали его развитие. К таким механизмам относят гидродинамическое движение (ударные волны и течение плазмы, возбуждаемые ростом давления вещества в области Т-слоя за счет взрывоподобного выделения тепла в нем), процессы теплопроводности и излучения. Т-слой представлял собой развитую нелинейную стадию эволюции перегретой неустойчивости в магнитной гидродинамике [20, 24, 28, 44, 61, 79, 116, 121, 123, 130].

Построение частных (автомодельных) решений исходной системы уравнений магнитной гидродинамики во многом способствовало пониманию механизмов образования и эволюции Т-слоя. Автомодельные решения [20, 24, 28, 130] описывали разлет плазмы против магнитного поля в так называемом регулярном режиме [106, 107].

Особенность этого режима заключалась в следующем.

Рассматривались одномерные движения среды: $F_i(r, t) = F_i(r, t)$ зависит только от двух переменных: пространственной координаты r и времени t . В этом случае целесообразно ввести лагранжевы координаты x и t , где каждая данная координата x связана с определенной жидкой частицей среды [99]. Граничная поверхность Γ теперь соответствует некоторому фиксированному значению $x = x_0 : r \in \Gamma \Rightarrow x = x_0$; граничное условие вида (2), (3) имеет место для $x = x_0 : B_{0i}(\pm t)^{n_i} = F_i(x_0, t)$. Полная масса вещества в рассматриваемых задачах конечна. Это означает конечность параметра $x_0 : x_0 < +\infty$. В этом случае система уравнений газовой динамики (в том числе и с учетом диссипативных процессов) имеет решение в разделяющихся переменных:

$$F_i(x, t) = B_i(t) f_i(x). \quad (4)$$

Оно и называется регулярным режимом¹⁾.

Вид автомодельного решения (4), найденного в [20, 24, 28, 130], указывал на замечательную особенность регулярного режима: неравномерно нагретое (если $f_i(x)$ — температура) или неравномерно сжатое (если $f_i(x)$ — плотность) вещество оставалось неравномерно нагретым или неравномерно сжатым в течение всего процесса. Решения (4) описывали локализацию в смысле отсутствия распространения тепла, других форм энергии от неоднородностей в окружающую среду. В изученных в [20, 24, 28, 130] автомодельных решениях, содержащих Т-слой,

¹⁾ В случае граничных условий (2), (3) степенного вида все $B_i(t)$ в (4) также имеют степенной вид: $B_i(t) = B_{0i}(\pm t)^{n_i}$.

процессы выделения и распространения тепла были согласованы во времени.

В [20, 24, 28, 130] изучались задачи с граничными условиями вида (3) с $t \rightarrow +\infty$. В этом случае локализованные решения в отсутствие тепловыделения не кажутся необычными. Например, они описывают процесс остывания конечной массы газа, на границе которой температура падает со временем. Тем более тривиален изэнтропический режим расширения массы газа, поддерживаемого поршнем, давление на котором уменьшается со временем. Плотность вещества во всех решениях типа (3) из [20, 24, 28, 130] падает со временем. Это режимы разрежения. Поэтому не вызывает удивления отсутствие в них ударных волн (положение их фронта не может соответствовать фиксированной координате x : через сильный разрыв такого типа всегда существует поток вещества [99]).

Естественно возникает желание исследовать режимы вида (4) с нарастанием плотности. В этом случае решение (4) описывает процесс безударного сжатия, что само по себе уже не тривиально. Для получения такого решения следует перейти в граничных условиях от вида (3) к виду (2), т. е. ввести в задачу режимы с обострением. Режимы безударного сжатия (4), (2) были построены и изучены для системы уравнений газовой динамики с учетом ряда диссипативных процессов (а также и в случае отсутствия последних) [65—70, 112]. Исследование основывалось на формальном методе введения значений $t < 0$ в формулы вида (4), (3) (см. § 1, гл. 1). Тем самым было положено начало целенаправленному и регулярному изучению воздействия режимов с обострением на сплошные среды.

Свойства, характерные для автомодельных решений с разделяющимися переменными [20, 24, 28, 106, 107], в случае режимов с обострением выявили всю свою необычность [65—70, 112].

Сжималась конечная масса вещества, но без возникновения ударных волн. Через границы этой массы можно было осуществить подвод тепловой энергии в режиме с обострением, а тепло не распространялось по всей массе, оставаясь локализованным на определенном участке.

Аналогично работам [20, 24, 28, 130], но применительно к иной физической ситуации, сформулированы условия наличия в среде тепловых структур: участков массы, нагретых до температур заметно выше средней. Тепло не теряется этими участками в окружающую более холодную среду, а температура в них растет в режиме с обострением (2). Анализ автомодельных задач [66, 67, 69, 70] позволяет получить вполне определенные форму и размеры тепловых структур. При этом, в отличие от режимов, описанных в [20, 24, 28], локализация тепла не сопровождается охлаждением за счет расширения; тепловые структуры существуют не как результат определенного «баланса» между выделением тепла за счет каких-либо диссипативных

процессов и стоком тепловой энергии, затрачиваемой на расширение, а в присутствии только механизмов нагрева (тепловыделение и работа сжатия). В сплошной среде при наличии источников и стоков тепла могут существовать стационарные, либо эволюционирующие бесконечно долго температурные неоднородности [3, 11, 39, 56, 83, 84, 97, 102, 132]. Тепловые структуры в случае действия в среде только источников тепла сильно нестационарны, эволюционируют в режиме с обострением и существуют лишь конечное время: при начале процесса от любого конечного момента времени t_0 ($t_0 < t < t_f$, $t \rightarrow t_f$) решение имеет место лишь в промежутке $[t_0, t_f)$ с ограниченной мерой.

$$t_f - t_0 < +\infty.$$

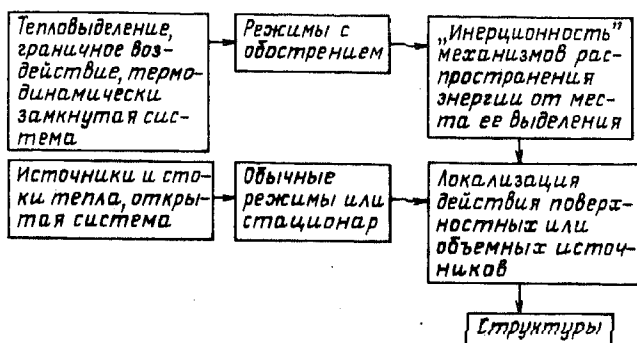
Необычность указанных фактов существенным образом стимулировала исследования действия режимов с обострением на теплопроводную среду без учета газодинамического движения. Казалось естественным, что более простая модель (краевая задача для уравнения теплопроводности или задача Коши для уравнения теплопроводности с источником тепла) позволяет изучить эффекты локализации и возникновения структур наиболее полным и строгим образом.

Эти исследования отталкивались от упомянутого выше решения [122] в разделяющихся переменных вида (4). Изучение граничного воздействия на полубесконечную среду ($0 < r < +\infty$) показало, что параметры в режиме с обострением на границе среды и коэффициента уравнения определяли тот участок массы, на который распространялось действие граничного режима. В рассмотрение включались режимы с обострением различного вида, в том числе и автомодельные, но не совпадающие с разделением переменных (4). Был выделен класс граничных режимов; в котором воздействие на среду было локализовано, указан класс режимов, в которых локализация отсутствовала [32, 73, 76, 77, 88, 90, 115, 118, 120], доказан ряд теорем о локализации для граничных режимов и коэффициентов уравнения достаточно общего вида и о локализации в задаче Коши для достаточно общего вида нелинейного уравнения теплопроводности с источником тепла [29—37, 57, 58, 74, 77, 92—98, 115, 117—120]. Физический смысл явления локализации тепла, связанный с существованием пространственных распределений температуры, обладающих свойством инерции [77], был выяснен при изучении задачи Коши для теплопроводной среды без источника.

В результате проведенных исследований понятие локализации было уточнено и усовершенствовано. Теперь оно могло применяться в гораздо более общей ситуации, чем в частных примерах работ [20, 24, 28] и [66—70]. С локализацией предлагается связывать такое действие поверхностного или объемного

источника, которое заключается в эффективном изменении состояния среды лишь в конечном ее участке.

Изучение в рамках описанных задач явления возникновения упорядоченных структур позволило предложить следующую схему их образования.



Сильная нестационарность (режим с обострением) играет в этой схеме ту же роль, что и «открытость» в термодинамическом смысле системы с обычными (существующими сколь угодно большое время) режимами.

Закономерно возникает необходимость вернуться, имея на вооружении разработанный понятийный аппарат, снова к системе уравнений газовой динамики (в том числе и с учетом ряда диссипативных процессов) и выявить класс режимов, приводящих к локализации, используя математические подходы, развитые для параболических уравнений.

Такая программа осуществлена применительно к задачам газовой динамики (гл. 1), где, в частности, определен класс локализованных граничных режимов и получены условия образования специфических газодинамических структур.

Начинает осуществляться программа исследования под этим углом зрения сжимаемых сред с учетом теплопроводности и других физических эффектов, для которых режимы с обострением в разделяющихся переменных (гл. 2) изучены сравнительно полным образом. Например, указаны достаточно широкие классы уравнений состояния среды, моделей процессов теплопроводности и тепловыделения в ней, допускающие решения вида (4) (гл. 1).

Установленные при изучении различных моделей сплошных сред свойства режимов с обострением важны для разнообразных приложений, что обуславливает необходимость их дальнейшего подробного исследования и математического обоснования.

ГРАНИЧНЫЕ РЕЖИМЫ С ОБОСТРЕНИЕМ
В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ§ 1. Эффекты локализации и образования структур
при сжатии газа в режиме с обострением

1.1. **Формулировка задачи, методический подход и терминология.** Естественная математическая формулировка задачи о граничных режимах с обострением в газовой динамике — определение течений газа, возникающих под действием поршня (границы вещества), величины на котором неограниченно нарастают за конечное время. В этом заключается отличие исследуемых течений от известных в газовой динамике режимов с обострением, порождаемых, например, геометрическими факторами (кумуляция) [16, 62], а также от течений, возбуждаемых поршнем, величины на котором изменяются в «обычном» режиме [124, 138, 40, 87, 86, 27].

Известен ряд решений задачи о поршне, сжимающем изоэнтропический политропный газ в режиме с обострением, обсуждавшихся в связи с поиском способов сверхсжатия газа для достижения экстремальных физических условий [137, 133]. В данных решениях «градиентной катастрофы» и образования ударных волн не происходит — энтропия газа не повышается при любых степенях сжатия. В силу этого они описывают оптимальный (по затратам энергии для достижения заданной плотности) процесс.

В [128] определена траектория плоского поршня, сжимающего первоначально однородный и покоящийся газ, обеспечивающая пересечение всех характеристик и поршня одновременно в одной точке (момент пересечения — момент обострения $t=t_f$). Давление на поршне изменяется по закону

$$p(0, t) = p^0 t_f^{2\gamma/(\gamma+1)} (t_f - t)^{-2\gamma/(\gamma+1)}, \quad 0 \leq t < t_f \quad (1)$$

(где p^0 — давление покоящегося газа, γ — показатель адиабаты), так что $p(0, t) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow t_f$. При $t \rightarrow t_f$ давление и скорость неограниченно нарастают — имеет место изоэнтропическое сверхсжатие конечной массы газа. Данное решение, в сущности — волна Римана с присоединенными к ней поршнем, с заданным в соответствии с (1) давлением.

Аналогичные центрированные волны изоэнтропического сверхсжатия газа в цилиндрической и сферической геометрии построены в [136, 80—82, 59, 60].

Изоэнтропическое сверхсжатие изучалось также с помощью построения решений уравнения газовой динамики в разделяющихся (временной и массовой) переменных [135]. Например, в [70] использовалось явное решение

$$p(x, t) = A(t_f - t)^{n_s} x^{2\gamma/(\gamma+1)}, \quad t < t_f, \quad (2)$$

где $x \geq 0$ — массовая координата, $n_s = -2\gamma(N+1)/[2 + (N+1) \times (\gamma-1)]$, $N=0, 1, 2$, — показатель симметрии, константа A определяется из краевых условий.

Описанные решения при $t \rightarrow t_f$, т. е. на асимптотической стадии, имеют один и тот же режим с обострением для давления на поршне

$$p(x_p, t) = p_0(t_f - t)^{n_s}, \quad t < t_f, \quad (3)$$

обеспечивающий изоэнтропическое сверхсжатие конечной массы газа. При фиксированном типе симметрии решения в характеристиках и в разделяющихся переменных отличаются лишь деталями краевых условий. В частности, закон для давления на поршне (1) совпадает с формулой (2) при $N=0$ и $x=x_p$, x_p — координата поршня.

Отметим, что подход, использующий разделение переменных, переносится на случай присутствия в среде большого числа разнообразных физических процессов (гл. 2). На его основе были найдены [65—70] безударные (оптимальные) режимы сверхсжатия для различных задач физики плазмы одновременно и независимо от известного проекта [137, 112]¹⁾.

В гл. 1 изучаются общие свойства граничных режимов с обострением в газовой динамике. Ставятся следующие вопросы: какова классификация течений, возникающих под действием поршня; существуют ли в рассматриваемых процессах «аналоги» эффектов локализации тепла, горения и образования структур (возникающих при развитии режимов с обострением в несжимаемых теплопроводных средах [119, 117]), и в каком смысле понимаются эти эффекты применительно к газовой динамике; реализуются ли более общие (неизоэнтропические) режимы безударного сверхсжатия газа и как зависит характер сжатия от распределения энтропии в веществе?

Поскольку выясняются принципиальные вопросы, то основное внимание уделено одномерным течениям идеального, совершенного политропного газа, возбуждаемых плоским (в некоторых случаях сферическим или цилиндрическим) поршнем. Давление (или скорость) на поршне растут в режиме с обострением.

Уравнения газовой динамики в отличие от, например, параболических уравнений, в общем случае не имеют завершеного математического обоснования [126, 128, 114]. Поэтому для выяснения поставленных вопросов используется полуэмвристический подход.

Его сущность состоит в следующем. Строятся и исследуются классы частных, например, инвариантных решений с обостре-

¹⁾ Не претендуя на полноту, отметим ряд работ, посвященных этой проблеме [24, 20, 23, 9, 59, 112, 113, 22, 4, 129].

нием. В дальнейшем они используются для определения пространственно-временных «границ» между классами общих течений. Фактически, предполагается, что изучаемые течения непрерывным образом зависят от краевых условий. Эта естественная гипотеза проверяется и подтверждается прямым численным моделированием соответствующих задач по методикам [111]. Такой подход позволяет получить достаточно полную картину качественных свойств граничных режимов с обострением в газовой динамике и их количественные характеристики.

В качестве иллюстрации методического подхода и используемой терминологии, рассмотрим следующую задачу. Для уравнения Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad A_0 = \text{Const} > 0, \quad \sigma > 0, \quad (4)$$

изучается первая краевая задача в $Q_T^+ = (t_0, T) \times R_+^1$ с условиями

$$u(t_0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad x \in R_+^1, \quad \sup u_0 < \infty, \quad (5)$$

$$u(t, 0) = u_1(t) \geq 0, \quad t_0 < t < T < \infty, \quad (6)$$

причем граничная функция изменяется в режиме с обострением $u_1(t) \rightarrow \infty, t \rightarrow T^-, t = T$ — момент обострения. (7)

Уравнение (4), в частности, описывает газодинамические течения типа простых волн (в этом случае здесь t — время, x — массовая лагранжева координата, $\sigma = (\gamma + 1)/2\gamma$, u — давление, $A_0 = (a_0^{-\gamma} \gamma)^{1/2}$, $(u/a_0)^{1/\gamma}$ — плотность, $(\gamma a_0^{-1/\gamma} u^{(\gamma+1)/\gamma})^{1/2}$ — лагранжева скорость звука) и часто используется при моделировании уравнений газовой динамики (отметим, что решения, соответствующие (1) и (2), являются простыми волнами). В то же время, для уравнения (4) (и более общих квазилинейных уравнений первого порядка) полностью доказана корректность соответствующих задач [114] (существование и единственность обобщенного решения, теоремы сравнения решений по краевым условиям и т. д.).

В газодинамической интерпретации задача (4) — (7) соответствует сжатию газа поршнем, давление на котором неограниченно нарастает при $t \rightarrow T^-$.

По аналогии с граничными режимами с обострением в задачах нелинейной теплопроводности [118, 77], введем следующее

определение. Будем говорить, что в задаче (4) — (7) имеет место локализация возмущений, если найдется такая постоянная $L < \infty$, что

$$u(t, x) \leq M = \text{const} < \infty, \quad x > L, \quad t_0 \leq t < T.$$

Минимально возможную величину L назовем *глубиной локализации* L^* .

Из теорем сравнения следует, что могут существовать лишь три возможности:

1) $L^* > 0$. Это означает, что $u(t, x) \rightarrow \infty$, $0 < x < L^*$, $t \rightarrow T^-$, т. е. решение неограниченно возрастает в области конечных размеров, оставаясь ограниченным при $x > L^*$ (*S-режим*, используется терминология, аналогичная [118, 77]).

2) $L^* = 0$. Решение обращается в бесконечность при $t \rightarrow T^-$ лишь в граничной точке $x = 0$ (*LS-режим*), существует предельная кривая, мажорирующая решение при всех $x > 0$, $t \leq T$.

3) При $t \rightarrow T^-$, $u(t, x) \rightarrow \infty$ для всех $x > 0$. В этом случае будем говорить, что локализация отсутствует (*HS-режим*).

Задача (4) — (7) в частном случае $u_1(t) = u_0(T-t)^n$, $n < 0$, и при соответствующих начальных данных имеет автомодельные решения, отвечающие *S*-, *LS*- и *HS*-режимам при $n = -1/\sigma$, $n > -1/\sigma$, $n < -1/\sigma$ соответственно (причем при $n \geq -1/\sigma$ решение непрерывно, а при $n < -1/\sigma$ — содержит разрыв). Анализ их свойств и теоремы сравнения дают следующую классификацию неограниченных обобщенных решений уравнения Хопфа (подробности содержатся в [8]):

1) Пусть в задаче (4) — (7) $u_1(t) \leq u_0(T-t)^{-1/\sigma}$, $t < T$. Тогда имеет место локализация, причем $L^* \leq A_0 u_0^\sigma$. Если же дополнительно известно, что $u_1(t) \geq \bar{u}_0(T-t)^{-1/\sigma}$, $t < T$, $\bar{u}_0 \leq u_0$, то $A_0 \bar{u}_0^\sigma \leq L^* \leq A_0 u_0^\sigma$ (реализуется *S*-режим).

2) Если $u_1(t) \leq u_0(T-t)^n$, $n > -1/\sigma$, $t < T$, то $L^* = 0$, $u(T^-, x) \leq O[x^{n/(1+n\sigma)}]$, $x > 0$ (имеет место *LS*-режим и существует предельная кривая).

3) Если $u_1(t) \geq u_0(T-t)^n$, $n < -1/\sigma$, $t < T$, то при $t \rightarrow T^-$, $u(t, x) \geq u_0(T-t)^n \rightarrow \infty$, т. е. локализация отсутствует — *HS*-режим (причем в решении с необходимостью формируется разрыв с неограниченной при $t \rightarrow T^-$ амплитудой).

В зависимости от скорости роста граничного условия («быстрые» и «медленные» законы (7)) в задаче (4) — (7) реализуются различные по своим свойствам режимы распространения возмущений, «границы» между ними и детальные оценки для решений [8] даются автомодельными решениями (аналогичные выводы получены для процесса теплопроводности [118, 31, 32, 77]).

Из теории размерности [126], групповых свойств дифференциальных уравнений [109, 78, 21] и других соображений [128, 41, 127] известно, что уравнения газовой динамики в массовых координатах в случае политропного газа могут допускать следующие частные решения:

$$1) u_i(x, t) = f_i(Dt - x),$$

$$2) u_i(x, t) = A_i t^{n_i} f_i(x/B_i t^m),$$

$$3) u_i(x, t) = A_i e^{n_i t} f_i(x/B_i e^{m_i t}),$$

$$4) u_i(x, t) = A_i e^{n_i x} f_i(B_i e^{m_i x}/t),$$

$$5) u_i(x, t) = \varphi_i(t) f_i(x).$$

Случаи 1—5 исчерпывают все известные частные решения уравнения газовой динамики.

Очевидно, что решения 1, 3 не могут описывать граничные режимы с обострением (поскольку необходимо, чтобы в точке поршня $x=0$ величины неограниченно росли при $t \rightarrow t_f < \infty$). Остаются случаи 2 — степенная автомодельность, 4 — экспоненциальная автомодельность и решения 5 в разделяющихся переменных. Случаи 2 и 4 подробно изучаются в § 1 (причем, как оказывается, основное внимание должно быть уделено степенной автомодельности), случай 5 — в § 2. Для решений 2, 4 в области непрерывного течения заранее известен (как и для решений 1, 3) вид интеграла адиабатичности — степенное и экспоненциальное распределение по координате x соответственно. Для решений 5 энтропийная функция произвольна.

После этих предварительных замечаний поставим основную задачу § 1.

Рассматриваются одномерные плоские течения идеального газа, описываемые системой уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial t} (p \rho^{-\gamma}) = 0, \quad (8)$$

где p , ρ , u — давление, плотность и скорость вещества, $x \geq 0$ — массовая координата.

Вещество сжимается расположенным в точке $x=0$ поршнем, давление на котором изменяется в режиме с обострением

$$p(0, t) \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow t_f, \quad t_0 \leq t < t_f < \infty. \quad (9)$$

Начальные параметры газа — ограниченные функции

$$|u(x, t_0)| \leq M_1, \quad p(x, t_0) \leq M_2, \quad 0 < M_3 \leq \rho(x, t_0) \leq M_4, \quad x \geq 0. \quad (10)$$

Аналогично предыдущему введем

О п р е д е л е н и е: В задаче (8)—(10) имеет место локализация, если при $t \rightarrow t_f$ величины обращаются в бесконечность лишь в ограниченной области (*области локализации*), т. е. либо в области конечных размеров — S -режим, либо в точке $x=0$ — LS -режим. Если же параметры газа при $t \rightarrow t_f$ неограниченно растут для всех $x > 0$, то локализация отсутствует (HS -режим, действие поршня со временем сказывается в любой точке среды).

Заметим, что, поскольку в S - и LS -режимах вне области локализации параметры конечны при всех $t_0 \leq t \leq t_f$, то область влияния граничного условия, в отличие от HS -режимов, равномерно ограничена по времени вплоть до момента $t = t_f$.

Локализация означает, что существует возможность неограниченно концентрировать энергию в конечных участках вещества, не затрагивая остальную ее часть. В п. п. 2, 3 определены условия существования или отсутствия локализации течений, описываемых задачей (8) — (10).

1.2. Автомоделные режимы сжатия с обострением. Первый шаг в изучении задачи (8) — (10) — построение и анализ широкого класса ее автомоделных решений [6, 7, 103, 52, 53], которые могут существовать при специальных краевых условиях.

Для степенной автомоделности давление на поршне — степенная функция времени

$$p(0, t) = p_0 (t_f - t)^n, \quad n < 0, \quad t_0 \leq t \leq t_f. \quad (11)$$

Газ в начальном состоянии — холодный и покоящийся —

$$p(x, t_0) = u(x, t_0) = 0, \quad x \geq 0. \quad (12)$$

Вся энергия, содержащаяся в веществе при $t > t_0$, сообщается ему поршнем, что удобно для целей данного рассмотрения.

В области непрерывности течения интеграл адиабатичности имеет вид

$$p(x, t) = a_0 x^\delta \rho^\nu(x, t), \quad a_0 > 0, \quad (13)$$

где a_0, δ — параметры, характеризующие распределение энтропии.

По теории размерности [126] параметры p_0, a_0 полностью определяют автомоделность. Поэтому необходимо исключить «лишние» размерные параметры из условий (11), (12), т. е. положить «начало» сжатия $t_0 = -\infty$ и рассматривать процесс при $-\infty \leq t < t_f$.

Первая граница пришедшего в движение газа (фронт волны) — граница с невозмущенным (см. (12)) веществом, на которой выполнено

$$p(x_\Phi^+(t), t) = u(x_\Phi^+(t), t) = 0, \quad t < t_f. \quad (14)$$

Здесь $x_\Phi(t) \leq \infty$ — координата фронта, причем $p(x^-(t), t) = p(x^+(t), t)$, $u(x^-(t), t) = u(x^+(t), t)$ для непрерывных течений. Если же течение разрывно и в точке $x_\Phi(t)$ находится ударная волна, то величины справа и слева подчиняются условиям Гюгонно (в этом случае справа от разрыва плотность газа для простоты считается постоянной $\rho(x, t) = \rho^0$, $x > x_\Phi(t)$, $t < t_f$).

Решение задачи (11) — (14) представляется в виде

$$\begin{aligned} p(x, t) &= p_0 (t_f - t)^n \pi(\xi), & \rho(x, t) &= \rho_0 (t_f - t)^k g(\xi), \\ u(x, t) &= u_0 (t_f - t)^l v(\xi), & k &= ((2 - \delta)n - 2\delta)/(2\gamma + \delta), \\ l &= ((\gamma - 1 + \delta)n + \delta)/(2\gamma + \delta), & u_0 &= (p_0^{\gamma-1+\delta} a_0)^{1/(2\gamma+\delta)}, \\ & & \rho_0 &= (p_0^{2-\delta} a_0^{-2})^{1/(2\gamma+\delta)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $\pi(\xi)$, $g(\xi)$, $v(\xi)$ — безразмерные функции автомодельной координаты

$$\xi = x/[x_0(t_f - t)^m], \quad m = \frac{(\gamma + 1)n + 2\gamma}{2\gamma + \delta}, \quad x_0 = (p_0^{\gamma+1} a_0^{-1})^{1/(2\gamma + \delta)}. \quad (16)$$

Задача (11) — (14) переходит в следующую задачу для автомодельных функций

$$m\xi g' + g^2 v' = kg, \quad \delta\xi^\delta g^{\gamma-1} g' + m\xi v' = lv - \delta g^\gamma \xi^{\delta-1}, \quad \pi = \xi^\delta g^\gamma, \quad (17)$$

$$\pi(0) = 1, \quad \pi(\xi_\Phi) = v(\xi_\Phi) = 0, \quad \xi_\Phi \ll \infty,$$

причем $v(0) < \infty$, что обеспечивает ограниченность скорости поршня при всех $-\infty \leq t < t_f$.

Система (17) инварианта относительно преобразования растяжения и заменой переменных

$$\eta = \ln \xi, \quad g(\xi) = \xi^{\frac{2-\delta}{\gamma+1}} G(\eta), \quad v(\xi) = \xi^{\frac{\gamma-1+\delta}{\gamma+1}} V(\eta), \quad \pi(\xi) = \xi^{\frac{2\gamma+\delta}{\gamma+1}} P(\eta)$$

понижается до уравнения первого порядка

$$dV/dG = \Delta_V/\Delta_G,$$

$$P = G^\gamma, \quad dV/d\eta = \Delta_V/\Delta, \quad dG/d\eta = \Delta_G, \quad \Delta = m^2 - \gamma G^{\gamma+1}, \quad (18)$$

$$\Delta_V = \frac{\gamma-1+\delta}{\gamma+1} \gamma V G^{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} mV,$$

$$\Delta_G = \frac{2\gamma+\delta}{\gamma+1} G^{\gamma+2} - \frac{2m}{\gamma+1} G - lVG^2.$$

Уравнение (18) с соответствующими краевыми условиями анализируется стандартными методиками [131], с помощью которых устанавливается существование решений и их единственность.

Свойства течений зависят от соотношения между показателем адиабаты и показателем скорости роста давления на поршне (параметр n):

1) S -режим ($n = n_S = -2\gamma/(\gamma + 1)$), $m = 0$, что соответствует (см. (16)) разделению переменных x и t) [6,52]. Решение существует при $\delta > -\gamma$ (при $\delta \leq -\gamma$ из-за особенности энтропии условия на поршне не выполняются), оно единственно, непрерывно и имеет неподвижный конечный фронт $x_\Phi = x_\Phi(\delta, \gamma, a_0, p_0)$. Не изменяется со временем и *эффективный размер* волны сжатия (*полуширина*), т. е. координата точки, в которой $p(x_{\Phi}(t), t) = \frac{1}{2} p(0, t)$.

Течение реализуется в виде *остановившейся волны сжатия*, локализованной в области $x \leq x_\Phi$, где параметры газа неограниченно растут при $t \rightarrow t_f$ (рис. 1). При $x > x_\Phi$ расположен неподвижный холодный газ (при $x > x_\Phi$ решение продолжается стационарным решением системы (8):

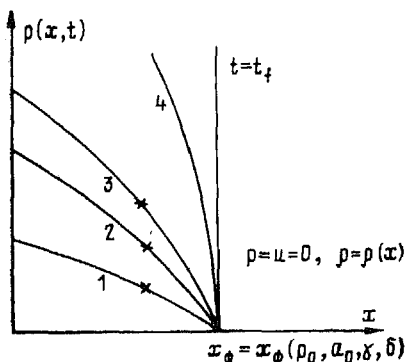


Рис. 1. Остановившаяся волна сжатия. Крестиками отмечена полуширина, $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_f$.

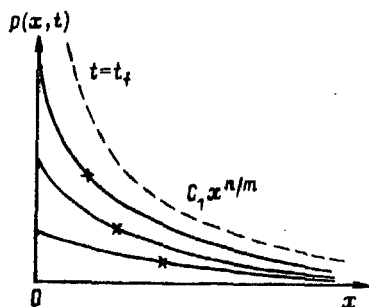


Рис. 2. Волна сжатия с сокращающимися эффективными размерами. Пунктирной линией выделена предельная кривая, $t_1 < t_2 < t_3 < t_f$.

$p(x, t) = u(x, t) = 0$, $\rho(x, t) = \rho(x)$; $x > x_\phi$, $t < t_f$, действие поршня на который не сказывается в течение всего процесса сжатия. Примером служит явное решение для изоэнтропического ($\delta = 0$, простая волна) случая

$$p(x, t) = \begin{cases} p_0 (t_f - t)^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}} (1 - x/x_\phi)^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}, & 0 \leq x \leq x_\phi \\ 0, & x > x_\phi = (\gamma p_0^{\gamma+1} a_0^{-1})^{1/2\gamma}. \end{cases} \quad (19)$$

2) *LS*-режим ($n > n_s$, $m > 0$ [6, 103, 104, 53]). Решение существует при $\delta > -\gamma$, единственно и непрерывно при всех $x \geq 0$, $t < t_f$. Фронт волны сжатия находится в точке $x_\phi(t) = \infty$, $t < t_f$, что согласуется с (16) (при $x_\phi(t) < \infty$ возмущенная область сокращалась бы с течением времени).

Реализуется волна сжатия с сокращающимися эффективными размерами

$$x_{\phi.}(t) = \xi_{\phi.} \cdot x_0 (t_f - t)^m \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_f, \quad (20)$$

где $\xi_{\phi.} = \xi_{\phi.}(n, \gamma, \delta)$ такова, что $\pi(\xi_{\phi.}) = 1/2$. По аналогичному закону сокращается координата любой выделенной точки, в частности, «звуковой точки», в которой массовая скорость звука равна скорости распространения фиксированного автомобильного состояния. Между поршнем (фронтом) и «звуковой точкой» течение «дозвуковое» («сверхзвуковое») соответственно (в предыдущем случае «звуковая точка» расположена на фронте волны). Энергия, сообщаемая газу, концентрируется в уменьшающейся области вблизи границы. Локализация в *LS*-режиме означает (см. определение на стр. 14), что существуют предельные кривые, равномерно ограничивающие при $t \rightarrow t_f$ рост газодинамических функций для всех $x > 0$ (рис. 2). Например, для

давления справедливо

$$p(x, t) = C_1 x^{\frac{n}{m}} + C_2 x^{\frac{n-1}{m}} (t_f - t) + \dots, \quad t \rightarrow t_f, \quad x > 0, \quad (21)$$

$$C_1 = C_1(n, \gamma, \delta) > 0, \quad C_2 = C_2(n, \gamma, \delta) < 0.$$

Любое состояние с фиксированными параметрами не проникает далее определенной массы газа. Давление вещества и другие величины при $t \rightarrow t_f$ обращаются в бесконечность лишь на поршне.

К моменту времени $t_1 \in (-\infty, t_f)$ в газе содержится при $n < n_* = -2(\gamma + \delta)/(3\gamma - 1 + 2\delta)$ — конечная, а при $n \geq n_*$ — бесконечная энергия, которая сосредоточена в окрестности фронта волны. После момента t_1 при $t \rightarrow t_f$ в газ поступает либо конечная ($n > n_*$), либо бесконечная ($n \leq n_*$) энергия, концентрирующаяся у границы. В изоэнтропическом случае ($\delta = 0$, простая волна) существует аналитическое решение

$$\xi = \pi^{\sigma+1/n} - \pi^\sigma, \quad \sigma = (\gamma + 1)/2\gamma.$$

З а м е ч а н и е. В случаях 1), 2) решения непрерывны при всех $x \leq x_\Phi$, $t < t_f$. Отсюда и из (12), (13) следует, что плотность сжимаемого газа $\rho(x, t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow t_0 = -\infty$, т. е. радиус поршня $r(0, t) \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow t_0$. В этом заключается одно из методических отличий данной постановки от известных автомодельных задач газовой динамики, в начальных данных которых содержится символ плотности [126, 62]. Отметим также, что режимы 1), 2) «обратимы» во времени. При смене знака скорости они описывают автомодельное расширение (конечной или бесконечной) массы газа, выталкивающей поршень. Пространственные профили величин при этом воспроизводятся в «обратном» по отношению к процессам сжатия порядке. «Обращение времени» в автомодельных режимах сжатия при учете диссипативных процессов рассматривается в главе 2.

3) *HS*-режим ($n < n_s$, $m < 0$) [105]. Решение существует при $n < -2$, $\delta = 2/(n+2)$, единственно и имеет конечный фронт, на котором находится ударная волна. Координата ударной волны и полуширина неограниченно растут:

$$x_\Phi(t) = \xi_\Phi \cdot x_0 \cdot (t_f - t)^m \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow t_f;$$

$$x_{\text{ЭФ}}(t) = \xi_{\text{ЭФ}} \cdot x_0 \cdot (t_f - t)^m \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow t_f.$$

Движение охватывает всю массу лежащего перед поршнем газа (рис. 3). В любой точке $x^* < \infty$ параметры стремятся к бесконечности при $t \rightarrow t_f$. Например (см. (15), (16)),

$$\rho(x^*, t) = \rho_0(t_f - t)^n \pi(\xi(x^*, t)) \rightarrow \rho_0(t_f - t)^n \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow t_f.$$

Тем самым, при $n < n_s$ локализация отсутствует. В этом смысле течение аналогично режимам сжатия газа поршнем без обострения [124, 138, 40, 87, 85]. Однако в *HS*-режиме движение ох-

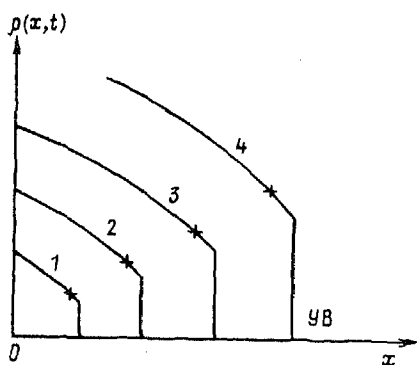


Рис. 3. Динамика давления в авто-
модельном HS-режиме, $t_1 < t_2 < t_3 <$
 $< t_4 < t_f$

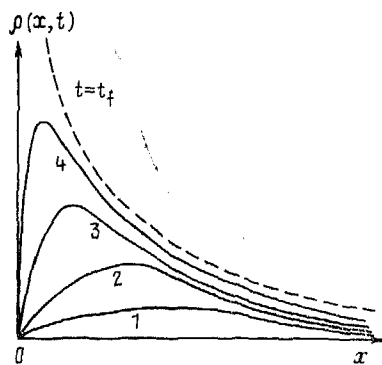


Рис. 4. Автомоделная структура
плотности LS-режима. $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 <$
 $< t_f$

ватывает всю среду не при $t \rightarrow \infty$, а за конечное время. Течение при $n < n_S$ — режим сверхбыстрого сжатия вещества.

З а м е ч а н и е. Для $n < n_S$ близкие по свойствам течения реализуются и в том случае, если плотность газа перед волной переменна: $\rho(x, t) = \rho^0 x^\alpha, x > x \Phi(t), t < t_f$ [105].

Принадлежность автомоделных течений к S-, LS- или HS-режиму определяется параметрами n , γ и не зависит от распределения энтропии в газе (параметр δ), которое существенным образом влияет на пространственное поведение таких важных величин, как плотность и температура.

Сжатие (нагрев) некоторого участка вещества зависят (см. (13)) от его энтропии и давления в нем. Поэтому даже при монотонном изменении давления (в режимах 1—3 давление и скорость монотонно уменьшаются от поршня к фронту) отдельные участки вещества могут сжиматься (нагреваться) сильнее, чем соседние. При $n \geq n_S$ в волнах сжатия существуют (единственные) экстремумы плотности ($\delta < 0$) или температуры ($\delta > 0$). В изоэнтропическом случае все величины в волне сжатия монотонны.

В силу свойств S- и LS-режимов экстремумы локализованы — в S-режиме они связаны с фиксированными частицами газа (неподвижны по массе) и имеют постоянные характерные размеры, в LS-режиме их координата и полуширина сокращаются по закону, аналогичному (20) (рис. 4).

Локализованные экстремумы величин представляют собой структуры (в данном случае, газодинамические структуры) — устойчивые неоднородности, имеющие пространственно-временную упорядоченность и способствующие усложнению организации процесса [93, 97, 11, 132, 39] (в данном случае, процесса сжатия). Свойства газодинамических структур (постоянство или сокращение размеров) и причина образования (эффект лока-

лизации) объединяют их с нестационарными тепловыми структурами [119, 117, 58]. В § 2 рассматриваются сложные газодинамические структуры.

Установленные свойства S - и LS -режимов (безударное сжатие, локализация, образование структур, «обратимость») принципиально отличают их от режимов сжатия газа без обострения [87, 86, 40, 41, 126].

Численный расчет задачи (11)–(14) показывает, что автомодельные решения устойчиво воспроизводятся при росте давления на несколько порядков величины, несмотря на некоторые искажения краевых условий (в численном расчете невозможно точно воспроизвести имеющиеся в точке $x=0$ особенности плотности и температуры).

Замечание. Если вместо (11) на поршне задано изменение скорости в режиме с обострением $u(0, t) = u_0(t_f - t)^l$, $l < 0$, то обе задачи эквивалентны (их решения получаются друг из друга простой перенормировкой [104]). При $l = l_s = -\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$, $l > l_s$, $l < l_s$ реализуются S -, LS - и HS -режимы сжатия соответственно. Отметим, что анализ экспоненциальной автомодельности (решения 4 в таблице п. 1) не дает существенно новой информации о свойствах граничных режимов с обострением.

1.3. Классификация граничных режимов с обострением и способы возбуждения структур. Опираясь на результаты автомодельного анализа и численное моделирование, дадим классификацию режимов сжатия в задаче (8)–(10) в общем (неавтомодельном) случае [50]. Вначале рассмотрим наиболее типичный класс начальных данных — однородный покоящийся газ ($t_0 = 0$ без ограничения общности)

$$p(x, 0) = p^0 > 0, \quad \rho(x, 0) = \rho^0 = (p^0 a_0^{-1})^{1/\gamma}, \quad u(x, 0) = 0, \quad x > 0. \quad (22)$$

1) Действие граничных законов вида

$$p(0, t) \leq p_0(t_f - t)^{n_s}, \quad n_s = -2\gamma/(\gamma + 1), \quad t < t_f, \quad (23)$$

т. е. мажорируемых законом автомодельного S -режима, приводит к локализации газодинамического движения на конечной массе газа. Размер области локализации x_Φ и давление в ней оцениваются сверху с помощью решения (19) для изэнтропического случая, константа a_0 в котором определяется либо из начальных данных (непрерывные течения), либо оценивается через параметры прошедшей по газу ударной волны (см. п. 4).

Если граничный закон автомоделен (знак равенства в (23)), то имеет место «выход» на автомодельный S -режим сжатия, который происходит следующим образом.

Пусть $p(0, 0) = p(x, 0) = p^0$, т. е. начальное давление на поршне равно давлению газа (в этом случае ударной волны не возникает). Вначале полуширина волны сжатия увеличивает-

ся. Затем, при приближении фронта волны сжатия к границе области локализации $x = x_\Phi$ (см. (19)), полуширина стабилизируется. С этого момента течение хорошо описывается решением (19), фронт волны при всех $t < t_f$ не проникает далее глубины локализации.

Если же $p(0, 0) > p(x, 0) = p^0$, т. е. начальное давление на поршне больше давления среды, то у поршня происходит распад разрыва и по газу проходит ударная волна, изменяющая его параметры. Тем не менее, при достаточном росте давления на поршне, воспроизводятся основные свойства автомодельного S-режима. Ударная волна в течение всего процесса движется с мало изменяющейся скоростью (из-за эффекта локализации контакт между поршнем и разрывом практически теряется при удалении ударной волны от поршня). За ее фронтом сжатие происходит адиабатически (без возникновения новых разрывов) и «выходит» на асимптотики автомодельного S-режима.

При $t \rightarrow t_f$ ударная волна фактически «вырождается» в слабый разрыв, поскольку (почти постоянное) давление за ней все время уменьшается по сравнению с давлением, создаваемым поршнем. Ее наличие изменяет лишь глубину локализации (см. п. 4). Пример численного расчета S-режима при наличии скачка давления на поршне приведен на рис. 5.

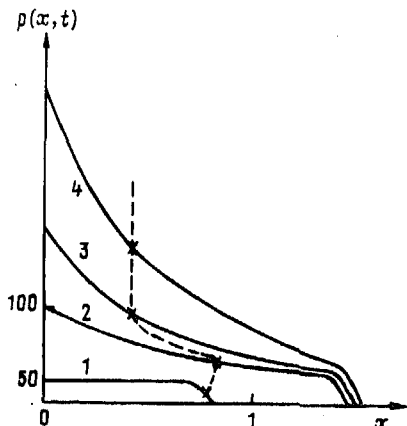


Рис. 5. «Выход» на автомодельный S-режим при наличии ударной волны. Пунктирной линией отмечена траектория полуширины. Параметры: $\gamma = 5/3$, $p^0 = a_0 = 1$, $p_0/p^0 = 50$, $t_0 = 0$, $t_f = 1$, $t_1 = 0.63$, $t_2 = 0.92$, $t_3 = 0.991$, $t_4 = 0.998$

В случае когда закон (23) не является в точности автомодельным, но близок к нему (например, $p_{0_1}(t_f - t)^{nS} \leq p(0, t) \leq p_{0_2}(t_f - t)^{nS}$), то в среднем реализуется S-режим сжатия

со всеми его свойствами. Решение ограничено сверху и снизу соответствующими автомодельными решениями, а для глубины локализации справедлива оценка $x_{\Phi_1} \leq x_{\Phi} \leq x_{\Phi_2}$ (численный пример приведен на рис. 6).

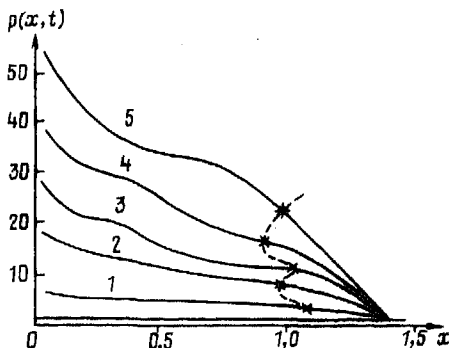


Рис. 6. Влияние отклонений граничного закона на установление автомодельного S -режима. Параметры: $\gamma = 5/3$, $p(0, t) = (1 + 0.2 \sin(1/(t_f - t))) \times (t_f - t)^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}$, $a_0 = 1$, $t_f = 1$, $t_0 = 0$, $t_1 = 0.8$, $t_2 = 0.87$, $t_3 = 0.91$, $t_4 = 0.98$, $t_5 = 0.991$

2) Если для (23) выполняется

$$p(0, t) \leq p_0 (t_f - t)^n, \quad n_S < n < 0, \quad t < t_f, \quad (24)$$

т. е. давление на поршне нарастает не быстрее, чем в случае автомодельного LS -режима, то предыдущие выводы существенно уточняются — реализуется LS -режим сжатия.

На начальной стадии полуширина волны сжатия увеличивается. При подходе ее фронта к глубине локализации полуширина останавливается, а затем начинает сокращаться (в течение всего процесса движение не проникает за глубину локализации).

Глубина локализации в случае (24) определяется из того факта, что для любого закона (24) найдется мажорирующий его граничный закон, отвечающий автомодельному S -режиму, т. е. $p(0, t) \leq p_{0S} \cdot (t_f - t)^{n_S}$, $t < t_f$. Минимальная константа p_{0S} , очевидно, находится из условия

$$p(0, t=0) \leq p_0 t_f^n = p_{0S} t_f^{n_S}.$$

Решение в случае (24) мажорируется решением (19), в котором константа $p_0 = p_{0S}$ и для глубины локализации справедлива оценка (с учетом сделанных выше замечаний о константе a_0)

$$x_{\Phi} \leq (\gamma p_0^{\gamma+1} a_0^{-1})^{1/2} \gamma t_f^{\frac{2\gamma}{\gamma+1} + n}.$$

В случае 2) рост газодинамических параметров в среде ограничен предельными кривыми автомодельного *LS*-режима. Отметим, что характерный для автомодельного решения «бесконечный» фронт волны, естественно, не реализуется, поскольку процесс начат в момент $t_0 > -\infty$.

Если закон (24) — степенной, то на развитой стадии процесса течение «выходит» на автомодельные асимптотики (за исключением окрестности фронта волны). Пример расчета приведен на рис. 7 (как и в предыдущем случае, наличие ударной волны принципиально не сказывается на свойствах течения).

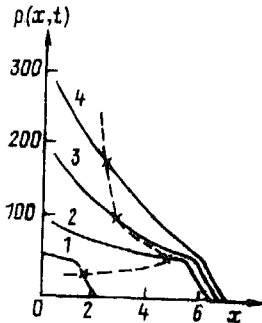


Рис. 7

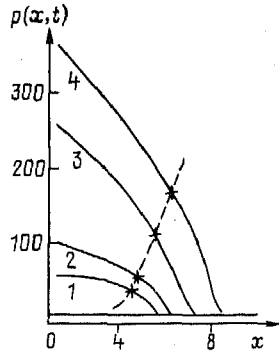


Рис. 8

Рис. 7. Установление автомодельного *LS*-режима. Параметры: $\gamma=5/3$, $n=-0.5$, $p^0=a_0=1$, $p_0=50$, $t_f=1$, $t_0=0$, $t_1=0.125$, $t_2=0.75$, $t_3=0.95$, $t_4=0.975$

Рис. 8. *HS*-режим сжатия. Параметры: $\gamma=5/3$, $p(0,t)=p_0 \exp(1/(t_f-t)-1)$, $p_0=p^0=a_0=1$, $t_f=1$, $t_0=0$, $t_1=0.792$, $t_2=0.828$, $t_3=0.846$, $t_4=0.858$

3) В случае, когда скорость нарастания давления на поршне не меньше, чем для некоторого автомодельного *HS*-режима

$$p(0, t) \geq p_0 (t_f - t)^n, \quad n < n_s, \quad t < t_f, \quad (25)$$

сжатие происходит в *HS*-режиме (локализация отсутствует). Движение распространяется на всю массу газа, лежащую перед поршнем. Все параметры при $t \rightarrow t_f$ неограниченно растут в любой точке среды. Полуширина и фронт волны уходят на бесконечность (на фронте с необходимостью формируется ударная волна с неограниченной при $t \rightarrow t_f$ амплитудой).

Пример расчета для экспоненциального (неавтомодельного) закона обострения на поршне приведен на рис. 8. Если граничный закон — степенной, то, как и в предыдущих случаях, в течении устанавливаются автомодельные закономерности.

Таким образом, автомодельные решения п. 2 дают возможность провести классификацию граничных режимов с обострением в однопараметрическом семействе функций. То обстоятельство, что начальные данные (22) соответствуют однородно-

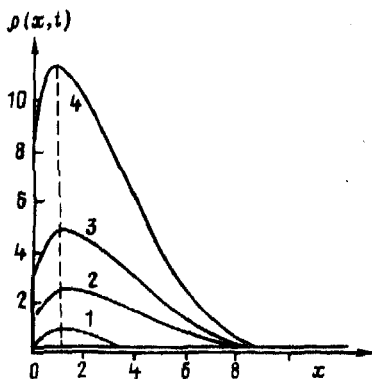


Рис. 9

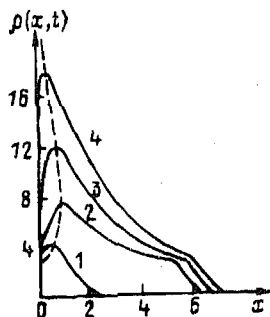


Рис. 10

Рис. 9. Возбуждение структуры плотности в S -режиме. Параметры: $\gamma=5/3$, $a_0=p^0=1$, $p_0/p^0=50$, $t_f=1$, $t_0=0$, $t_1=0.61$, $t_2=0.915$, $t_3=0.974$, $t_4=0.992$.

Рис. 10. Возбуждение структуры плотности в LS -режиме. Траектория максимума отмечена пунктиром. Параметры те же, что на рис. 7

му газу, не имеет принципиального значения. Из физических соображений, подтверждаемых расчетами, следует, что результаты останутся в силе и при произвольных начальных данных (10).

Действительно, например, в S -режиме энергия, сообщаемая газу поршнем, неограниченно возрастает при $t \rightarrow t_f$, начальные условия на развитой стадии «забываются», характер процесса определяется лишь видом граничного закона. То же самое справедливо для LS - и HS -режимов.

В то же время, начальное состояние газа влияет, например, на распределение энтропии, устанавливающееся в нем, которое, в свою очередь, определяет глубину локализации и возможность образования газодинамических структур.

Последние могут быть заданы сразу в начальных условиях (в соответствии с автомоделными решениями), что заметно сужает класс рассматриваемых течений. Лишенный указанного недостатка прием «возбуждения» структур (в том числе при однородных начальных данных и монотонном режиме на границе) связан с созданием на начальной стадии сжатия неоднородного распределения энтропии.

На рис. 9 приведен расчет, иллюстрирующий возбуждение структуры плотности S -режима. Начальные данные — однородный газ, граничный закон соответствует автомоделному S -режиму. Неизозэнтропичность создается за счет рассогласования начального давления на поршне и давления в газе ($p(0,0) = 50 \cdot p(x,0)$). В результате от поршня отходит ударная волна,двигающаяся с переменной (хотя и несильно изменяющейся) скоростью, создающая распределение энтропии, близкое к (13)

с $\delta \approx -0,8 < 0$. В дальнейшем образуется и поддерживается максимум плотности с характерными свойствами структуры S -режима — ее размер постоянен, максимум связан с фиксированной массой газа. Аналогично возбуждается структура плотности (рис. 10) в LS -режиме (граничный закон автомоделен), ее максимум со временем приближается к поршню. На рис. 11

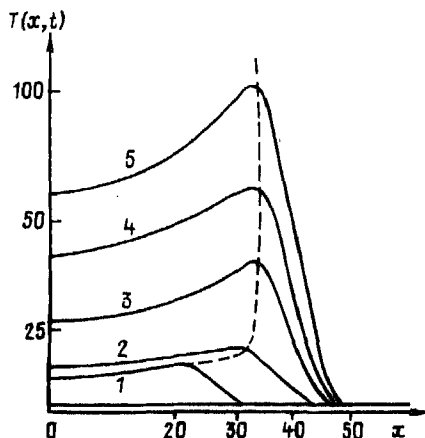


Рис. 11. Образование структуры температуры в S -режиме. Параметры: $\gamma = 5/3$, $p^0 = a_0 = 1$, $p(0, t) = \begin{cases} (1-t)^{-3}, & 0 < t < t_k, \\ (1-t)^{n_S}, & n_S = -\frac{2\gamma}{\gamma+1}, t_k < t < t_f, \end{cases} t_0 = 0,$
 $t_f = 1$, $t_k = 0.7$, $t_1 = 0.6$, $t_2 = 0.938$, $t_3 = 0.987$, $t_4 = 0.9947$, $t_5 = 0.9979$

приведен пример образования структуры температуры. В отличие от предыдущего, ударная волна создается за счет того, что граничный закон на начальной стадии соответствует HS -режиму (а в дальнейшем — S -режиму).

Замечание. Если на поршне задано изменение скорости в режиме с обострением, то полученная классификация остается в силе (случаям 1), 2), 3) отвечают неравенства

$$u(0, t) \leq u_0(t_f - t)^{l_S}, \quad l_S = -\frac{\gamma-1}{\gamma+1};$$

$$u(0, t) \leq u_0(t_f - t)^l, \quad l > l_S;$$

$$u(0, t) \geq u_0(t_f - t)^l, \quad l < l_S, \quad t < t_f$$

соответственно).

1.4. Количественные условия проявления эффекта локализации. Для выяснения конкретных количественных условий проявления эффекта локализации рассмотрим действие степенных режимов (11) при $n \geq n_S$ на однородный покоящийся газ (22) [50].

Вводя величины

$$\bar{t} = t/t_f, \quad \bar{x} = x/x_0, \quad x_0 = (t_f (\rho_0 t_f^n)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} a_0^{1/\gamma})^{1/2}, \quad (26)$$

$\bar{p} = p/(p_0 t_f^n)$, $\bar{\rho} = \rho/(\rho_0 t_f^n a_0)^{1/\gamma}$, $\bar{u} = u/((\rho_0 t_f^n)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} a_0^{1/\gamma})^{1/2}$,
запишем систему (8) и условия (11), (22) в безразмерном виде

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \right) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{t}} (\bar{p}/\bar{\rho}^\gamma) = 0, \\ \bar{p}(0, \bar{t}) = (1 - \bar{t})^n, \quad 0 \leq \bar{t} < 1, \quad (27)$$

$$\bar{p}(\bar{x}, 0) = p^0/(p_0 t_f^n) = 1/\bar{P}, \quad \bar{\rho}^0 (\bar{\rho}^0)^{-\gamma} = 1, \quad \bar{u}(\bar{x}, 0) = 0, \quad \bar{x} > 0.$$

Тем самым, решение исходной задачи зависит от трех безразмерных параметров n , γ , \bar{P} (\bar{P} — отношение давления на поршне к давлению газа в начальный момент).

Основной интерес представляют безразмерные величины $R_1 = \bar{t}_{\text{лок.}} = 1 - \bar{t}_{\text{уст.}}$ и $R_2 = \bar{p}(0, \bar{t}_{\text{уст.}})/\bar{p}(0, 0) = R_1^n$. Величина $\bar{t}_{\text{уст.}}$ — момент установления S - или LS -режима, в течение времени $\bar{t}_{\text{лок.}}$ «проявляется» эффект локализации (размер волны сжатия составляет не менее 9/10 от глубины локализации, ее полуширина постоянна или сокращается). Величина R_2 показывает, во сколько раз должно вырасти давление на поршне по сравнению с первоначальным для проявления эффекта локализации.

Запись (27) и соотношения (26) показывают, что условия проявления локализации зависят от безразмерных величин. Поэтому изучаемые эффекты можно исследовать в различных диапазонах времен, давлений, сжимаемых масс, выбирая наиболее удобные масштабы. В частности, изменяя полное время процесса сжатия, можно, в принципе, получить любую величину времени локализации $t_{\text{лок.}} = \bar{t}_{\text{лок.}} \cdot t_f$.

Основным же безразмерным критерием проявления эффекта локализации является величина $R_2 = R_2(n, \gamma, \bar{P})$, т. е. относительный рост давления на поршне. Расчеты, проведенные для широкого диапазона параметров n , γ , \bar{P} , показывают, что величина $R_2(n, \gamma, \bar{P}) = 10 \div 50$, а $\bar{t}_{\text{лок.}}$ составляет до 8% от всего времени процесса.

Численное моделирование позволяет также проверить точность теоретической оценки влияния ударной волны, возникающей в случае $\bar{P} > 1$ из-за рассогласования начального давления на поршне и давления газа (напомним, что от ее амплитуды зависит размер области локализации). Как показывают численные расчеты, интенсивность ударной волны слабо изменяется в процессе сжатия (см. рис. 5, 7, 10) и приблизительно равна \bar{P} .

Следовательно, ударная волна оставляет за собой однородный фон «нового» давления, плотности и энтропии (вычисляемых по начальным данным и величине \bar{P}). Если пренебречь скоростью возникающего за ударной волной движения, то мы приходим к исходной задаче с начальным однородным покоящимся газом при $\bar{P}=1$ (без рассогласования и возникновения ударной волны). Тем самым, для оценок можно воспользоваться изэнтропическим решением (19), взяв в нем вместо a_0 величину

$$a_1 = a_0 \bar{P} \left[\frac{(\gamma+1) - (\gamma-1)\bar{P}}{(\gamma+1)\bar{P} + (\gamma-1)} \right]^\gamma,$$

и определить глубину локализации

$$x_{\Phi_1} = x_{\Phi_0} \left[\frac{\bar{P}(\gamma+1)\bar{P} - (\gamma-1)}{(\gamma+1) - (\gamma-1)\bar{P}} \right]^{1/2},$$

Таблица 1

$\gamma \backslash \bar{P}$	1	25	50	100
1,4	$\frac{0,037}{46,1}$	$\frac{0,031}{48,4}$	$\frac{0,025}{53,4}$	$\frac{0,02}{54,1}$
1,66	$\frac{0,062}{32,2}$	$\frac{0,052}{36,5}$	$\frac{0,032}{48,2}$	$\frac{0,029}{51,6}$
2,0	$\frac{0,089}{25,1}$	$\frac{0,079}{26,9}$	$\frac{0,057}{29,3}$	$\frac{0,056}{30,7}$

Таблица 2

$\gamma \backslash \bar{P}$	1	25	50	100
1,4	$\frac{1,18}{1,21}$	$\frac{14,49}{9,8}$	$\frac{20,4}{13,6}$	$\frac{28,98}{18,6}$
1,66	$\frac{1,29}{1,38}$	$\frac{13,00}{8,4}$	$\frac{18,3}{12,0}$	$\frac{25,8}{17,0}$
2,0	$\frac{1,41}{1,6}$	$\frac{12,25}{8,2}$	$\frac{17,32}{11,6}$	$\frac{24,94}{16,1}$

что в приближении сильной волны дает

$$x_{\Phi_1} = x_{\Phi_0} \left(\bar{P} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right)^{1/2}. \quad (28)$$

В таблице 1 приведены значения критериев R_1 (верхняя строка) и R_2 (нижняя строка) для S -режима при различных γ , \bar{P} , в таблице 2 — размеры области локализации, полученные в расчете (верхняя строка) и по формуле (28) (нижняя строка), которая дает удовлетворительную мажорантную оценку для глубины локализации.

§ 2. Теория адиабатического сжатия газа при произвольном распределении энтропии

2.1. Постановка основных задач. Как следует из полученной в § 1 классификации граничных режимов с обострением, принадлежность течения к S -, LS - или HS -режиму определяется соотношением между скоростью изменения давления на поршне и показателем адиабаты и не зависит от того, как распределена энтропия в веществе. Распределение энтропии существенно влияет на пространственные характеристики течения (неизоэнтропичность приводит к возникновению структур плотности или температуры в волнах сжатия).

Исключительную возможность детально исследовать влияние распределения энтропии на изучаемые эффекты [47, 48] дают решения уравнений газовой динамики в разделяющихся (массовой и временной) переменных (случай 5, стр. 14). Отвечающая им энтропийная функция произвольна, в то время как для остальных классов частных решений уравнений газовой динамики интеграл адиабатичности имеет специальный вид. Напомним, что временные характеристики решений в разделяющихся переменных соответствуют граничному S -режиму, «разделяющему» различные по своим свойствам LS - и HS -режимы сжатия.

Пусть для одномерных уравнений газовой динамики

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial (r^N u)}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -r^N \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial r}{\partial t} = u, \quad \frac{\partial (p \rho^{-\gamma})}{\partial t} = 0, \quad (29)$$

где r — эйлерова координата, $N=0, 1, 2$ — индекс геометрии, общее решение последнего уравнения (интеграл адиабатичности) записано в виде

$$p \rho^{-\gamma} = \Phi^{\gamma}(x). \quad (30)$$

Энтропийная функция (30) — произвольная суммируемая функция с конечным числом разрывов, отвечающих контактному разрывам — напомним, что исследуются течения без ударных волн. Решение уравнений (29) в разделяющихся переменных

x и t имеет вид

$$\begin{aligned} p(x, t) &= (t_f - t)^{n_s} \pi(x), \quad n_s = -2\gamma(N+1)/[\gamma+1+N(\gamma-1)], \\ u(x, t) &= u_0(t_f - t)^{n_1} u(x), \quad n_1 = \frac{\gamma-1}{2\gamma} n_s, \\ \rho(x, t) &= (t_f - t)^{n_s/\gamma} g(x), \quad g(x) = \pi^{1/\gamma}(x) \Phi^{-1}(x), \\ r(x, t) &= R_0(t_f - t)^{n_1+1} R(x), \quad R(x) = -v(x). \end{aligned} \quad (31)$$

З а м е ч а н и е. Временное поведение решений в разделяющихся переменных (они относятся к классу течений с однородной деформацией [108]) определяется, вообще говоря, квадратурой [125, 135]. Для режимов сжатия квадратура асимптотически, т. е. при $t \rightarrow t_f$, дает степенной закон с обострением (который является частным решением при всех $t < t_f$). С учетом этого для простоты изложения (но без ограничения общности) будем рассматривать решения в виде (31).

Как следует из (31), при $t \rightarrow t_f$ давление, плотность и скорость всех частиц газа неограниченно растут, их радиус стремится к нулю. В частности, давление на поршне, сжимающем газ (от которого отсчитывается масса), изменяется в режиме с обострением:

$$p(0, t) = (t_f - t)^{n_s} \pi(0) = p_0(t_f - t)^{n_s}. \quad (32)$$

Пространственное распределение величин (при соответствующем выборе u_0 и R_0) описывается уравнениями

$$\pi'' = \begin{cases} \pi^{-1/\gamma}(x) \cdot \Phi(x), \quad v(x) = -\pi'(x), \quad N=0 \\ 0, \quad v(x) = \pm \left(\int 2\Phi(x) \pi^{-1/\gamma}(x) dx \right)^{1/2}, \quad N=1 \\ -(\pi'(x))^4 \pi^{-1/\gamma}(x) \Phi(x), \quad v(x) = -1/\pi'(x), \quad N=2. \end{cases} \quad (33)$$

Из условия (32) получаем

$$\pi(0) = p_0, \quad |v(0)| < \infty, \quad (34)$$

где (размерная) величина p_0 определяет масштаб давления на поршне, скорость которого ограничена при всех $t < t_f$.

Второе краевое условие для системы (33) рассматривается в некоторой точке $x = x_\Phi$ (которая может соответствовать границе области локализации, центру симметрии [48, 49, 51], границе склопывающейся полости, линии раздела среды на две компоненты и т. д.):

$$\pi(x_\Phi) = \pi_0 \geq 0, \quad v(x_\Phi) = v_0 \geq 0. \quad (35)$$

Например:

$$A. \quad \pi_0 = v_0 = 0. \quad (36)$$

Давление, скорость и плотность вещества в точке $x = x_\Phi$ обращаются в нуль — при $N=0$ имеет место эффект локализации

газодинамических процессов (см. также п. 1.2).

$$B. \pi_0 > 0, v_0 = 0. \quad (37)$$

Газ прижимается поршнем к неподвижной стенке.

$$C. \pi_0 = 0, x_0 \neq 0. \quad (38)$$

В этом случае точка $x = x_\Phi$ — граница с вакуумом. Задача описывает либо процесс разлета в вакуум, либо (при $N=1, 2$) схлопывание внутренней полости под действием поршня (32).

$$D. \pi_0 \neq 0, v_0 \neq 0. \quad (39)$$

Задача (33), (34), (39) соответствует сжатию внешней оболочкой ($0 \leq x \leq x$) внутренней части вещества ($x > x$).

Краевые условия (34), (35), вообще говоря, зависимы между собой. В силу этого для системы (33) следует рассматривать две принципиально различные задачи.

Задача I. Сжатие газа в заданном режиме.

Пусть определены следующие параметры течения — масса сжимаемого газа x_Φ и краевые условия (35). Требуется найти решение задачи (33), (35) и определить закон роста давления на поршне — константу p_0 в (34).

Задача II. Сжатие газа при заданном граничном законе.

Пусть фиксирован закон роста давления на поршне (краевое условие (34), т. е. константа p_0). Требуется определить, при каких краевых условиях (35) на правой границе (константах v_0, π_0, x_Φ) существует решение задачи (33) — (35), и найти его.

Таким образом, с физической точки зрения, в случае задачи I для фиксированной массы газа x_Φ и определенных краевых условиях в точке $x = x_\Phi$ (A, B, C или D) подбирается оптимальный режим сжатия (закон роста давления на поршне). Для задачи II при данном граничном законе сжатия находятся оптимальные массы сжимаемых веществ, давления на границе двух сред, скорости разлета в вакуум и т. д.

Для нелинейной системы уравнений (33) задача I является задачей Коши (которая становится сингулярной при $v(x_\Phi) = v_0 = 0$), а задача II — переопределенная двухточечная краевая задача на собственные значения.

Рассмотрим последовательно случаи $N=1, 0, 2$.

2.2. Точное решение в осесимметричном случае. Разделение временной и массовых переменных в уравнении осесимметричного движения газа [6, 53, 46]

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -r \frac{\partial p}{\partial x} \quad (40)$$

приводит к двум уравнениям

$$\begin{aligned} \pi'(x) &= \lambda, & r_1''(t) \cdot r_1^{-1}(t) &= -\lambda, \\ p(x, t) &= p_1(t) \pi(x), & r(x, t) &= r_1(t) R(x), \end{aligned} \quad (41)$$

где λ — константа интегрирования.

Из (41) находим

$$p(x, t) = p_1(t) (\lambda x + C), \quad C = \text{const.} \quad (42)$$

Следовательно, вне зависимости от свойств среды, а также от уравнений баланса энергии и неразрывности во всех течениях, описываемых автомодельными решениями в разделяющихся переменных, давление — линейная функция массовой координаты. В случае, когда в уравнение (40) дополнительно входит потенциальная сила, данный вывод справедлив для величины $\Sigma = p + \Pi$ (Π — потенциал). Отметим также, что если при адиабатическом сжатии $p_1(t)$ и $r_1(t)$ — степенные функции, то (см. также [45, 46])

$$p_1(t) = p_0(t_f - t)^{-2}, \quad (43)$$

т. е. показатель степени в законе роста давления на поршне не зависит от свойств среды (γ).

Свойство (42) осесимметричных течений позволяет сконструировать полное (явное) решение уравнения (33)

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \frac{\pi_0 - p_0}{x_\Phi} x + p_0, \\ v(x) &= \pm \left(\int 2\Phi(x) \left(\frac{\pi_0 - p_0}{x_\Phi} x + p_0 \right)^{-1/\gamma} dx \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (44)$$

Константа интегрирования в выражении для скорости (44) выбирается из краевого условия при $x = x_\Phi$.

Решение при соответствующем выборе констант π_0 , x_Φ , v_0 (44) описывает все типы значений A, B, C, D.

З а м е ч а н и е 1. Единственным (естественным) условием существования решений, накладываемым на функцию $\Phi(x)$, является существование интеграла в (44).

Таким образом, для осесимметричных течений ($N=1$) решение задач I и II существует и единственно (принципиальная ситуация имеет место в случае $N=0, 2$).

Неоднородное распределение энтропии в среде и развитие режима с обострением приводит к возникновению структур в сжимаемом веществе (§ 1). При $N=1$ условия существования газодинамических структур плотности и температуры находятся в явном виде

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{\gamma\lambda}{\lambda x + C}, \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\lambda}{\lambda x + C}, \quad \lambda = \frac{\pi_0 + p_0}{x_\Phi}, \quad C = p_0. \quad (45)$$

В случае $\Phi'(x) = 0$ структуры отсутствуют (изоэнтропическое сжатие [59, 82]), при $\Phi'(x) \leq 0$ могут существовать лишь структуры плотности, а для $\Phi'(x) \geq 0$ — температуры.

Количество экстремумов плотности определяется наклоном функции $\Phi(x)$, следовательно, даже при монотонном распреде-

лении энтропии в сжимаемой среде могут существовать разнообразные сложные газодинамические структуры.

2.3. Плоскосимметричные течения и эффект локализации. Для $N=0$ исследуемое уравнение и краевые условия имеют вид

$$\pi'' - \pi^{-1/\gamma} \varphi(x) = 0, \quad (46)$$

$$\pi(0) = p_0, \quad |\pi'(0)| < \infty, \quad (47)$$

$$\pi(x_\Phi) = \pi_0 \geq 0, \quad \pi'(x_\Phi) = -v_0 \leq 0. \quad (48)$$

Рассмотрим вначале наиболее интересную (и сложную) ситуацию А, описывающую эффект локализации газодинамических течений.

Теорема 1. Решение задачи I в случае $p_0 = v_0 = 0$ для всех $\varphi \in C(x > 0)$ и любого x_Φ существует, единственно и непрерывным образом зависит от краевых условий (x_Φ) и правой части $(\varphi(x), \gamma)$ (для любого $x_\Phi > 0$ существует единственное значение величины p_0 и соответствующее решение $\pi(x)$).

Замечание 2. Результат теоремы 1 справедлив также, если в окрестности точки x_Φ функция $\varphi(x)$ допускает представление вида $\varphi(x) = (x_\Phi - x)^\delta \psi(x)$, где $\psi(x)$ непрерывна и $\psi(x_\Phi) > 0$, $\delta > -(1 - 1/\gamma)$.

Теорема 1 устанавливает: если задана глубина локализации (масса сжимаемого вещества x_Φ), то для любого распределения энтропии в среде $\varphi(x)$ существует единственный граничный режим вида (2), т. е. соответствующее значение константы p_0 , позволяющий локализовать безударное сжатие на заданной массе газа.

Этого нельзя сказать о задаче II, т. е. нельзя утверждать, что в общем случае для любого $p_0 > 0$ найдется соответствующее значение x_Φ , для которого существует ее решение (примеры приведены в п. 5). Ввиду этого сформулируем теоремы существования и единственности решения задачи II.

Теорема 2 (существования). Пусть $\varphi(x)$ такова, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x s \varphi(s) ds = \infty$. Тогда для любого $p_0 > 0$ найдется, по крайней мере, одно значение x_Φ , для которого задача II разрешима.

Теорема 3 (единственности). Введем функцию

$$\psi_0(x) = \varphi(x) (p + qx)^2. \quad (49)$$

Пусть найдутся числа $p, q > 0$ такие, что $\psi_0(x)$ — неубывающая функция x . Тогда решение задачи II существует и единственно.

Замечание 3. Оценка (49) является неулучшаемой, т. е. если потребовать, чтобы неубывающей была функция $\psi(x) = \varphi(x) (p + qx)^{2+\varepsilon}$, $p, q > 0, x \geq 0$, то для любых $\varepsilon > 0$ можно построить пример, показывающий, что теорема 2 будет неверна (п. 5).

Итак, решение задачи II существует не всегда. Более того, в случае быстрого убывания энтропии с ростом x оно может быть неединственным (п. 5). Это означает, что различным автомодельным решениям соответствуют различные пространственные распределения газодинамических функций на момент начала сжатия, дающие одинаковое распределение энтропии по массе газа и отвечающие одинаковому закону роста давления на поршне (спектр решений).

Величина x_Φ в условиях задачи II может принимать, вообще говоря, любые значения. Напомним, что по определению при $x_\Phi = \infty$ локализация газодинамических величин отсутствует — сжатию подвергается вся масса газа, лежащая перед поршнем (п. 5). В связи с этим сформулируем

Критерий локализации. Для локализации газодинамических течений в условиях задачи II необходимо и достаточно условий теоремы 3.

Теоремы 2 и 3 показывают, что существование решения задачи II, его единственность, критерий локализации целиком зависят от свойств функции $\varphi(x)$ (прежде всего от скорости ее убывания при $x \rightarrow \infty$).

Корректность задач I и II (при выполнении условий теорем 1—3) позволяет строить широкий класс оценок для решений и величин x_Φ и p_0 [47, 48].

Аналогично случаю осесимметричных течений условия существования газодинамических структур в волне сжатия имеют вид

$$\begin{aligned} \ln \pi_r(x) &= \gamma \ln \Phi'(x) \quad (\text{плотности}), \\ \ln \pi'(x) &= -\frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \Phi'(x) \quad (\text{температуры}). \end{aligned} \quad (50)$$

Из (50) сразу видно, что в изоэнтропическом случае структуры отсутствуют, а при $\varphi'(x) \leq 0$ ($\varphi'(x) \geq 0$) могут существовать лишь структуры плотности (температура), в том числе сложные [47, 48].

Рассмотрим теперь более общий случай $\pi_0, v_0 > 0$. Относительно функции $\varphi(x)$ всюду далее будем предполагать следующее:

а) $\varphi(x) \geq 0$ и непрерывна всюду в $x \in [0, \infty)$, за исключением конечного числа точек разрывов.

б) Если $x = x^*$ — точка разрыва (в частности, возможно $x^* = x_\Phi$), то в ее окрестности $\varphi(x)$ представлена в виде

$$\varphi(x) = |x - x^*|^\delta \psi(x),$$

где $\psi(x)$ непрерывна и $\psi(x^*) > 0$, $\delta > -(1 - 1/\gamma)$.

в) Для любых $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ существует $\int_{x_1}^{x_2} \Phi(s) ds > 0$.

Теорема 4. Решение $\pi(x)$ задачи I существует и единственно для любых $x_\Phi > 0$, $\pi_0 \geq 0$, $v_0 \geq 0$.

Доказательство. Если $\pi_0 > 0$, то задача I — регулярная задача Коши и теорема 4 следует из классических результатов [110, 18]. Случай $\pi_0 = v_0 = 0$ рассмотрен в теореме 1. Наконец, когда $\pi_0 = 0$, $v_0 > 0$, то, записывая уравнение (46) в виде

$$\pi'' = \frac{\varphi(x)}{(x_\Phi - x)^{1/\gamma}} \left(\frac{\pi(x)}{x_\Phi - x} \right)^{-1/\gamma} \quad (51)$$

и учитывая, что

$$\lim_{x \rightarrow x_\Phi} \frac{\pi(x)}{x_\Phi - x} = v_0 > 0, \quad (52)$$

получаем утверждение теоремы 4 из результатов работы [47].

В условиях задачи II принципиально различны случаи $v_0 = 0$ (А и В) и $v_0 > 0$ (С и D).

Теорема 5. Существует p_0^* такое, что для любого $p_0 > p_0^*$ и $v_0 > 0$, $\pi_0 \geq 0$ найдется, по крайней мере, одно значение $x_\Phi > 0$, для которого существует решение задачи II.

Доказательство. Обозначим $Q(v_0) = p_0 = \pi(0)$, и пусть $p_0^* = \inf_{v_0 > 0} p_0$. Так как $\pi'' \geq 0$ $[0, x_\Phi]$, то решение задачи II (которое существует и единственно — см. теорему 4) лежит выше прямой $\pi = p_0 - v_0(x - x_\Phi)$. Следовательно, для любого $p_0 \geq p_0^*$ и π_0 , $v_0 > 0$ всегда можно выбрать такое x_Φ , что $\pi(0) = p_0$, откуда и следует утверждение теоремы 5.

З а м е ч а н и е 4. Если $v_0 = 0$, то теорема 5, вообще говоря, неверна. В этом случае необходимо наложить дополнительные ограничения на функцию $\varphi(x)$, а именно, потребовать выполнения условий теоремы 2.

Теорема 6. Пусть найдутся $p, q > 0$ такие, что функция $\psi(x) = \varphi(x)(p + qx)^2$ является неубывающей. Тогда решение задачи II существует и единственно.

Доказательство теоремы 6 полностью аналогично доказательству теоремы 3, приведенному в [47]. Следует отметить, что данная оценка, как и в теореме 3, является неулучшаемой.

Таким образом, главным критерием существования и единственности решения задачи II является выполнение условия (49).

2. 4. Безударное сжатие сферическим поршнем. В случае $N = 2$ приходим к следующей задаче:

$$\pi'' + (\pi')^4 \pi^{-1/\gamma} \varphi(x) = 0, \quad (53)$$

$$\pi(0) = p_0, \quad |(\pi'(0))^{-1}| < \infty, \quad (54)$$

$$\pi(x_\Phi) = \pi_0 \geq 0; \quad \pi'(x_\Phi) = -\frac{1}{v_0}, \quad v_0 \geq 0. \quad (55)$$

Относительно функции $\varphi(x)$ предположения те же, что и в случае $N = 0$, с учетом дополнительного ограничения в окрестности

точки разрыва $x=x^*$

$$\varphi(x) = \psi(x) |x^* - x|^{\delta}, \quad \psi(x^*) > 0, \quad -(1 - 1/\gamma) < \delta < 2.$$

Приводимый в настоящей работе краткий перечень результатов является обобщением выводов работы [48] (где рассматривался наиболее интересный и сложный для анализа случай $v_0=0, \pi_0 \geq 0$). Приемы и подробности доказательства теорем, оценки решений совершенно аналогичны изложенным в [48].

Теорема 7. Решение задачи I для уравнения (53) существует и единственно.

Доказательство. Если $\pi_0 > 0, v_0 > 0$, то утверждение следует из [110, 18]. При $\pi_0 \geq 0, v_0 = 0$ справедливость теоремы 7 вытекает из [48]. Наконец, в случае $\pi_0 = 0, 0 < v_0 < \infty$ записывая (аналогично теореме 4) (53) в виде

$$\pi'' + (\pi')^4 \left(\frac{\pi}{x_{\Phi} - x} \right)^{-1/\gamma} \cdot \frac{\varphi(x)}{(x_{\Phi} - x)^{1/\gamma}} = 0 \quad (56)$$

и учитывая, что $\lim_{x \rightarrow x_{\Phi}} \frac{\pi(x)}{x_{\Phi} - x} = (v_0)^{-1}$, получим существование и единственность решения задачи I из результатов работы [48].

Замечание 5. Из существования и единственности решения задачи I следует непрерывная зависимость его от правой части $(\varphi(x), \gamma)$ и краевых условий (x_{Φ}, v_0, π_0) .

Теорема 8. (О существовании решения задачи II).

Пусть $\varphi(x) > 0, 0 \leq x < \infty$ и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} = 0. \quad (57)$$

Тогда для любых значений p_0 задача II разрешима. Если же существует $q > 0$ такое, что $\varphi(x) \geq qx^2, 0 \leq x_1 \leq x < \infty$, то всегда найдется такое $p_0^* = p_0^*(q, v_0, \pi_0)$, что при $p_0 > p_0^*$ решения задачи II не существует.

Теорема 9 (о единственности решения задачи II).

Введем функцию

$$\psi_2(x) = \varphi(x) (p + qx)^{-2}. \quad (58)$$

Пусть существуют числа $p, q > 0$, такие, что функция $\psi(x)$ — невозрастающая. Тогда решение задачи II существует и единственно.

Замечание 6. Сравнение теорем 6 и 9 показывает, что для единственности решения задачи II в плоском случае накладывается ограничение на скорость убывания функции $\varphi(x)$ ($\psi_0 = \varphi(x) (p + qx)^2$ — невозрастающая), а при $N=2$ — на скорость ее роста ($\psi^2(x) = \varphi(x) (p + qx)^{-2}$ — невозрастающая).

Замечание 7. Оценка (58), как и все полученные ранее (см. теоремы 3 и 6), является неулучшаемой.

Условия существования газодинамических структур в построенных решениях вполне аналогичны (50).

Кратко сформулируем основные выводы о свойствах решений задач I и II.

Для осесимметричных течений решения задач I и II всегда существуют (с учетом замечания 1) и единственны. Они описываются явными формулами (44).

Решение задачи I для всех краевых условий при $x=x_\Phi$ и во всем диапазоне допустимых распределений энтропии существует, единственно и непрерывным образом зависит от $\varphi(x)$, γ , u_0 , π_0 , x_Φ .

Решение задачи II существует, если $\int_0^{x_\Phi} s\varphi(s) ds \rightarrow \infty$ ($x_\Phi \rightarrow \infty$) в случае $N=0$, и если $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} = 0$ при $N=2$.

Решение задачи II существует и единственно, если найдутся такие числа $p, q > 0$, что функция $\psi_0(x) = \varphi(x)(p+qx)^2$, $N=0$ ($\psi_2(x) = \varphi(x)(p+qx)^{-2}$, $N=2$) является неубывающей (невозрастающей).

В плоскосимметричном случае газодинамическое движение локализовано на конечной массе газа. Критерий локализации совпадает с условиями теоремы единственности решения задачи II.

В случае неоднородного распределения энтропии в среде волна сжатия может содержать сложные газодинамические структуры.

2.5. Примеры сложных газодинамических структур и спектров решений. В ряде важных газодинамических процессов (кумуляция ударных волн [134, 16], движения ударных волн по переменному фону плотности [62] и т. д. за фронтом ударных волн в среде возникают распределения энтропии, соответствующие степенному и экспоненциальному виду функции $\varphi(x)$, т. е. $\varphi(x) = M(x_1+x)^\delta$ или $\varphi(x) = Me^{\alpha x}$. В этих случаях изучение задачи I и II (46) — (48) и (53) — (55) сводится к исследованию фазовых портретов обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [6, 52, 53].

Ограничимся вариантом $\varphi(x) = M(x+1)^{\delta/\gamma}$, положив $M = x_1 = 1$.

Замена

$$y = \pi^{1/\gamma} (x+1)^{-\frac{\delta}{\gamma}-2}, \quad z = -\pi (x+1)^{-1/\pi'} \quad (59)$$

позволяет исследовать задачу (46) — (48) на фазовой плоскости уравнения

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\gamma+1}{\gamma} y^2 z^{-1} \frac{\alpha z + 1}{y + zy - z^2}, \quad \alpha = \frac{\delta + 2\gamma}{\gamma + 1}. \quad (60)$$

Поршню ($x=0$) и фронту ($x=x_{\Phi}$) в плоскости (z, y) соответствуют точки

$$\begin{aligned} (z_0, y_0) &= (-p_0(\pi'(0))^{-1}, p_0^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}), \\ (z_{\Phi}, y_{\Phi}) &= \begin{cases} (0, 0), & x_{\Phi} \neq \infty, \\ (-\alpha^{-1}, (\alpha-1)\alpha^{-3}), & x_{\Phi} = \infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (61)$$

Решение задачи I всегда существует и единственно. То же самое справедливо при $\alpha \geq 0$ ($\delta \geq -2\gamma$) для решения задачи II [6, 52, 53].

Рассмотрим случай $\alpha < 0$ (под условия теорем 1, 3 он не под- ходит).

Пусть $x_{\Phi} < \infty$. В плоскости (z, y) существует единственная кривая L , выходящая из точки $(0, 0)$ и удовлетворяющая условиям на фронте в задаче (46)–(48). Искомое решение — часть интегральной кривой между точками фронта и поршня. Для построения решения задачи II при заданном значении $y_0 = p_0^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}$ необходимо выбрать значение свободного параметра $v(0) = p_0 z_0^{-1}$ ($v(0) = -\pi'(0)$) так, чтобы точка поршня (61) принадлежала интегральной кривой L . При $\alpha < 0$ в квадранте $(z, y) > 0$ появляется особая точка $B(-\alpha^{-1}, (\alpha-1)\alpha^{-3})$, в которую входит кривая L . В случае $\alpha^* \leq \alpha < 0$ она является узлом, а при $\alpha < \alpha^*$ — устойчивым фокусом (рис. 12а), $\alpha^* = (1 - \sqrt{\gamma+1})/2$.

Рассмотрим случай $\alpha < \alpha^*$. При $p > p_0^{**} = (y_0^{**})^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}$ решений не существует, при $0 < p_0 \leq p_0^{***} = (y_0^{***})^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}$ решение существует и единственно, а для $p_0^{***} < p_0 < p_0^{**}$ существует несколько решений, причем их число неограниченно растет при $p_0 \rightarrow p_0^* = (y_0^*)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}$. Если же $x_{\Phi} = \infty$, то решение (причем явное) задачи II существует лишь при $p_0 = p_0^*$ и единственно. В плоскости (z, y) ему отвечает особая точка — центр фокуса.

Условия существования газодинамических структур допускают наглядную интерпретацию на фазовой плоскости. Из замены (29) и условия (50) следует, что структуры плотности (температуры) существуют, если интегральная кривая L пересекает прямую $z = z_1 = -\delta$ ($z = z_2 = -z_1(\gamma-1)/\gamma$). В случае $\alpha < \alpha^*$ число экстремумов может быть неограниченно, причем при $\delta \rightarrow -\infty$ их количество становится бесконечным. На рис. 12б,в приведен пример спектра решений и сложных структур плотности.

В данном примере решения обладают следующим интересным свойством. Из сравнения случаев 1 и 2 видно, что при меньшей работе поршня (пропорциональной величине

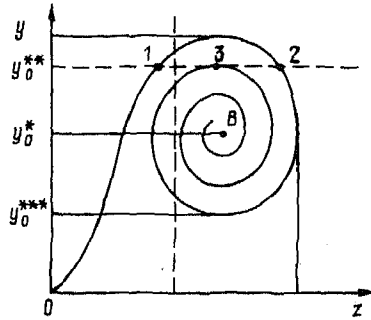


Рис. 12а. Поле интегральных кривых уравнения (46) при $\alpha < \alpha^*$. Пунктиром показаны линия поршня и линия структур

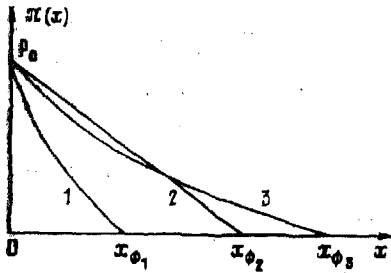


Рис. 12б. Спектр решений задачи II

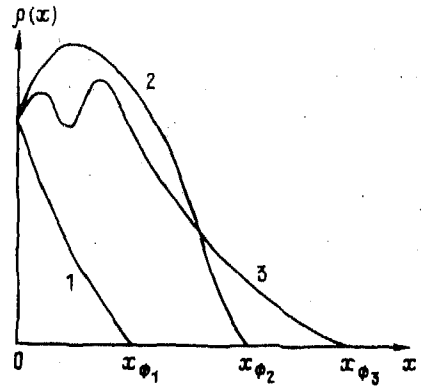


Рис. 12в. Сложные структуры плотности в задаче II

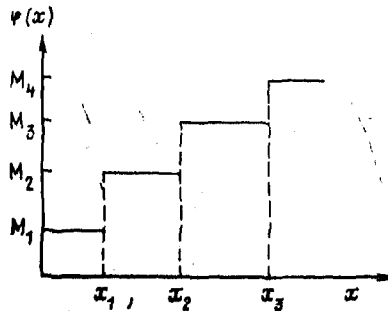


Рис. 13а. Вид энтропийной функции в задаче II, $N=2$

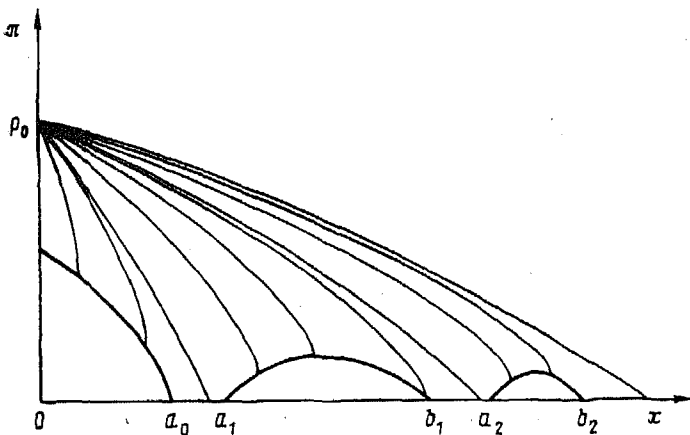


Рис. 136. Пример сложного спектра решений в сферической геометрии

$\pi(0) \cdot v(0)$ в случае решения 2 большая масса газа ($x_{\Phi_2} > x_{\Phi_1}$) сжимается до больших плотностей.

Приведем один пример сложного спектра решений задачи II, $N=2$. Пусть энтропийная функция имеет ступенчатый вид

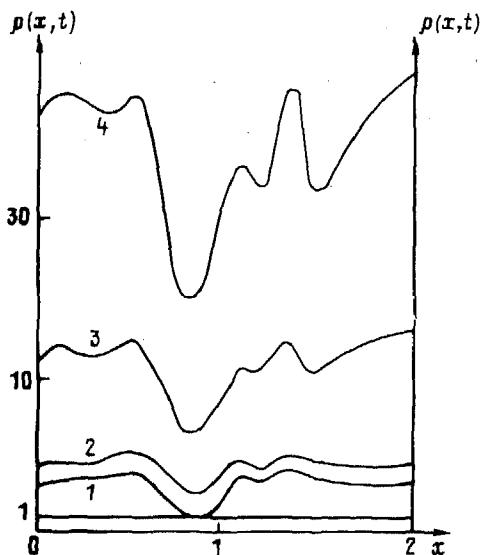


Рис. 14. Возбуждение сложной структуры плотности в газе между двумя поршнями. Параметры: $\gamma=5/3$, $p(0, t)=25 \cdot (1-t)^{n_S}$, $p(2, t)=50(1-t)^{n_S}$, $n_S=-2\gamma/(\gamma+1)$, $p^0=a_0=1$, $t_f=1$, $t_0=0$, $t_1=0.12$, $t_2=0.446$, $t_3=0.874$, $t_4=0.974$

(рис. 13а), т. е. в сжимаемом шаре существуют контактные разрывы.

Тогда при соответствующем выборе констант M_1, M_2, M_3, \dots , x_1, x_2, x_3, \dots решение задачи II имеет вид [48] (рис. 13б).

Давление при $0 < x_{\Phi} < a_0$ всюду больше нуля. При дальнейшем увеличении массы сжимаемого вещества ($x_{\Phi} \in (a_0, a_1)$) у центра симметрии системы образуется полость, схлопывающаяся с некоторой скоростью v_0 . Затем, начиная с некоторой критической массы a_1 , давление в центре симметрии вновь становится больше нуля. В общем случае количество «арок» (a_i, a_{i+1}) может быть неограниченным.

На рис. 14 приведены результаты численного расчета, иллюстрирующего «возбуждение» неединственных экстремумов плотности (сложных структур) в первоначально однородном газе при сжатии его между двумя плоскими поршнями. Давление на поршнях соответствует автомоделльному S -режиму и отличается в начальный момент от давления газа. В результате по веществу проходят ударные волны, создающие неоднородное распределение энтропии, благодаря которому возникает сложная структура плотности S -режима (экстремумы связаны с фиксированными частицами газа, их размеры неизменны).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Действие «медленных» (S - и LS -) граничных режимов с обострением на среду приводит к локализации газодинамических процессов. Данный эффект связан не с быстротой сжатия, поскольку в случае «быстрых» (HS -) режимов локализация отсутствует, а с тем что S - и LS -режимы создают в веществе «инерционные» пространственные профили величин (ср. характер профилей давления на рис. 5, 7, 8). Вполне аналогичные выводы были получены для процессов теплопередачи [117—119, 92, 93, 98, 77]. Это свидетельствует о весьма общих закономерностях развития режимов с обострением в сплошных средах.

Сжатие в S - и LS -режимах является низкоэнтропийным, в HS -режимах всегда формируется ударная волна с неограниченно растущей амплитудой.

Пространственные характеристики плотности и температуры в волнах сжатия зависят от распределения энтропии в среде. В том числе возможно существование газодинамических структур и неединственность режимов сжатия фиксированной среды при фиксированном законе давления на поршне.

Эффекты локализации, образования структур и безударного сжатия имеют место не только при специальном, но и при произвольном распределении энтропии в среде (а также в многомерной геометрии [51] и при учете дополнительных процессов — см. [45, 46, 49, 42] и гл. 2). В частности, при любом распределении энтропии существует единственный граничный

режим, обеспечивающий локализацию безударного сжатия на заданной массе газа (если же фиксирован закон давления на границе, то существование и единственность режима сжатия гарантируется при соответствующих ограничениях на энтропийную функцию).

Условия проявления эффектов локализации и образования структур зависят от безразмерных критериев и, по-видимому, вполне реализуемы. Граничные режимы с обострением дают возможность осуществлять разнообразные способы сжатия сплошных сред.

Глава 2

СЖАТИЕ КОНЕЧНОЙ МАССЫ ПЛАЗМЫ В РЕЖИМАХ С ОБОСТРЕНИЕМ

§ 1. Решения с разделяющимися переменными для задач физики плазмы

1.1. Физико-математическая модель, используемая в этой главе, базируется на гидродинамическом описании плазмы. В частности, приведенная выше в гл. 1 система уравнений газовой динамики (29) часто используется для изучения поведения плотной плазмы.

В достаточно общем случае такая система дополняется членами, учитывающими физические эффекты, характерные для ионизованного газа. В первую очередь, это процессы теплопроводности, вязкости и диффузии магнитного поля.

Классический вывод такой достаточно общей и вместе с тем сравнительно простой системы уравнений магнитной газодинамики, полученной на основе рассмотрения кинетических уравнений для плазмы, дан в [15]. Основным требованием применимости модели является условие малости длин «свободного пробега» электронов и ионов плазмы (определяемых кулоновскими столкновениями в ионизованном квазинейтральном газе) по сравнению с характерными размерами задачи. В [15] обсуждаются различные соотношения между характерными микроскопическими масштабами плазмы (длины свободного пробега, ларморовский радиус, радиус Дебая и т. д.) и соответствующие варианты модели.

Данная модель сплошной среды находит многочисленные применения при исследованиях динамики процессов в различных установках с высокотемпературной плазмой. Среди них системы с магнитным удержанием плазмы, импульсные системы, в которых плазма получается в сильнооточных разрядах или при нагреве вещества лазерным излучением, пучками частиц.

1.2. Система уравнений. Во многих приложениях плазменные конфигурации обладают пространственной симметрией. В наи-

более простом случае величины, описывающие плазму, являются функциями только двух переменных: времени и расстояния от плоскости, оси или центра симметрии.

Рассмотрение такого класса одномерных нестационарных задач позволяет существенно более полным образом исследовать влияние большого числа различных физических эффектов. В вычислительном эксперименте этот подход дает возможность изучить принципиально различные физические ситуации, возникающие при изменении параметров системы. В ряде случаев такое моделирование на ЭВМ приводит к выбору кардинально новых режимов сжатия и нагрева плазмы. При этом вопросы устойчивости выбранных оптимальных режимов изучаются на втором этапе исследований путем решения многомерных задач.

В настоящей работе исследование ограничено еще и рамками автомодельной задачи. В этом случае существенные черты развития того или иного физического процесса могут проявляться особенно ярко [12, 34], характеристики оптимальных режимов описываются, как правило, аналитически.

В дальнейшем, разумеется, результаты автомодельного анализа должны пройти проверку в полномасштабном вычислительном эксперименте.

Выпишем теперь систему уравнений в отсутствие магнитного (и электрического) поля. Такие уравнения могут служить для описания плазмы, полученной, например, путем нагрева вещества излучением лазера либо пучками частиц. В массовых лагранжевых координатах $x = \int_0^r \rho r^N dr$ и t (см. гл. 1) исследуемая система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} (r^N v); \\ \frac{\partial r}{\partial t} &= v; \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -r^N \frac{\partial p}{\partial x} + r^N \frac{\partial D}{\partial x} + N \frac{D - D'}{\rho r}; \\ \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial t} + p_e \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) &= -\frac{\partial}{\partial x} (r^N W_e) + \frac{Q_e}{\rho} - \frac{Q_R}{\rho} - \frac{Q_{el}}{\rho}; \\ \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial t} + p_l \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) &= -\frac{\partial}{\partial x} (r^N W_l) + \frac{Q_l}{\rho} + \frac{\Phi}{\rho} + \frac{Q_{el}}{\rho}; \\ D &= \rho r^N \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \frac{\partial v}{\partial x} + N \left(\zeta - \frac{2}{3} \eta \right) \frac{v}{r}; \\ D' &= \rho r^N \left(\zeta - \frac{2}{3} \eta \right) \frac{\partial v}{\partial x} + N \left[\zeta + \left(\frac{7}{3} - N \right) \eta \right] \frac{v}{r}; \\ W_e &= -\kappa_e \rho r^N \frac{\partial T_e}{\partial x}; \quad W_l = -\kappa_l \rho r^N \frac{\partial T_l}{\partial x}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$Q_{ei} = \chi(T_e - T_i); \quad \Phi = D\rho r^N \frac{\partial v}{\partial x} + N \frac{D'v}{r};$$

$$p = p_e + p_i; \quad p_i = \rho RT_i; \quad p_e = Z\rho RT_e;$$

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\gamma-1} RT_i; \quad \varepsilon_e = \frac{Z}{\gamma-1} RT_e.$$

В системе (1) принято, что входящие в нее векторные величины (скорость v , тепловой поток W) имеют только радиальные составляющие (направлены вдоль оси r), т. е. $v = v e_r$, $W = W e_r$, где e_r — единичный вектор (орт), направленный из центра (от оси или плоскости) симметрии вдоль координаты r .

Выписанная система уравнений соответствует двухтемпературному одножидкостному приближению. При этом плазма рассматривается как двухкомпонентная жидкость, компоненты которой (ионы и электроны) движутся с одной и той же гидродинамической скоростью $v(x, t)$, но имеют различные температуры: T_i (ионы) и T_e (электроны). Такое приближение часто оправдано, поскольку релаксация импульсов ионов и электронов происходит за времена примерно в $\frac{m_i}{m_e}$ раз меньше, чем релаксация энергий (m_i — масса иона плазмы, m_e — электрона). Релаксация энергий описывается членом Q_{ei} . «Скорость» релаксации температур определяется величиной коэффициента $\chi(\rho, T_e)$.

В системе (1) величины D и D' представляют собой ненулевые в данном симметричном случае компоненты тензора вязких напряжений. При $N=1$, $D = D_{rr}$, $D' = D_{\varphi\varphi}$, где φ — полярный угол, при $N=2$ $D = D_{rr}$, $D' = D_{\varphi\varphi} = D_{\theta\theta}$, где φ и θ — угловые переменные в сферической системе координат. При $N=0$ в уравнениях остаются только члены с $D = D_{rr}$.

В выражениях для D и D' величина $\eta(\rho, T_i)$ есть коэффициент ионной вязкости. Для общности введен коэффициент второй вязкости $\zeta(\rho, T_i)$. Источник тепла Φ определяется вязкой диссипацией движения в жидкости.

Радиальные компоненты векторов тепловых потоков W_e и W_i пропорциональны градиентам температуры $\partial T_e / \partial x$ и $\partial T_i / \partial x$ в соответствии с законом Фурье. Коэффициенты пропорциональности (коэффициенты теплопроводности) зависят от плотности и температуры:

$$\kappa_e = \kappa_e(\rho, T_e), \quad \kappa_i = \kappa_i(\rho, T_i).$$

Источники тепла Q_i и Q_e могут описывать разогрев плазмы за счет термоядерных реакций (если в состав плазмы входят тяжелые изотопы водорода). В этом случае $Q_e = Q_e(\rho, T_i)$ и $Q_i = Q_i(\rho, T_i)$.

Наконец, член $Q_R = Q_R(\rho, T_e)$ описывает сток энергии за счет объемного излучения.

Выражения для ионного p_i и электронного p_e давлений, а

также для удельных внутренних энергий ϵ_e и ϵ_i электронов и ионов соответствуют в (1) уравнениям состояния идеального газа. Газовая постоянная R в данном случае есть $R = \frac{k_B}{m_i}$, где k_B — постоянная Больцмана, а m_i — масса иона; Z — кратность ионизации.

Коэффициенты переноса $\kappa_e, \kappa_i, \eta, \zeta, \chi$ привносятся в модель (1) извне (из теории или эксперимента). В [15] даны простые степенные зависимости этих коэффициентов от температуры, следующие из теоретического рассмотрения процессов переноса на основе кинетических уравнений.

Для последующего рассмотрения, имея в виду получение автомодельных решений на основе анализа размерностей, примем следующие степенные зависимости этих коэффициентов.

$$\begin{aligned} \kappa_e &= a_1 T_e^{m_1} \rho^{k_1} t^{l_1}, \\ \kappa_i &= a_2 T_i^{m_2} \rho^{k_2} t^{l_2}, \\ \eta &= a_3 T_i^{m_3} \rho^{k_3} t^{l_3}, \\ \chi &= a_4 T_e^{m_4} \rho^{k_4} t^{l_4}, \\ \zeta &= a_5 T_i^{m_5} \rho^{k_5} t^{l_5}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для моделирования более сложных зависимостей в общем случае введена явная зависимость от времени.

Аналогичный вид примем и для источников и стоков тепла

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{a_6 T_i^{m_6} \rho^{k_6} t^{l_6}}{1 + a_8 T_i^{m_8} \rho^{k_8} t^{l_8}}, \\ Q_e &= \frac{a_7 T_i^{m_7} \rho^{k_7} t^{l_7}}{1 + a_9 T_i^{m_9} \rho^{k_9} t^{l_9}}, \\ Q_R &= a_{10} T_e^{m_{10}} \rho^{k_{10}} t^{l_{10}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Аппроксимация источников тепла за счет локального поглощения заряженных продуктов термоядерной реакции ${}^3\text{H}(d, n){}^4\text{He}$ в виде (3) вполне оправдана в определенных диапазонах температур. Например, для $1 \leq T_i \leq 30$ кэВ справедливо $m_6 = m_7 = 5,2$; $k_6 = k_7 = 2$; $m_8 = m_9 = 3,6$; $k_8 = k_9 = 0$; $l_6 = l_7 = l_8 = l_9 = 0$ [75].

Заметим, что поскольку комбинации $a_j T_i^{m_j} \rho^{k_j} t^{l_j} = 8,9$ являются безразмерными, то условия автомодельности какой-либо задачи для (1) — (3) совпадают с условиями автомодельности для задачи с Q_i и Q_e более общего вида, а именно для

$$\begin{aligned} Q_i &= a_6 T_i^{m_6} \rho^{k_6} t^{l_6} \varphi_i (a_8 T_i^{m_8} \rho^{k_8} t^{l_8}), \\ Q_e &= a_7 T_i^{m_7} \rho^{k_7} t^{l_7} \varphi_e (a_9 T_i^{m_9} \rho^{k_9} t^{l_9}), \end{aligned}$$

где φ_i и φ_e — произвольные (!) безразмерные функции. Поэтому, если автомодельная задача допускает появление некоторой безразмерной комбинации вида $aT^m \rho^k t^l$ (в задаче есть соответствующий размерный параметр a), то размерные коэффициенты (2), (3) могут быть умножены на произвольные функции этой комбинации без нарушения условий автомодельности¹⁾.

1.3. Граничные условия. Теперь рассмотрим определенные постановки задач для системы (1)–(3). Рассмотрим конечную массу газа $\left\{2\pi N + \frac{1}{2}(N-1)(N-2)\right\} x_0$, заполняющего прост-

ранство от $r=0$ до некоторого $r_n(t): x_0 = \int_0^{r_n(t)} \rho r^N dr$. Граничные

условия должны быть поставлены при $x=0$ (т. е. на плоскости, оси или в центре симметрии $r=0$) и при $x=x_0$ (т. е. на поршне, траектория которого следует закону $r_n(t)$).

Условия симметрии при $x=0$ естественно взять в следующем виде:

$$\begin{aligned} v(0, t) &= 0, \\ W_e(0, t) &= W_i(0, t) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

На поршне $x=x_0$ задается скорость

$$v(x_0, t) = v_0 t^{n-1} \quad (5)$$

и температуры либо потока тепла:

$$T_e(x_0, t) = T_{0e} t^{n_1}, \text{ либо } W_e(x_0, t) = W_{0e} t^{n_2} \quad (6)$$

и

$$T_i(x_0, t) = T_{0i} t^{n_1}, \text{ либо } W_i(x_0, t) = W_{0i} t^{n_2}. \quad (7)$$

Задача допускает естественные обобщения на случай задания давления (вместо (5))

$$p(x_0, t) - D(x_0, t) = p_0 t^{n_3}. \quad (8)$$

В частных случаях, как показано ниже, при $x=x_0$ можно ставить граничное условие, соответствующее границе с вакуумом

$$p(x_0, t) - D(x_0, t) = 0. \quad (9)$$

1.4. Определяющие параметры и разностный анализ. В соответствии с условиями (4)–(9) в качестве размерных определяющих параметров удобно взять следующие константы: x_0 , v_0 , R и время t . Эти параметры обладают независимой размерностью, что обеспечивает выражение масштабов любых величин, входящих в уравнения (1)–(3), через определяющие. Отметим, что выбор величины x_0 (полной массы рассматриваемого вещества) в качестве определяющего параметра с неизбежностью приводит к автомодельной задаче с разделяющимися переменными.

¹⁾ Если рассмотрение ограничить видом $aT^m \rho^k$ с $l=0$, то такая безразмерная комбинация в данной автомодельной задаче единственна.

Выразим теперь все входящие в систему (1) функции (как зависимые, так и независимые) через произведения степеней определяющих масштабов x_0 , v_0 , R и t и безразмерных функций, зависящих от безразмерных параметров задачи и единственной независимой безразмерной переменной ξ . В результате получим следующие выражения:

$$\xi = \frac{x}{x_0};$$

$$r(x, t) = v_0 t^n \lambda(\xi); \quad v(x, t) = \frac{v_0 t^n}{t} \alpha(\xi);$$

$$T_{l,e}(x, t) = \frac{(v_0 t^n)^2}{R t^2} \theta_{l,e}(\xi); \quad \rho(x, t) = \frac{x_0}{(v_0 t^n)^{N+1}} \delta(\xi);$$

$$W_{l,e}(x, t) = \frac{x_0 (v_0 t^n)^{2-N}}{t^3} \omega_{l,e}(\xi); \quad p(x, t) = \frac{x_0 (v_0 t^n)^{1-N}}{t^2} \beta(\xi);$$

$$D(x, t) = \frac{x_0 (v_0 t^n)^{1-N}}{t^2} \tau(\xi); \quad D'(x, t) = \frac{x_0 (v_0 t^n)^{1-N}}{t^2} \tau'(\xi); \quad (10)$$

$$\Phi(x, t) = \frac{x_0 (v_0 t^n)^{1-N}}{t^3} \varphi(\xi); \quad \kappa_{l,e}(x, t) = \frac{x_0 R}{(v_0 t^n)^{N-1} t} \tilde{\kappa}_{l,e}(\xi);$$

$$\eta(x, t) = \frac{x_0 (v_0 t^n)^{1-N}}{t} \tilde{\eta}(\xi); \quad \chi(x, t) = \frac{x_0 R}{(v_0 t^n)^{N+1} t} \tilde{\chi}(\xi);$$

$$\zeta(x, t) = \frac{x_0 (v_0 t^n)^{1-N}}{t} \tilde{\zeta}(\xi); \quad Q_{l,e}(x, t) = \frac{x_0 (v_0 t^n)^{1-N}}{t^3} \tilde{q}_{l,e}(\xi);$$

$$Q_{el}(x, t) = \frac{x_0 (v_0 t^n)^{1-N}}{t^3} q_{el}(\xi); \quad Q_R(x, t) = \frac{x_0 (v_0 t^n)^{1-N}}{t^3} q_R(\xi).$$

Отсюда видно, что в автомодельной задаче с перечисленными выше определяющими параметрами граничные условия должны иметь степенной вид (6)–(8), причем $n_1 = 2(n-1)$, $n_2 = (2-N)n-3$, $n_3 = (1-N)n-2$. Для краевой задачи с такими граничными условиями справедливы соотношения (10). Как видно из (10), решение данной краевой задачи ищется в виде с разделяющимися переменными x и t :

$$F_i(x, t) = \bar{B}_i(t) \bar{F}_i(x), \quad (11)$$

где F_i — какая-либо из функций, входящих в (1). В задаче с параметром конечной массы x_0 и граничными условиями (6)–(8) функции B_i имеют степенной вид

$$F_i(x, t) = B_{0i} t^{n_i} f_i\left(\frac{x}{x_0}\right), \quad (12)$$

где B_{0i} — произведение некоторых степеней x_0 , v_0 и R . В соответствии с разработанной терминологией решение (12) называется автомодельным S -режимом степенного вида. Система (1) допускает решения вида (11) и с более общими (нестепен-

ными) зависимостями $\bar{B}_i(t)$ [21, 43, 107, 126] (S-режим с разделяющимися переменными).

После того, как показана возможность решения задачи (1), (5)–(8) в виде (10), ясно, что в качестве определяющих могут быть выбраны время t и любые три постоянные из законов (5)–(8) и (2), (3), если они обладают независимой размерностью. В этом случае параметр с размерностью массы получается в виде произведения некоторых их степеней. Например, если за определяющие выбрать p_0 из (8), W_{0e} из (6), R и t , то $x_0' = W_{0e}^{N-1} p_0^{2-N}$. В задаче появляется безразмерный параметр $\xi_* = x_0/x_0'$

$$\left(x_0 = \int_0^{r_n(t)} \rho r^N dr \right)$$

и граничные условия для функций $f_i(\xi)$ ставятся при $\xi = \xi_*$, причем теперь $\beta(\xi_*) = 1$, как в гл. 1. В случае же включения x_0 в число определяющих, $\xi_* = 1$, а $\beta(1)$ в общем случае уже $\neq 1$.

До сих пор не обсуждался вид начальных условий для задачи (1), (4)–(9). В случае автомодельного решения вид начальных функций следует из (10). Так, например, для $n > 0$, $v_0 > 0$ и $0 < t < \infty$, что соответствует задаче разлета, начальные данные сингулярны ($\rho(0, x) = \infty$, $v(0, x) = 0$; $T_{i,e}(0, x) = 0$ при $n > 1$ и $T_{i,e}(0, x) = \infty$ при $n < 1$) и не вносят новых размерных параметров. В случае начала процесса с несингулярного момента времени t_0 ($t_0 \neq 0$ и $|t_0| \neq \infty$) в качестве начальных данных должны быть взяты функции (10) при соответствующем значении $t = t_0$.

В практически интересных случаях решение задачи (1), (4)–(9) для $t > t_0$ с течением времени асимптотически стремится к функциям (10) даже при задании начальных данных, не соответствующих виду (10). Осуществляется, как говорят, асимптотический «выход» на этот режим с неавтомодельных начальных данных [12, 50, 70, 126]. При этом зависимость решения от дополнительных безразмерных параметров, содержащихся в неавтомодельных начальных данных, с течением времени становится слабой и эти параметры не оказывают влияния на дальнейший, автомодельный ход процесса.

Например, если в течение процесса плазме сообщается энергия, то критерием «выхода» на асимптотический автомодельный режим может служить неравенство $E(t)/E(t_0) \gg 1$, где $E(t) =$

$$= \int_0^{x_0} \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} \right) dx.$$

В этом случае сообщенная плазме энергия становится с течением времени сколь угодно большой по сравнению с энергией, содержащейся в плазме в начальный момент времени. Дополнительный параметр, характеризующий начальные данные, $\frac{E(t_0)}{E(t)} \rightarrow 0$ с течением времени.

1.5. Условия автомодельности. Потребуем теперь, чтобы функции (10) удовлетворяли соотношениям (2), (3). Произвольная (нестепенная) зависимость в (2), (3) возможна, как отмечено выше, только в виде функции от безразмерной комбинации искомого функций. Практически, это означает появление в (2), (3) выражений типа $y = aT^m \rho^k t^l$, где y — безразмерна, a — соответствующий размерный параметр, имеющийся в задаче. Фактически, в (3) есть такие комбинации: $a_8 T_i^{m_8} \rho^{k_8} t^{l_8}$ и $a_9 T_i^{m_9} \rho^{k_9} t^{l_9}$.

Подстановка (10) в (2) и (3) приводит к условиям на показатели m_i, k_i, l_i , подобно тому как условия на n_1, n_2 и n_3 были получены подстановкой (10) в граничные условия (6) — (8). Подстановка (10) в (2), (3) означает проведение размерностного анализа постоянных a_i : как величины постоянные, все a_i должны быть выражены только через масштабы x_0, v_0 и R . В результате получим следующие соотношения:

$$n_i = \frac{2m_i - l_i - d_i}{2m_i - k_i(N+1) + c_i}, \quad (13)$$

где для $i=1, 2, 3, 5$ $d_i=1, c_i=N-1$;

для $i=4$ $d_i=1, c_i=N+1$;

для $i=6, 7, 10$ $d_i=3, c_i=N-1$;

для $i=8, 9$ $d_i=0, c_i=0$,

$$n_1 = 2n - 2, n_2 = (2 - N)n - 3, n_3 = (1 - N)n - 2.$$

При этом размерные постоянные a_i выражаются через определяющие параметры следующим образом:

$$a_i = A_i v_0^{k_i(N+1) - 2m_i - c_i} x_0^{-\tilde{k}_i} R^{\tilde{m}_i}, \quad (14)$$

где для $i=1, 2$ $c_i=N-1, \tilde{k}_i=k_i-1, \tilde{m}_i=m_i+1$;

для $i=3, 5, 6, 7, 10$ $c_i=N-1, \tilde{k}_i=k_i-1, \tilde{m}_i=m_i$;

для $i=4$ $c_i=N+1, \tilde{k}_i=k_i-1, \tilde{m}_i=m_i+1$;

для $i=8, 9$ $c_i=0, \tilde{k}_i=k_i, \tilde{m}_i=m_i$.

Здесь A_i — соответствующие безразмерные постоянные.

Для каждого частного варианта модели (1) можно найти соответствующие выражения (13), (14). Так, например, при учете одной электронной теплопроводности в соответствии с [15]

$$\kappa_e = \frac{2,37}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{m_p^{7/2}}{\Delta e \sqrt{m_e}} M_i^{7/2} R^{7/2} T_e^{5/2},$$

где Δ — так называемый кулоновский логарифм, e и m_e — заряд и масса электрона, m_p — масса протона, $M_i = \frac{m_i}{m_p}$ — массовое число иона плазмы (m_i — масса иона), а кратность ионизации Z положена равной единице (плазма состоит из одинакового числа

электронов и однократно заряженных ионов). Здесь $m_1 = \frac{5}{2}$, $k_1 = l_1 = 0$, $a_1 = \frac{2,37}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{m_i^3 \sqrt{m_i/m_e}}{\Lambda e^4} R^{7/2}$. В соответствии с (13) получаем $n = \frac{4}{4+N}$, из (14) $a_1 = A_1 v_0^{-(N+4)} x_0 R^{7/2}$. Отсюда можно определить значение безразмерной постоянной $A_1 = \frac{2,37}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{m_i^3 \sqrt{m_i/m_e}}{\Lambda e^4 x_0} v_0^{N+4}$.

Таков пример размерностного анализа для одного реального коэффициента теплопроводности плазмы в случае, когда величина Λ считается постоянной. На самом деле, она слабо (логарифмически) зависит от температуры и плотности: $\Lambda = \ln \frac{K_{ii}}{4\pi}$ для больших K_{ii} . Параметр K_{ii} определяет возможность использовать уравнения состояния идеального газа. Энергии взаимодействия ионов и электронов можно пренебречь, когда $K_{ii} = \frac{k_B^{3/2} m_i^{1/2}}{e^3} \sqrt{\frac{M_i}{Z}} T_e^{3/2} \rho^{-1/2} \gg 1$.

Если необходимо учесть в задаче и зависимость κ_e от кулоновского логарифма (Λ — безразмерная функция от безразмерного аргумента $(4\pi)^{-1/2} K_{ii}$), то нужно подвергнуть размерностному анализу безразмерную комбинацию $K_{ii} = a_K T_e^{3/2} \rho^{-1/2}$. Но в (13) содержатся выражения для безразмерных комбинаций: это члены с $i = 8, 9$. Подставляя $m_8 = 3/2$, $k_8 = -1/2$, получим $n = \frac{6}{7+N}$. Результаты вышеприведенного анализа для a_1 , m_1 и k_1 сохраняются с учетом замены a_1 на $a_1 \Lambda$ (Λ — безразмерна). Приравняв выражения $\frac{4}{4+N}$ и $\frac{6}{7+N}$ друг другу, получим, что учет в уравнениях (1) процесса электронной теплопроводности с зависимостью ее коэффициента от кулоновского логарифма возможен при $N = 2$ (т. е. в случае сферической симметрии). В этом случае $n = \frac{2}{3}$.

1.6. Система уравнений для безразмерных функций $f_i(\xi)$ из (12). Она может быть получена подстановкой (10) в (1), а граничные условия для этой системы (т. е. значения $f_i(0)$ и $f_i(1)$) получаются после подстановки (10) в общие граничные условия (4) — (9).

Разделение переменных (10) несколько упрощает структуру системы безразмерных уравнений по сравнению с (1). Именно, подставляя в уравнение траекторий $\partial r / \partial t = v$ соответствующие величины из (10), получим:

$$\alpha(\xi) = n\lambda(\xi). \quad (15)$$

Таким образом, в автомодельных задачах о движении конечной массы скорость линейно растет с радиусом. Класс течений (15) является частным случаем течений с однородной деформацией [126]. В формулах (10), (15) функция $\lambda(\xi)$ пропорциональна переменной Лагранжа $a_0 = r(x, t_0)$, t_0 — некоторый момент времени [100].

Учитывая (15) и подставляя соответствующие величины из (10) в уравнение неразрывности $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (r^N v)$, получим

$$\frac{d\xi}{d\lambda} = \delta \lambda^N. \quad (16)$$

Это соотношение представляет собой безразмерный аналог закона изменения объема [111], совпадающее в данной автомодельности с выражением для массовой координаты $dx = \rho r^N dr$. Теперь, подставляя (10) в (1), удобнее с помощью (16) перейти к системе уравнений относительно безразмерного радиуса λ как независимой переменной. При этом уравнение неразрывности и уравнение траекторий можно уже не рассматривать. Величины ξ и α в силу этого не войдут в искомую систему уравнений, и для их определения следует использовать (15) и (16).

Выполняя указанные действия, получим:

$$\begin{aligned} n(1-n)\delta\lambda &= \frac{d}{d\lambda}(\beta - \tau); \\ n_\gamma \beta_i &= -\frac{1}{\lambda^N} \frac{d}{d\lambda}(\lambda^N \omega_i) + \Phi + q_i + q_{ei}; \\ n_\gamma \beta_e &= -\frac{1}{\lambda^N} \frac{d}{d\lambda}(\lambda^N \omega_e) + q_e - q_{ei} - q_R; \\ \omega_e &= -\tilde{\kappa}_e \frac{d\theta_e}{d\lambda}; \quad \omega_i = -\tilde{\kappa}_i \frac{d\theta_i}{d\lambda}; \\ \tau &= \frac{2}{3} n\tilde{\eta}(2-N) + n(N+1)\tilde{\xi}; \quad \Phi = n(\tau + N\tau'); \\ \tau' &= \frac{2}{3} n\tilde{\eta} \left[\frac{N}{2}(7-3N) - 1 \right] + n(N+1)\tilde{\xi}; \quad \beta = \beta_i + \beta_e; \\ \beta_i &= \delta\theta_i; \quad \beta_e = \delta\theta_e \cdot Z; \quad \tilde{\kappa}_e = A_1 \theta_e^{m_1} \delta^{k_1}; \\ \tilde{\kappa}_i &= A_2 \theta_i^{m_2} \delta^{k_2}; \quad \tilde{\eta} = A_3 \theta_i^{m_3} \delta^{k_3}; \quad \tilde{\chi} = A_4 \theta_e^{m_4} \delta^{k_4}; \\ \tilde{\xi} &= A_5 \theta_i^{m_5} \delta^{k_5}; \quad q_R = A_{10} \theta_e^{m_{10}} \delta^{k_{10}}; \quad q_{ei} = \tilde{\chi}(\theta_e - \theta_i); \\ q_i &= \frac{A_6 \theta_i^{m_6} \delta^{k_6}}{1 + A_7 \theta_i^{m_7} \delta^{k_7}}; \quad q_e = \frac{A_7 \theta_i^{m_7} \delta^{k_7}}{1 + A_8 \theta_i^{m_8} \delta^{k_8}}; \\ n_\gamma &= \frac{2}{\gamma-1} m_*; \quad m_* = \frac{n}{n_*} - 1; \quad n_* = \frac{2}{2 + (N+1)(\gamma-1)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Член $\frac{N(\tau-\tau')}{\delta\lambda}$ в уравнении движения выпадает, так как $\tau=\tau'$ при $N=1$ и $N=2$, причем для $N=2$ будет $\tau=\tau'=3n\tilde{z}$.

Система (17) рассматривается на отрезке $0 \leq \lambda \leq \lambda_*$, где λ_* — безразмерная координата поршня. На концах этого отрезка задаются соответствующие граничные условия.

При $\lambda=0$, как следует из (4), должно быть

$$\omega_e = \omega_i = 0. \quad (18)$$

Условие $v(0, t) = 0$ удовлетворяется автоматически, так как $\alpha = n\lambda$ и $\alpha = 0$ при $\lambda = 0$.

При $\lambda = \lambda_*$ условие (5) дает соотношение $\alpha(\lambda_*) = 1$. С учетом (15) в этом случае имеем

$$\lambda_* = \frac{1}{n}. \quad (19)$$

Если на правом конце задано давление (8) или (9), то

$$\beta(\lambda_*) - \tau(\lambda_*) = \beta_*, \quad (20)$$

где $\beta_* = p_0 v_0^{N-1} x_0^{-1}$. В этом случае значение λ_* находится из решения с учетом выражения для полной массы

$$\int_0^{\lambda_*} \delta\lambda^N d\lambda = 1. \quad (21)$$

Наконец, вместо (6), (7) будем иметь

$$\theta_e(\lambda_*) = \theta_e^*, \quad \text{либо} \quad \omega_e(\lambda_*) = \omega_e^*, \quad (22)$$

$$\theta_i(\lambda_*) = \theta_i^*, \quad \text{либо} \quad \omega_i(\lambda_*) = \omega_i^*, \quad (23)$$

где $\theta_{i,e}^* = T_{0i,e} R v_0^{-2}$, $\omega_{i,e}^* = W_{0i,e} v_0^{N-2} x_0^{-1}$.

Система (17) подлежит решению вместе с граничными условиями (18), (19), либо (20) и (21), (22), (23).

1.7. Формулировка автомодельной задачи сжатия плазмы. При выполнении условий (13), (14) и предположения о несущественности начальных данных (асимптотический характер решения) у задачи (1) — (9) имеется решение вида (10). Если при этом $0 \leq t < +\infty$, $t \rightarrow +\infty$, $n > 0$, то такое решение описывает расширение плазмы. В частном случае $p(x_0, t) - D(x_0, t) = 0$ имеем задачу о разлете вещества в вакуум.

При учете теплопроводности и тепловыделения такие задачи рассматривались ранее в [106, 107]. В сложившейся терминологии такие решения (с разделением переменных) принято называть регулярными режимами. Исследования регулярных режимов для системы уравнений магнитной газодинамики были выполнены при исследовании «эффекта Т-слоя» [20, 24, 28, 130]. Во всех этих работах получен значительный объем результатов для случая расширения плазмы.

Основной особенностью изученного в этих работах режима являлась локализация тепловых, газодинамических и магнито-гидродинамических процессов. В данном случае (см. также гл. 1) это означало отсутствие движения по массе тепловых и магнито-тепловых волн. Осуществление автомодельного режима приводило к решениям в разделяющихся переменных x и t . В таких решениях отсутствуют возмущения конечной амплитуды (в том числе и ударные волны), передаваемые от одного участка разлетающейся массы плазмы к другому.

Всякие неоднородности в распределении температуры или плотности по пространству оказываются в таких режимах «привязанными» к одному и тому же участку массы плазмы в течение всего процесса. В самом деле, положение эффективной границы какой-либо неоднородности (точка, например, наибольшее значение градиента $df/d\xi$ этой величины) дается в автомодельной задаче некоторым фиксированным значением ξ_1 . Изменения со временем лагранжевой координаты этого фронта нет, так как $x_1 = \xi_1 x_0$ не зависит от времени. Исследованные в задачах [20, 24, 28, 130] тепловые структуры (т. е. максимумы в распределении температуры, обязанные своим происхождением объемному источнику тепла) существуют в плазме именно благодаря наличию такой локализации.

Вместе с тем существует ряд ситуаций, когда представляет интерес изучение процесса сжатия плазмы. Это могут быть задачи магнитной кумуляции, задачи о сжатии плазмы вследствие абляционного ускорения слоев сферической мишени, облучаемой пучками высокоэнергетичных электронов, ионов или лазерного излучения, задачи ускорения цилиндрических проводящих оболочек мощными импульсами тока и сжатия газа внутри них и т. д. Можно ли использовать результаты размерностного анализа (10), (13), (14) для описания сжатия плазмы?

Поскольку из (10) следует, что радиус любого элемента массы $r(x, t) \sim t^n$, и, как мы видели, для физически разумных ситуаций величина $n > 0$, то уменьшение $r(x, t)$ возможно лишь при уменьшении $|t| : |t| \rightarrow 0$. Такой подход однозначно приводит к необходимости изучения процессов с обострением.

Примерами использования в автомодельных задачах «отрицательного времени» ($|t| \rightarrow 0$, $-\infty < t < 0$) служат разнообразные задачи кумуляции [12, 16, 62, 128, 134], в которых возникновение режимов с обострением вызвано специальными видами начальных данных или геометрическими факторами.

Существование автомодельного решения с кумулирующейся ударной волной [134] служит еще одним аргументом использования автомодельных режимов с обострением для описания газодинамических процессов сжатия, обладающих свойством локализации (безударное сжатие). В самом деле, движение поршня, сжимающего конечную массу газа в обычном режиме (без обострения), может вызвать появление сходящейся удар-

ной волны. Кумуляция этой ударной волны на ось или центр симметрии системы приводит к росту давления на ее фронте в режиме с обострением. В этом случае, когда сходящаяся ударная волна становится автомодельной, газодинамические процессы у центра (оси) развиваются независимо от закона изменения давления на поршне. На асимптотической стадии, как правило, проявляют свои закономерности те процессы, развитие которых осуществляется наиболее быстрым образом [34].

Чтобы обеспечить безударное сжатие, давление и плотность в котором растут согласованно по всей массе плазмы, необходимо использовать на поршне режим с обострением [70]. Такой режим во многих практических задачах [22, 59, 112] является оптимальным, так как приводит к достижению заданных сжатий¹⁾ с минимальными энергетическими затратами. Легко видеть [62, 128], что в режиме автомодельной кумуляции ударной волны давление за ее фронтом и, тем более, на некоторой фиксированной массе пришедшего в движение газа растет на асимптотической стадии не быстрее чем $(-t)^{-2}$, в то время как в любом S-режиме (10) при $N=1$ или $N=2$ давление на фиксированной массе растет не медленнее, чем $(-t)^{-2}$.

Изучению режимов безударного (оптимального) сжатия в задачах газовой динамики посвящен ряд работ [12, 16, 62, 128, 134]. Исследованные там решения получены с использованием инвариантов Римана и могут описывать более широкий класс ситуаций, чем решения (10). Вместе с тем на асимптотической стадии ($t \rightarrow 0$) зависимости величин от времени в этих решениях стремятся к соответствующим зависимостям из формул (10).

Привлекательность решений (10) состоит в следующем.

Во-первых, разделение переменных (10) автоматически обеспечивает принадлежность этих решений к классу режимов безударного сжатия.

Во-вторых, решения (10) справедливы не только для задач газовой динамики, но и для сплошных сред с учетом большого числа диссипативных процессов, причем с характерными зависимостями коэффициентов от температуры и плотности, близкими к реальным.

В-третьих, аналогично случаю регулярного режима разлета, анализ решений (10) для сжатия приводит к условиям возникновения и самоподдержания в таких задачах тепловых диссипативных структур (а также структур магнитного поля — см. § 4).

В-четвертых, режимы сжатия, определенные по (10), обнаруживают определенную «симметрию» с режимами разлета. В частности, поршень, координата которого $r(x_0, t) \sim t^n$ для отрезка времени $-t_0 < t < 0$, $t_0 > 0$ повторяет траекторию такого

¹⁾ Причем весьма значительных: обсуждается увеличение начальной плотности в $10^3 + 10^4$ раз.

же поршня для отрезка времени $0 < t < t_0$, но в обратном порядке. Очевидно, что решения (10) для таких задач из общих термодинамических соображений различны. Тем не менее, именно в классе S-режимов (10) можно указать (см. § 3) условия существования нетривиальных¹⁾ «зеркальных во времени» решений, в которых плотность, давление, температура на стадии сжатия повторяют в обратном порядке свои изменения на стадии расширения. Тем самым, решается вопрос о возможности «обращения времени» в диссипативной среде, а в более общем плане — о соотношении решений вида (10) для расширения и сжатия плазмы, описываемой с учетом одного и того же набора физических процессов (1) — (3).

Перейдем теперь к изложению метода, позволяющего использовать в (10) значения времени из промежутка $-\infty < t < 0$.

Используя подход, изложенный в гл. 1, решение (10) можно переформулировать в других терминах (не нарушая размерностного анализа), взяв зависимость граничных режимов в виде $\sim (t_f - t)^{n_i}$, и рассматривать время текущим от некоторого t_0 до t_f : $t_0 \leq t < t_f$. Соответствующие замены t^{t_i} на $(t_f - t)^{t_i}$ следует произвести и в (2), (3).

В момент фокусировки $t = t_f$ величины, у которых $n_i < 0$ в (10) (например, плотность или давление при $N \neq 0$), обращаются в бесконечность.

Само значение t_f несущественно, так как исходная система уравнений (1) допускает сдвиг по времени: момент фокусировки t_f можно поместить в любую точку оси времени. В частности, при сдвиге $t' = t - t_f$ (t' — новое время) момент фокусировки $t'_f = 0$ и зависимости (10) имеют вид $\sim (-t')^{n_i}$. Опуская штрих у «нового времени», получаем зависимости, рассмотренные во введении. При этом $-\infty < t < 0$.

В ранних работах [65—69] применялся несколько иной (в деталях, а не по существу) подход, эквивалентный по получающимся результатам вышеприведенному. Смысл этого подхода в удобстве рассмотрения системы уравнений для безразмерных функций $f_i(\xi)$ из (12) одновременно для задач сжатия и разрежения: с точностью до знаков постоянных величин A_i эти системы совпадают.

Такой подход основан на требовании единообразия формул (10) для задач сжатия и разрежения. В этом случае и в задаче сжатия ($-\infty < t < 0$, $t < 0$), и в задаче разрежения ($0 < t < +\infty$, $t > 0$) используется одна и та же система (10) искомых функций. Поскольку в (10) слева стоят размерные действительные величины, то в правых частях равенств (10) должны появиться комплексные выражения $(t^{n_i}$, $t < 0$ и $v_0^{u_i}$, где u_i — соответствующая степень

¹⁾ Т. е. в случае несохранения энтропии.

в (10)), произведения которых дают действительные функции. Покажем, что это свойство имеет место в (10).

Представим множитель $(-t)^{n_i}$ в виде $(-1)^{n_i} t^{n_i}$ и укажем правило, по которому $t < 0$ возводится в степень. Будем считать, что $c = |c| e^{i\varphi}$ и $c^n = |c|^n e^{in\varphi}$, где $|c|$ и φ — модуль и аргумент некоторого комплексного числа c .

Тогда достаточно считать в (5) и (10), что параметр v_0 есть комплексное число и $\arg(v_0) = -\pi n$, т. е. $v_0 = (-1)^{-n} |v_0|$. В самом деле, комплексные выражения в (5) и (10) появляются только в комбинации $v_0 t^n$, которая должна быть положительна. Действительно, если $v_0 t^{n-1} = v(x_0, t)$ — скорость поршня, то $\frac{1}{n} v_0 t^n = r(x_0, t) > 0$ — его радиус ($\partial r / \partial t = v$, $n > 0$). При этом в случае сжатия скорость поршня $v(x_0, t) = \frac{nr(x_0, t)}{t}$ отрицательна, так как $t < 0$, а в случае разрежения — положительна. Легко видеть, что вследствие (10) всюду $v(x, t) = \frac{nr(x, t)}{t}$, т. е. для случая сжатия всюду $v < 0$.

Положительность произведения $v_0 t^n$, необходимая для $r(x, t) > 0$ и действительности других функций из (10), обеспечена требованием $v_0 = |v_0| (-1)^n$, так как

$$v_0 t^n = |v_0| (-1)^n (-1)^n |t|^n = |v_0| \cdot |t|^n > 0.$$

Рассмотрим при этом выражения (10). Из них следует, что при любом $n > 0$ и $t < 0$ (задача сжатия) величины $\lambda, \alpha, \beta, \delta, \theta, \theta_e$ — неотрицательны, как и размерные величины, которые они представляют. Функции $\kappa_e, \kappa_i, \eta, \xi, \chi, q_i, q_e$ и q_R — всюду неположительны, знаки τ и τ' совпадают со знаками соответствующих размерных величин, а знаки ω_e и ω_i — противоположны знакам размерных тепловых потоков W_e и W_i соответственно.

При этом знаки производных $\frac{\partial T_{e,i}}{\partial r}$ и $\frac{d\theta_{e,i}}{d\lambda}$ одинаковы.

Для задач разрежения, где $v_0 > 0$, $t > 0$, знак любой безразмерной величины совпадает со знаком соответствующей размерной.

Проанализируем теперь выражения (14) при $v_0 = |v_0| (-1)^{-n}$. Рассмотрим сначала случай $l_i = 0$. Тогда размерные величины $a_i > 0$ по своему физическому смыслу. Легко видеть, что показатели степеней u_i у $v_0^{u_i}$ в правых частях выражений (14) представимы в виде $u_i = -\frac{b_i}{n}$, где b_i — числитель соответствующего данному номеру i условия автомодельности (13). Следовательно, $v_0^{-b_i/n} = [|v_0|^{-1/n} (-1)]^{b_i}$. Теперь заметим, что $b_i = 2m_i - d_i$, где $d_i = 1$ для $i = 1, 2, \dots, 5$, $d_i = 3$ для $i = 6, 7, 10$ и $d_i = 0$ для $i = 8, 9$. Таким образом, d_i — нечетно в выражениях для размерных коэффициентов и равно нулю в выражениях для безразмерных. Но тогда $v_0^{-b_i/n} = |v_0|^{-b_i/n} [(-1)^{2m_i} (-1)^{d_i}]$. Знак этого

выражения определяется значением величины d_i . Так, для размерных коэффициентов $v_0^{-b_i/n} = (-1)|v_0|^{-b_i/n} < 0$, для безразмерных $v_0^{-b_i/n} = |v_0|^{-b_i/n} > 0$, так как $d_i = 0$. Следовательно, в выражениях (14) $A_i < 0$ для $1 \leq i \leq 7$, $i = 10$, и $A_i > 0$ для $i = 8, 9$.

В случае $l_i \neq 0$ соответствующий аргумент, появляющийся при возведении в степень t^{l_i} , должен быть приписан размерной постоянной a_i . При этом приведенный выше анализ знаков величин A_i остается в силе. Примеры выражений (2) для $l_i \neq 0$ [24, 63, 65, 66] будут приведены ниже при построении аналитических решений системы безразмерных уравнений.

Для задачи разрежения, где $v_0 > 0$, $t > 0$, все $A_i > 0$.

Обратим внимание на то, что в задачах сжатия отрицательность коэффициентов диссипации $\tilde{\eta}_{e,i}$, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\xi}$, $\tilde{\chi}$ и безразмерных источников $q_{e,i}$, q_{ei} , q_R определяется в системе уравнений (17) их выражениями через A_i и безразмерные температуры $\theta_{e,i}$ и плотность δ : $A_i \theta^{m_i} \delta^{k_i}$. Формулы для $T_{e,i}$ и ρ в (10) таковы, что при возведении в степень $T_{e,i}^{m_i}$ и ρ^{k_i} знаки всех сомножителей в правых частях не меняются. Поэтому следует считать $\theta_{e,i}^{m_i}$ и δ^{k_i} неотрицательными при любых m_i и k_i . Например, пусть $n = 1$ ($v_0 = -|v_0|$), а $m = \frac{1}{2}$. Тогда $T = \frac{v_0^2}{R} t^{-2} \theta(\xi)$ и $T^{1/2} = \frac{|v_0|}{R^{1/2}} \times \times |t|^{-1} \theta^{1/2}(\xi)$, где $\theta^{1/2} > 0$. Запись $T^{1/2} = \frac{|v_0|}{R^{1/2}} t^{-1} \theta^{1/2}(\xi)$ с $\theta^{1/2} < 0$ привела бы в общем случае, как показано ниже (§ 2), к нарушению второго начала термодинамики.

Таким образом, единственное отличие описания автомодельной задачи сжатия от задачи разрежения с помощью системы (17) состоит в следующем. Знаки безразмерных постоянных A_i в выражениях для коэффициентов диссипации в системе автомодельных уравнений отрицательны в задачах сжатия и положительны в задачах разрежения. На основе сделанных здесь утверждений можно провести качественный анализ системы (17) и сравнить поведение решений для автомодельных сжатия и разрежения одной и той же среды.

Сформулированный принцип перехода от автомодельной задачи разрежения к автомодельной задаче сжатия, состоящий в введении в граничные законы режимов с обострением и в смене знаков A_i (и знака скорости v), справедлив и более общем случае, когда параметр конечной массы x_0 в задаче не содержится. Это открывает широкий простор для исследования нового класса граничных режимов — режимов с обострением — опирающегося на хорошо изученные [19—21, 23—28, 40, 41, 86, 87, 107, 106, 126, 128, 141] автомодельные задачи степенного вида, в которых $0 < t < +\infty$, $t \rightarrow +\infty$.

§ 2. Эффекты локализации и образования структур

2.1. Неподвижность эффективных фронтов тепловых волн.

Рассматриваемое здесь решение (10) системы (1) описывает движение сплошной среды, в котором в силу разделения переменных отсутствуют ударные волны, а фронты тепловых волн неподвижны по массе.

Отсутствие ударных волн доказывается тем фактом, что массовая координата фронта волны $x_{ув}$ связана вследствие (10) с безразмерной координатой $\xi_{ув}$ соотношением $x_{ув} = \xi_{ув} \cdot x_0$. Число $\xi_{ув}$ должно быть найдено из решения системы автомодельных уравнений. При этом $x_{ув}$ не зависит от времени (свойство S -режима). Но тогда отсутствует поток массы через фронт ударной волны, что противоречит ее определению.

Характерная глубина проникновения тепла от поршня за счет процесса теплопроводности есть $l_T \simeq \sqrt{\frac{\kappa}{\rho R} |t|}$. С учетом (10) это выражение принимает вид $l_T \simeq v_0 t^n \sqrt{|\tilde{\kappa}|/\delta}$. Отношение l_T к радиусу поршня $r(x_0, t) = v_0 t^n \lambda_*$ остается постоянным. Следовательно, размеры тепловых неоднородностей в процессе сжатия уменьшаются так же, как и размеры сжимаемой среды.

Чтобы оценить глубину прогрева в массовых координатах, составим выражение $x_T = \rho r^N l_T$. Тогда получим, что глубина про-

никновения тепла по массе есть $x_T \simeq \sqrt{\frac{\kappa_{л}}{R} |t|} = x_0 \sqrt{|\tilde{\kappa}_{л}|}$, где

$\kappa_{л} = \rho r^{2N} \tilde{\kappa} = \frac{x_0^2 R}{t} \tilde{\kappa}_{л}$ — «лагранжев» коэффициент теплопроводности,

а $\tilde{\kappa}_{л} = \delta \lambda^{2N} \tilde{\kappa}$. Отсюда видно, что x_T не зависит от времени. Следовательно, любые выделенные точки в профиле температуры (например, максимумы $T_e(x, t)$ или $T_i(x, t)$) находятся на одном и том же участке массы, связаны с одними и теми же жидкими частицами среды.

В первоначальных работах [66—70, 88, 89, 91] именно это свойство, присущее решениям в разделяющихся переменных, получило название эффекта локализации. Первый пример решения в разделяющихся переменных, демонстрирующего эффект локализации тепла в неподвижной среде с нелинейной теплопроводностью, был приведен в [122]. Его дальнейшее изучение получило значительное развитие при анализе чисто тепловых задач (без учета газодинамического движения) [70, 76, 88—90, 92, 93, 118, 120]. Существенным было выделение класса решений, в которых воздействие режима с обострением на неограниченную среду вызывало изменения лишь в конечном ее участке. При этом, как было показано, локализация имела место не только в решениях с разделяющимися переменными (например, в LS -режиме) [32, 70, 76, 118]. Был изучен и процесс «выхода»

на локализованный режим (не обязательно автомодельный), во время которого фронты тепловых волн продвигались по массе.

В дальнейшем так понимаемое свойство локализации было обнаружено и в задачах газовой динамики (см. гл. 1), а с помощью построенной математической теории обобщено на широкий класс режимов с обострением (как граничных, так и возникающих в самой среде за счет объемных источников тепла) [29—37, 57, 58, 115, 117—120]. Результаты таких исследований привели к формулировке некоторого общего понятия «инерции тепла» [77].

Таким образом, изучение явлений «инерционности» различного рода воздействий на сплошную среду с помощью теоретического и численного анализа различных математических моделей привело к созданию теории, связывающей действие в среде режимов с обострением с эффектом локализации тепловых и газодинамических процессов и с условиями возникновения в ней соответствующих структур, т. е., в конечном счете, с выяснением закономерностей самоорганизации среды.

Отметим теперь следующую особенность решений (10). Пусть $T_i(x, t) = T_e(x, t)$. Однотемпературное приближение справедливо, если время релаксации температур, пропорциональное χ^{-1} , мало по сравнению с характерным временем сжатия или расширения. Пусть при этом профиль температуры не монотонен по массе: максимумы $T(x, t)$ чередуются с минимумами. Примеры таких решений приведены ниже в п. 2.6 и наглядно иллюстрируются рис. 15 и рис. 17. Выделим теперь мысленно участок среды между двумя соседними минимумами. Тепловые потоки на границах этой неизменной со временем массы равны нулю. Следовательно, выделенный участок среды представляет собой замкнутую в термодинамическом отношении систему. Тогда если максимум температуры в этом участке обязан своим происхождением действию объемного источника тепла $Q(\rho, T)$, то, в соответствии со вторым началом термодинамики, энтропия этой массы должна возрастать. Это утверждение позволяет связать немонотонность профиля температуры, характеризующую свойства решений системы (17) автомодельных уравнений, с законом изменения во времени энтропии, который просто следует из вида (10). Тем самым, формулируется необходимое условие существования немонотонного по пространству решения и, следовательно, наличия в среде максимумов температуры (тепловых структур).

2.2. Качественное исследование системы уравнений для безразмерных функций (17). В общем случае оно представляет собой сложную задачу. Тем не менее, при анализе (17) можно выявить некоторые общие закономерности. Наиболее существенной из них является связь между изменением во времени полной энтропии системы и наличием или отсутствием немонотонностей в профиле температуры. Именно, появление тепловых

структур, т. е. локализованных на определенных участках массы максимумов температуры $\vartheta_e(\lambda)$ или $\vartheta_i(\lambda)$ в сжимаемой или расширяющейся по автомодельным законам (10) среде однозначно связано с ростом энтропии среды со временем.

Для выяснения указанной выше связи между изменением энтропии системы со временем и характером профиля температуры рассмотрим сначала однотемпературную задачу. В ней $T_i = T_e$, $p = p_i + p_e = \rho R (1 + Z) T$, $\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_e = \frac{R}{\gamma - 1} (1 + Z) T$.

В соответствии с (10) энтропийная функция

$$\Sigma = p \rho^{-\gamma} = x_0^{1-\gamma} (v_0 t^n)^{2/n_*} t^{-2\beta} \beta(\xi) \delta^{-\gamma}(\xi),$$

где, с использованием (17), $\frac{2}{n_*} = 1 - N + \gamma(N + 1)$. Интересуясь временной зависимостью функции Σ , можно записать

$$\Sigma = x_0^{1-\gamma} |v_0|^{2/n_*} |t|^{2\left(\frac{n}{n_*} - 1\right)} \beta(\xi) \delta^{-\gamma}(\xi),$$

т. е. $\Sigma \sim (t^2)^{m_*}$ одновременно для режимов сжатия и разрежения.

Энтропия единицы массы S выражается через Σ следующим образом: $S = c_V \ln \frac{\Sigma}{\Sigma_c}$, где Σ_c — размерная константа, а $c_V = \frac{R(1+Z)}{\gamma-1}$. Логарифмируя выражение для Σ , получаем:

$$S = c_V \left(\frac{n}{n_*} - 1 \right) \ln t^2 + c_V \ln \beta \delta^{-\gamma} + c_V \ln \Sigma_c^{-1} x_0^{1-\gamma} |v_0|^{2/n_*}. \quad (24)$$

Изменение энтропии со временем дается формулой

$$\frac{dS}{dt} = c_V \left(\frac{n}{n_*} - 1 \right) \frac{2}{t} = c_V \frac{2m_*}{t}. \quad (25)$$

Отсюда следует, что для режимов сжатия ($-\infty < t < 0$, $t \rightarrow 0$) энтропия нарастает в режиме с обострением при $m_* < 0$ (т. е. при $n < n_*$), постоянна при $m_* = 0$ ($n = n_*$) и убывает при $m_* > 0$ ($n > n_*$). В режимах расширения наоборот: энтропия убывает при $m_* < 0$ ($n < n_*$) и растет при $m_* > 0$ ($n > n_*$). Легко видеть, что в рассматриваемом здесь случае разделения переменных энтропия всей системы (полная энтропия), равная $S_{\Pi} = \int_0^{x_0} S dx$, ведет себя со временем точно так же, как и удельная S :

$$\frac{dS_{\Pi}}{dt} = c_V x_0 \frac{2m_*}{t}. \quad (26)$$

Теперь оказывается возможным провести элементарный качественный анализ (17) (сначала для однотемпературной среды), руководствуясь только принципом возрастания энтропии в замкнутой термодинамической системе.

Установим сначала, в каких случаях существуют решения системы (17) в отсутствие теплопроводности.

Если в среде при этом отсутствуют и другие диссипативные процессы (источники и стоки тепла), то ее энтропия неизменна. Значит, решения такой адиабатической задачи возможны лишь при $n = n_*$ (т. е. $m_* = 0$). В самом деле, при этом уравнение энергии в (17) сводится к $n_* \beta = 0$ и нетривиальное решение $\beta(\lambda)$ соответствует случаю $n_* = 0$.

Пусть теперь в среде присутствуют только источники тепла. Тогда энтропия системы должна возрастать. Это означает, что решение существует лишь при $n < n_*$ (т. е. $n_* < 0$) для сжатия и при $n > n_*$ (т. е. $n_* > 0$) для разрежения. Для уравнений системы (17) это означает, что знак безразмерных источников (φ , q_i и т. д.) совпадает со знаком величины n_* . Тем самым, формальный анализ, определивший знаки безразмерных A_i , дает правильное значение изменению энтропии. Например, при сжатии энтропия замкнутой термодинамической системы с энергосыделением будет возрастать лишь при условии, что соответствующий коэффициент A_i в члене источника отрицателен.

Далее, очевидно, что если в среде присутствуют только стоки тепла, то решение существует при $n > n_*$ для сжатия и $n < n_*$ для разрежения.

Если в среде присутствует теплопроводность ($\tilde{\eta} \neq 0$), то решение существует при любых $n > 0$ с соответствующими значениями граничных величин (θ_* или ω_*). При этом поведение энтропии диктует тот или иной характер профиля температуры.

Заметим, что при $\tilde{\eta} \neq 0$ появляется удобное соотношение, определяющее возрастание или убывание энтропии как для режимов сжатия, так и разрежения. Именно, если

$$\text{sign } m_* = \text{sign } \tilde{\eta}, \quad (27)$$

то энтропия возрастает. В самом деле, для сжатия $\tilde{\eta} < 0$, а энтропия возрастает при $m_* < 0$ (см. (25)). Для разрежения $\tilde{\eta} > 0$, и энтропия возрастает при $m_* > 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда в среде отсутствуют любые диссипативные процессы, кроме теплопроводности.

При этом, если энтропия S каждого элемента массы возрастает (см. (25)), то профиль температуры θ должен быть монотонно растущим от центра к поршню. В самом деле, только поток тепла за счет теплопроводности от границы плазмы может увеличить энтропию среды в этом случае. Если же энтропия убывает, то, напротив, профиль температуры θ должен быть монотонно падающим от центра к поршню. Вывод тепла за счет теплопроводности обеспечивает убывание энтропии в каждом элементе массы.

Из системы (17) в этом случае с учетом $\omega(0) = 0$ следует, что

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{n_{\gamma} \int_0^{\lambda} \beta \lambda^N d\lambda}{\tilde{\kappa} \lambda^N}. \quad (28)$$

Знак $d\theta/d\lambda$ в (28) определяется знаком отношения $\frac{n_{\gamma}}{\tilde{\kappa}} = \frac{2}{\gamma-1} \times \frac{m_*}{\tilde{\kappa}}$. Если m_* и $\tilde{\kappa}$ одного знака, то $d\theta/d\lambda > 0$, в противном случае $d\theta/d\lambda < 0$. Тем самым, правильный знак $d\theta/d\lambda$, согласующийся со вторым началом термодинамики, определяется при качественном анализе (17) в том и только в том случае, если знаки A_i выбраны в соответствии со сформулированным правилом: $A_i < 0$ для диссипативных процессов при рассмотрении сжатия.

Отметим, что в частном случае $m_* = 0$ производная $\frac{d\theta}{d\lambda} = 0$. Таким образом, адиабатическое сжатие теплопроводной среды в режиме с распределяющимися переменными происходит при однородном по пространству профиле температуры, как если бы теплопроводность среды была бесконечно велика.

2.3. Профиль давления. Как следует из (17), в отсутствие вязкости ($\tau = 0$) он монотонен. При этом для $n < 1$ давление падает от центра к поршню. В этом случае сжатие происходит с замедлением, полная энергия сжимаемой массы

$$E(t) = \int_0^{x_0} \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} \right) dx \sim (-t)^{2(n-1)}$$

падает со временем ($t \rightarrow 0$), тепло при наличии теплопроводности (или стоков тепла) отводится из системы ($n > 1 > n_*$ — режим убывания энтропии). Расширение при $n > 1$ происходит с ускорением и возрастанием полной энергии $E(t) \sim t^{2(n-1)}$, $t \rightarrow +\infty$.

При $n < 1$ сжатие происходит с ускорением и увеличением полной энергии $E(t)$, а расширение — с замедлением и падением величины $E(t)$. Профиль давления в этом случае — растущий от центра к поршню.

Наконец, в случае $n = 1$ (случай сохранения полной энергии системы $E(t) = \text{const}$) давление постоянно по массе ($\beta(\lambda) = \text{const}$), как если бы скорость звука в среде была бы бесконечно велика. Поршень в этом случае движется равномерно.

2.4. Немонотонное распределение температуры по пространству. Оно может иметь место при наличии в теплопроводной среде источника тепла. Необходимым условием существования такого профиля температуры является соотношение (27), т. е. требование возрастания энтропии. Этот вывод, основанный на простых физических соображениях, в случае разделения пере-

менных достаточно очевиден (как было показано выше) и легко доказывается на основании анализа (17).

В самом деле, обозначив $q_i + q_e = q$, из (17) получим

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{n_\gamma}{\tilde{\kappa}\lambda^N} \int_0^\lambda \beta \lambda^N d\lambda - \frac{1}{\tilde{\kappa}\lambda^N} \int_0^\lambda (\Phi + q) \lambda^N d\lambda. \quad (29)$$

Соотношение (29) обобщает (28) на случай наличия источников. Напомним, что в (29) $\beta = \beta_i + \beta_e$, $\tilde{\kappa} = \tilde{\kappa}_i + \tilde{\kappa}_e$, $\theta = \theta_i = \theta_e$. Теперь видно, что если (27) нарушено, т. е. $\text{sign } m_* = \text{sign } n_\gamma = -\text{sign } \tilde{\kappa}$ (энтропия убывает), то оба члена в правой части отрицательны. Следовательно, $\frac{d\theta}{d\lambda} < 0$ для любой точки отрезка $[0, \lambda_*]$, на котором рассматривается решение.

При выполнении (27) профиль температуры может быть монотонно убывающим, если

$$n_\gamma^{-1} \int_0^\lambda (\Phi + q) \lambda^N d\lambda > \int_0^\lambda \beta \lambda^N d\lambda;$$

монотонно растущим от центра к поршню в противном случае, и, наконец, немонотонным, если найдется хотя бы одна точка с радиусом $\lambda_T \in [0, \lambda_*]$ такая, что

$$\int_0^{\lambda_T} (n_\gamma \beta - \Phi - q) \lambda^N d\lambda = 0.$$

Для выяснения смысла экстремума в λ_T легко получить выражение для $d^2\theta/d\lambda^2$ из (29):

$$\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} = \frac{1}{\tilde{\kappa}} (n_\gamma \beta - \Phi - q) - \frac{m}{\theta} \cdot \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 - \frac{N}{\lambda} \cdot \frac{d\theta}{d\lambda} - \frac{k}{\delta} \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right) \cdot \frac{d\delta}{d\lambda}. \quad (30)$$

Здесь для простоты рассмотрен случай, когда $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k$.

Необходимые и достаточные условия существования максимума температуры не в центре и не на поршне (т. е. $0 < \lambda_T < \lambda_*$) определяются из (29), (30):

$$\begin{cases} \beta(0) - n_\gamma^{-1} \Phi(0) - n_\gamma^{-1} q(0) > 0, \\ \beta(\lambda_T) - n_\gamma^{-1} \Phi(\lambda_T) - n_\gamma^{-1} q(\lambda_T) < 0, \\ \int_0^{\lambda_T} (n_\gamma \beta - q - \Phi) \lambda^N d\lambda = 0. \end{cases} \quad (31)$$

Для каждого конкретного решения, для определенных значений m_i , k_i , A_i и N требуется конкретный анализ реализуемости (31). Более того, требуется еще показать существование решения (17) при данных граничных условиях (θ_* , λ_* и др.), ука-

зать зависимость условий существования решения от граничных условий и набора m_i, k_i, A_i .

Анализ поведения энтропии помогает и в этом случае. Например, уже показано, что в теплопроводной среде при убывании энтропии $d\theta/d\lambda < 0$ всюду. Значит, в принципе возможные решения с любыми θ_* вплоть до $\theta_* = 0$. Напротив, в случае возрастания энтропии всюду $\frac{d\theta}{d\lambda} > 0$, и поэтому $\theta(0) < \theta(1)$. Значит, так как $\theta(\lambda) > 0$, в принципе существует некоторое ограничение снизу на θ_* . Нет смысла ставить условие $\theta_* = 0$, так как решение в этом случае либо не существует, либо тривиально ($\theta \equiv 0$).

Анализ изменения энтропии в теплопроводной среде при наличии только стоков тепла сразу приводит к выводу: в режимах неубывания энтропии температура монотонно растет от центра к поршню, в противоположных случаях возможны немонотонности в профиле θ .

2.5. Анализ профилей температур в двухтемпературной среде. Его можно провести на основе сделанных выше утверждений. В силу (10) для каждой из компонент энтропийная функция $\Sigma_e = p_e \rho^{-\gamma}$ и $\Sigma_i = p_i \rho^{-\gamma}$ изменяется со временем так же, как и Σ , т. е. $\Sigma_{e,i} \sim (t^2)^{m_*}$. Для энтропий S_e и S_i справедлива (24) и (25) с заменой c_V на $c_{Ve} = \frac{RZ}{\gamma-1}$ и $c_{Vi} = \frac{R}{\gamma-1}$ соответственно. Отметим, что аддитивность энтропии, означающая, что $S = S_i + S_e$, здесь выполняется путем выбора постоянных: $(1+Z)\Sigma_c^{1+Z} = Z\Sigma_{ce}^Z \cdot \Sigma_{ci}$. Это допустимо, так как энтропия идеального газа определена с точностью до постоянной величины.

Таким образом, выводы относительно характера распределения температуры, приведенные выше, верны для каждой из компонент в отдельности, если иметь в виду, что обменный член q_{ei} является источником тепла для той компоненты, температура которой ниже, и стоком тепла для другой. Выражение (29) обобщается в этом случае для каждой из компонент:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_i}{d\lambda} &= \frac{1}{\tilde{n}_i \lambda^N} \int_0^\lambda (n_i \beta_i - \Phi - q_i - q_{ei}) \lambda^N d\lambda, \\ \frac{d\theta_e}{d\lambda} &= \frac{1}{\tilde{n}_e \lambda^N} \int_0^\lambda (n_e \beta_e - q_e + q_{ei} + q_R) \lambda^N d\lambda. \end{aligned} \quad (32)$$

2.6. Численные и аналитические примеры решений системы (17). Эти примеры подтверждают основные выводы качественного анализа о поведении профилей давления и температуры.

Приведем здесь некоторые из решений системы (17), исследованные ранее в [66—70].

Прежде всего отметим следующее важное свойство решений (10) задачи (1) — (7). Пусть найдено решение системы (17) на отрезке $\lambda \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$, так что безразмерная скорость поршня $\alpha \left(\frac{1}{n}\right) = 1$, а безразмерная масса

$$\int_0^{1/n} \delta \lambda^N d\lambda = 1. \text{ Рассмотрим некоторую точку } \lambda_1: 0 < \lambda_1 < n^{-1}.$$

В силу того, что радиус $r(x_1, t) = v_0 t^n \lambda_1(\xi_1)$, $\xi_1 = x_1/x_0 < 1$ является эйлеровой координатой вполне определенной лагранжевой массы (x_1), его движение можно трактовать как движение поршня. Именно в силу разделения массовой и временной переменных, можно наряду с данной рассматривать и другую задачу, поршень в которой находится в точке λ_1 (причем λ_1 — произвольно!) и на нем задан соответствующий граничный режим: $\alpha(\lambda_1) = n\lambda_1 = \alpha_1$, $\theta(\lambda_1) = \theta_1$ или $\omega(\lambda_1) = \omega_1$. При этом решение новой задачи есть просто «часть» решения исходной задачи, взятая на некотором внутреннем отрезке: $[0, \lambda_1] \subset \left[0, \frac{1}{n}\right]$.

Легко видеть, что решение новой («внутренней») задачи есть решение (17), как и исходное, но для других параметров x_0 и v_0 . Получающиеся из первоначального решения постоянные α_1 или β_1 , θ_1 или ω_1 определяют перенормировку x_0 и v_0 . Так, если в исходной задаче на $0 \leq \lambda \leq n^{-1}$ решение с $\alpha(1/n) = 1$, $\theta(1/n) = \theta_*$

и $\int_0^{1/n} \delta \lambda^N d\lambda = 1$ соответствовало величинам x_0 и v_0 , то часть этого решения на отрезке $[0, \lambda_1]$, $\lambda_1 < \frac{1}{n}$ с $\alpha(\lambda_1) = \alpha_1$, $\theta(\lambda_1) = \theta_1$ и

$\int_0^{\lambda_1} \delta \lambda^N d\lambda = \xi_1$ соответствуют решению (10) задачи (1) — (7) с $x_0^{(1)} = \xi_1 x_0$ и $v_0^{(1)} = n\lambda_1 v_0$. При этом, естественно, масштабы размерных величин (скажем, плотность, давление, температура), не такие (определяются $x_0^{(1)}$ и $v_0^{(1)}$), как в «старой» задаче (где они определялись x_0 и v_0).

Основой подобного рассмотрения служит наличие у системы обыкновенных дифференциальных уравнений (17) преобразования подобия вида

$$\xi' = k_\xi \xi, \quad \lambda' = k_\lambda \lambda, \quad \alpha' = k_\alpha \alpha, \quad \delta' = k_\delta \delta, \quad \beta' = k_\beta \beta, \quad \theta' = k_\theta \theta, \dots,$$

где

$$k_\xi = \xi_1^{-1}, \quad k_\lambda = k_\alpha = (n\lambda_1)^{-1}, \quad k_\delta = (n\lambda_1)^{N+1} \xi_1^{-1}, \quad k_\beta = (n\lambda_1)^{N-1} \xi_1^{-1}, \\ k_\theta = (n\lambda_1)^{-2}, \dots$$

Аналогичное преобразование подобия использовалось при построении автомодельных решений в гл. 1.

Указанное свойство системы (17) позволяет вместо задачи (18), (19), (22), (23) с условием (21) на отрезке $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ рассматривать также задачу $\omega(0)=0$, $\theta(\lambda_*)=\theta_*$ на некотором отрезке $[0, \lambda_*]$, так что $\int_0^{\lambda_*} \delta\lambda^N d\lambda \neq 1$ и $\lambda_* \neq \frac{1}{n}$. Параметры ξ_* и λ_* этой задачи

используются для определения интересующих нас в конечном счете размерных значений массы среды, ее температуры и т. д.

Такой подход дает определенные преимущества при интегрировании системы (17), так как теперь можно решать ее численно как задачу Коши с условиями $\omega(0)=0$, $\theta(0)=\theta_0$ и $\beta(0)=\beta_0$, где θ_0 и β_0 — некоторые постоянные. «Оборвав» счет при некотором $\lambda=\lambda_1$, получающиеся здесь значения $\theta(\lambda_1)$, $\beta(\lambda_1)$, $\alpha(\lambda_1)$ можно приписать поршню. При рассмотрении задачи с сингулярными значениями β_0 и θ_0 нужно использовать разложения решения при $\lambda \rightarrow 0$, которые нетрудно получить из (17).

Такой способ численного решения задачи (17) — (23) использовался в [63, 66—70].

Проиллюстрируем случай возникновения тепловых структур при $n < n_*$ в режиме возрастания энтропии для сжатия примерами из [66]. Отметим здесь, что случай полностью ионизованной плазмы [15], где $m_1=m_2=m_3=5/2$, $m_4=-3/2$, $k_1=k_2=k_3=0$, $k_4=2$ и $l_i=0$ для всех $1 \leq i \leq 4$ удовлетворяет условиям автотемперности (13) с показателем $n = \frac{4}{4+N} \equiv n_R$, так что $n_R=1$ для $N=0$, $n_R=4/5$ для $N=1$ и $n_R=2/3$ для $N=2$.

Решение для вязкого однотемпературного теплопроводного газа при $N=2$, $\tilde{\eta} = -0,1 \cdot \theta^{5/2}$, $\tilde{\xi} = -5\theta^{5/2}$, $\gamma=1,2$ приведено на рис. 15. В этом случае $\kappa = a_1 T^{5/2}$, $n = 2/3$, $n_* = \frac{2}{3\gamma-1} = \frac{10}{13} > \frac{2}{3} = n$, так что энтропия возрастает. Появление максимумов температуры θ вызвано действием ионной вязкости, в качестве которой в этой модельной задаче взята «вторая» вязкость. Давление β в этом примере ведет себя немонотонно, однако полное давление $\beta - \tau$ монотонно растет, как и следует из анализа (17) в случае $n < 1$.

Используя выражение для κ_e из [15] и подставив в (14) численное значение a_1 , находим для этого случая, что $x_0 \sigma_0^{-6} \cong \cong 3,8 \cdot 10^{-34} M_i A_1^{-1} \text{ г} \cdot \text{см}^{-6} \text{ с}^4$, где $M_i = \frac{m_i}{m_p}$ — атомный вес иона плазмы, m_p — масса протона. Для водородной плазмы ($Z=1$, $M_i=1$) получаем, например, что если $x_0 \cong 10^{-4} \text{ г}$, то $|\sigma_0| \cong \cong 1,2 \cdot 10^5 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2/3}$. Поскольку в данном примере $\xi_* \cong 0,37$ и $\lambda_* \cong 0,70$, то полная масса $4\pi \xi_* x_0 \cong 465 \text{ мкг}$, а положение поршня на момент $t = -10^{-9} \text{ с}$ есть $r_* \cong 820 \text{ мкм}$. Принятые значения

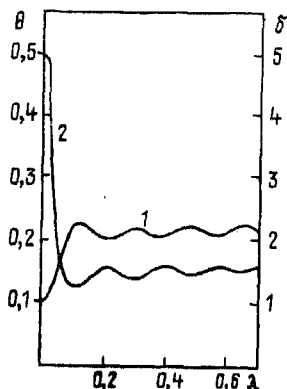


Рис. 15

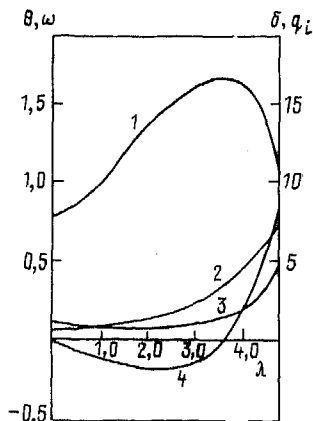


Рис. 16

Рис. 15. Профили безразмерных температуры θ (1) и плотности δ (2) в задаче о сжатии вязкого теплопроводного газа в режиме с возрастанием энтропии

Рис. 16. Профили безразмерных температуры θ (1), источника тепла $-q_i$ (2), плотности δ (3) и теплового потока $-\omega$ (4) в задаче о сжатии теплопроводного газа с объемным источником тепла в режиме возрастания энтропии

параметров приводят на момент $t = -1$ нс в этом примере к величинам плотности $\rho \cong 0,2$ г/см³ и температуры $T \cong 1,6$ кэВ.

Приведем теперь пример тепловой структуры, вызванной действием объемного источника тепла. Снова рассмотрим случай $N=2$, $n=2/3$ и $\gamma=1,2$. Для κ_e пусть справедливо, как и в предыдущем примере, выражение из [15], а $\tilde{\kappa} = -0,274\theta^{5/2}$. Объемный источник $Q = Q_i + Q_e$ возьмем в виде $Q \sim \rho^{1,3} T^{1,6}$ так, что $q = -1,0\theta^{1,6} \rho^{1,3}$. Зависимость $\sim T^{1,6}$ характерна для сечения термоядерной реакции ${}^3\text{H}(d, n){}^4\text{He}$ при $T \sim 20$ кэВ [75]. Зависимость $Q \sim \rho^{1,3}$ чисто модельная и взята, чтобы $l_{6,7} = 0$ при $n=2/3$. Результат численного решения такой задачи приведен на рис. 16.

В соответствии с выводами качественного исследования системы (17) в данном примере реализуются условия, приводящие к появлению немонотонного профиля температуры. Это явление аналогично явлению автомодельного T -слоя [20, 24, 28, 130]. Источником нагрева в данном примере служит не джоулево тепло, как в магнитогидродинамическом T -слое, а объемный источник тепла, моделирующий энерговыделение за счет термоядерных реакций.

В случае сжатия однотемпературного газа с $\kappa = a_1 T^{5/2}$ и $\gamma = 5/3$ параметр $n = 2/3$, а $n_* = 1/2$, так что $n > n_*$ и осуществляется режим убывания энтропии. В этом случае тепловые структуры могут существовать только за счет стоков тепла.

Рассмотрим снова однотемпературную задачу с $\tilde{\kappa} = -0,0001\theta^{5/2}$ и $q_R = -1,5\delta^{5/3}\theta^{1/2}$. Сток q_R моделирует потери за счет объемного излучения. Значение $k_{10} = 5/3$ выбрано для того, чтобы $n = 2/3$ в (13) и $l_{10} = 0$. Результат численного решения приведен на рис. 17.

Наконец, рассмотрим случай сохранения энтропии в диссипативной среде. Снова рассмотрим случай $N = 2$ и $n = 2/3$, но положим $\gamma = 4/3$, так, чтобы $n_* = \frac{2}{3\gamma - 1} = \frac{2}{3}$. Примем следующие значения для безразмерных коэффициентов диссипации в двухтемпературной среде: $\kappa_e = -10\theta_e^{5/2}$, $\tilde{\kappa}_i = -0,274\theta_i^{5/2}$, $\tilde{\zeta} = -0,07\theta_i^{5/2}$, $\tilde{\chi} = -0,9448\theta_e^{-3/2}$. Такие соотношения между безразмерными A_i отвечают в соответствии с [15] случаю полностью ионизованной водородной плазмы. Результат численного решения системы (17) для данного случая (с соответствующими граничными условиями) приведен на рис. 18.

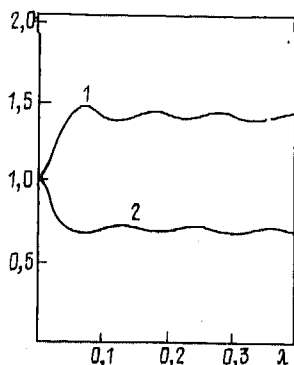


Рис. 17

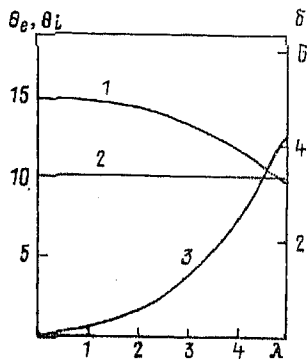


Рис. 18

Рис. 17. Профили безразмерных температуры θ (1) и плотности δ (2) в задаче о сжатии теплопроводного газа с объемным стоком тепла в режиме убывания энтропии

Рис. 18. Профили безразмерных температур θ_i (1) и θ_e (2) и плотности δ (3) в задаче о сжатии плазмы в режиме с сохранением энтропии

Профиль q_{ei} в рассматриваемом примере неравномерен по пространству. В центре q_{ei} очень мал из-за малости плотности δ . Вблизи поршня благодаря резкому росту плотности величина $\tilde{\chi} \sim \delta^2$ достигает заметных величин. Однако здесь невелико значение $\theta_e - \theta_i$ и в целом q_{ei} не оказывает значительного влияния на поведение температур: компоненты плазмы (ионы и электроны) ведут себя как бы независимо.

В данном примере в ионной компоненте присутствует источник тепла — вязкость. Вследствие этого профиль θ_i — падаю-

щий, выпуклый. В рассматриваемом режиме $n_\gamma = 0$, а сток $q_{ei} \sim (\theta_e - \theta_i)$ слишком мал, чтобы обеспечить необходимый для сохранения энтропии отвод «вязкого тепла». Поэтому по всей массе оно отводится посредством ионной теплопроводности. Такое поведение θ_i предсказывается (32). Поскольку q_{ei} мал, то, как и следует из (32), для электронной температуры θ_e наблюдается гомотермичность ($n_\gamma = 0$).

2.7. Аналитические решения системы (17), построенные для некоторых частных случаев. Они подтверждают выводы качественного анализа, а также иллюстрируют следующую важную особенность решений (17). При интегрировании (17) с использованием граничных условий всегда остается одна из постоянных интегрирования, которая должна быть определена из условия (21), так как переменная ξ исключена из (17), благодаря (15), (16) (не рассматривается уравнение неразрывности). В частности, при задании вместо (19) условия (20) соотношение (21) служит для определения параметра $\lambda_* \neq \frac{1}{n_1}$. Интеграл (21) на решении выражает связь между безразмерными параметрами задачи: величинами A_i , некоторыми граничными условиями, а также параметром λ_* , который в общем случае не равен n^{-1} (при условии (20)), а подлежит определению.

Приведем здесь наиболее простые примеры анализа такой связи. Более сложные случаи, связанные с задачей о зет-пинче (система (1) с учетом азимутального магнитного поля и при $N=1$ — см. § 4, (47)), разобраны в [24] (для разрежения).

Известные в настоящее время общие случаи интегрируемости системы (17) в конечном виде относятся к двум классам: либо $n=1$, либо $n=n_*$. В первом случае существует интеграл энергии, во втором — энтропии, т. е. сохраняется либо величина $E(t)$, либо $\Sigma(t)$. В обоих случаях система (17) упрощается.

Случай $n=n_*$ в отсутствие диссипативных процессов (адиабатическое сжатие вещества) достаточно подробно изложен в гл. 1 этой статьи и в цитируемых там работах. Подобные решения известны уже давно [135] и изучались различными методами [5, 59, 60, 63, 70, 81, 112] (см. также библиографию в [70]). Рассмотрим ниже другие случаи.

Пусть $n=n_*$, но в среде присутствует процесс теплопроводности. Остальные диссипативные процессы исключим из рассмотрения. В соответствии с (13) показатели m , k и l в выражении $\kappa = aT^m \rho^{kT^l}$ удовлетворяют условию

$$\frac{2}{2 + (N+1)(\gamma-1)} = \frac{2m-1-l}{2m-k(N+1)+N-1}.$$

Например, при $N=2$, $\gamma=5/3$ ($n_* = 1/2$) автомодельный режим будет осуществим для $\kappa = aT^{3/2}$.

Обратимся теперь к (17) для этого случая (среда однотемпературна). Поскольку $n_\gamma = 0$, а $\tilde{\kappa} \neq 0$, то $\theta = \text{const}$. Постоянная

интегрирования определяется из граничных условий $\theta(\lambda_*) = \theta_*$, т. е. $\theta = \theta_*$. Заметим, что в этом решении не присутствует значение параметра A — он как бы бесконечно велик. Поэтому приведенное здесь решение справедливо и для случая разрежения, и для случая сжатия.

Учитывая теперь, что $\beta = \delta\theta = \theta \cdot \delta(\lambda)$, находим $\delta(\lambda)$ из первого уравнения системы (17). Найденное решение имеет вид

$$\delta(\lambda) = C_1 e^{\mu\lambda^2}; \quad \beta(\lambda) = C_1 \theta_* e^{\mu\lambda^2}; \quad \theta(\lambda) = \theta_*. \quad (33)$$

Здесь введено обозначение $\mu = \frac{n_* (1 - n_*)}{2\theta_*}$.

Из условия (21) находим постоянную интегрирования

$$C_1 = 1/\Phi(\mu), \quad (34)$$

где функция $\Phi(\mu) = \int_0^{1/n_*} \lambda^N e^{\mu\lambda^2} d\lambda$.

Из (34) следует, что

$$\frac{dC_1}{d\theta_*} = \frac{\Phi'_\mu \mu}{\Phi^2 \theta_*} = \frac{\int_0^{1/n_*} \lambda^{N+2} e^{\mu\lambda^2} d\lambda}{\theta_* \mu^{-1} C_1^{-2}} > 0,$$

т. е. $C_1(\theta_*)$ растет с ростом θ_* . При $\theta_* \rightarrow \infty$, $C_1(\theta_*) \rightarrow C_\infty = (N+1)n_*^{N+1}$, и всюду $C_1 < C_\infty$ для конечных θ_* .

Покажем, что $C_1 \rightarrow 0$ при $\theta_* \rightarrow 0$. Это означает, что $\Phi(\mu) \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow \infty$. $\Phi'_\mu = \int_0^{1/n_*} \lambda^{N+2} e^{\mu\lambda^2} d\lambda > 0$ и $\Phi(0) = \frac{\lambda_*^{N+1}}{N+1} = C_\infty^{-1}$ ($\lambda_* \equiv \frac{1}{n_*}$). Следовательно, $\Phi(\mu)$ растет с ростом μ и надо лишь показать, что $\lim_{\mu \rightarrow \infty} \Phi(\mu) = \infty$. Но

$$\Phi(\mu) = \int_0^{1/n_*} \lambda^N e^{\mu\lambda^2} d\lambda = \mu^{-\frac{N+1}{2}} \int_0^{\sqrt{\mu}/n_*} y^N e^{y^2} dy \equiv \mu^{-\frac{N+1}{2}} \Psi\left(\frac{\sqrt{\mu}}{n_*}\right),$$

где $\Psi(u) \equiv \int_0^u y^N e^{y^2} dy$. Легко проверить, пользуясь правилом

Лопиталья, что $\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^{N-1} e^{u^2}}{2}$. Но тогда $\Phi(\mu) \rightarrow \frac{e^{\mu\lambda_*^2}}{2\mu n_*^{N-1}} \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow \infty$.

Построенный пример служит иллюстрацией к качественному выводу о гомотермичности решения в случае $n = n_*$ и $\kappa \neq 0$. При $\theta_* \rightarrow \infty$ решение (33) стремится к однородному распределению подобно решению задачи об изэнтропическом сжатии, в котором $\beta(0) \neq 0$ при $\sigma_0 \rightarrow \infty$ [68, 66, 70, 112] (в изэнтропическом случае $\beta\delta^{-\gamma} = \sigma_0 = \text{const}$).

Качественный анализ (17) в случае наличия одной теплопроводности указывает необходимые условия совместной локализации тепловых и газодинамических воздействий в S-режиме [49]. Именно, во-первых, должно быть $n < 1$ — только в этом случае давление спадает от поршня внутрь вещества. Во-вторых, должно быть $n < n_*$ для режима сжатия, и $n > n_*$ для режима разрежения, чтобы температура спадала от поршня. Суммируя, имеем для режимов сжатия условие $n < n_*$, для расширения — $n_* < n < 1$.

Рассмотрим теперь случай $n=1$ и учтем в (17) только процесс теплопроводности (однотемпературная среда). Условием (13) будет удовлетворять коэффициент теплопроводности вида $\kappa = a T^m \rho^{kl}$ при любом конечном m , если k и l связаны соотношением $(N+1)k = N+l$. В частности, если $k = N/(N+1)$, то $l = 0$.

В случае $n=1$ для давления сразу получаем $\beta = \beta_0 = \text{const}$. Интегрируя при этом систему (17) на отрезке $0 \leq \lambda \leq 1$ ($\lambda_* = \frac{1}{n} = 1$) с учетом граничных условий $\omega(0) = 0$ и $\theta(\lambda_*) = \theta_*$, получим $\beta = \beta_0$; $\omega = -\beta_0 \lambda$; $\delta(\lambda) = \beta_0 \theta^{-1}(\lambda)$ и

$$\theta(\lambda) = \left[\theta_*^{m-k+1} - (m-k+1) \frac{\beta_0^{1-k}}{2A} (1-\lambda^2) \right]^{\frac{1}{m-k+1}}. \quad (35)$$

Здесь $m \neq k - 1$. Если же $m = k - 1$, то

$$\theta(\lambda) = \theta_* \exp \left\{ -\frac{\beta_0^{1-k}}{2A} (1-\lambda^2) \right\}. \quad (36)$$

Анализ (35), (36) показывает, что при любых m и k $\theta(\lambda)$ растет с ростом λ для $A > 0$ (случай разрежения, т. е. возрастания энтропии) и падает с ростом λ для $A < 0$ (случай сжатия, т. е. убывания энтропии). Однозначное поведение энтропии (рост для разрежения и убывание для сжатия) для $n=1$ независимо от значения γ обеспечено неравенством $n_* < 1$, прямо следующим из условия $\gamma > 1$.

Константа интегрирования β_0 находится из условия $\int_0^1 \delta \lambda^N d\lambda = 1$. Проанализируем связи, накладываемые граничными условиями на параметры задачи.

Сначала рассмотрим два простых примера при $N=1$.

Пусть $m = k = 0$. Тогда $\theta = \theta_* - \frac{\beta_0}{2A} (1-\lambda^2)$ и $\xi_* = \frac{\beta_0}{2} \int_0^1 \frac{d\lambda^2}{\theta_* - \frac{\beta_0}{2A} (1-\lambda^2)} = 1$. Отсюда находим, что $\beta_0 = 2A\theta_* \left(1 - e^{-\frac{1}{A}} \right)$. Здесь $A < 0$ для случая сжатия и $A > 0$ для случая разрежения, так что $A \left(1 - e^{-\frac{1}{A}} \right)$ всегда положительно.

Далее, находим, что $\theta(0) = \theta_* e^{-\frac{1}{A}}$, т. е. $\theta(0) > \theta_*$ для сжатия, и $\theta(0) < \theta_*$ для разрезания. В этом примере решение $\theta(\lambda) = \theta_* e^{-\frac{1}{A}} \left(1 + \lambda^2 \left(e^{\frac{1}{A}} - 1 \right) \right)$ существует для любых значений A и θ_* , причем решение с $\theta(0) = 0$ для разрезания и решение с $\theta_* = 0$ для сжатия — тождественный нуль.

Пусть теперь $m = 1$, $k = 0$. Тогда $\theta = \left\{ \theta_*^2 - \frac{\beta_0}{A} (1 - \lambda^2) \right\}^{\frac{1}{2}}$. Вы-

числив $\frac{\beta_0}{2} \int_0^1 \frac{d\lambda^2}{\sqrt{\theta_* - \frac{\beta_0}{A} (1 - \lambda^2)}} = 1$, находим, что $\beta_0 = 2\theta_* - \frac{1}{A}$.

Для сжатия ($A < 0$) величина β_0 всегда положительна. Для разрезания, как оказывается, величины θ_* и β_0 ограничены снизу: $\theta_* \geq \frac{1}{A}$, $\beta_0 \geq \frac{1}{A}$. В самом деле, решение $\theta(\lambda)$ есть в этом случае $\theta(\lambda) = \sqrt{\left(\theta_* - \frac{1}{A} \right)^2 + \frac{\lambda^2}{A^2} (2\theta_* A - 1)}$. Значение $\theta(0) \geq 0$ при $\theta_* \geq \frac{1}{A}$. В этом примере решение существует лишь для таких A , что $A \geq \theta_*^{-1}$. При этом постоянная интегрирования $\beta_0 \geq \theta_*$.

Для сжатия решение существует при любом $A < 0$, в том числе и для $\theta_* = 0$. В этом случае $\delta(\lambda) = (1 - \lambda^2)^{-1/2}$ не зависит от A , а $\beta_0 = \frac{1}{|A|}$ и $\theta(\lambda) = \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{|A|}$.

В общем случае произвольных m , k , N анализ показывает, что поведение решения аналогично двум разобранным случаям. Так, для случая $m - k + 1 > 0$, если допускается $\theta(0) \rightarrow 0$ для разрезания, то нетривиальное решение существует при следующем ограничении на параметр A :

$$A \geq \frac{(m - k + 1)^k}{2\theta_*^m} [(N + 1)(m - k + 1) - 2]^{1-k}.$$

при этом

$$\beta_0 \geq \left[\frac{(N + 1)(m - k + 1) - 2}{2} \right]^{\frac{m - k + 1}{m}} \left(\frac{m - k + 1}{2} \right)^{\frac{k - m}{m}} A^{-\frac{1}{m}}.$$

Сходимость интеграла $\int_0^1 \delta \lambda^N d\lambda$ при $\lambda \rightarrow 0$ обеспечивается условием $m - k + 1 > 2/(N + 1)$.

Для случая сжатия существует нетривиальное решение с $\theta_* = 0$ при условии $m > k$.

В остальных случаях ограничения на параметры не возникают, и как для случая сжатия, так и для случая разрезания решение существует при любых θ_* , причем при $\theta_* \rightarrow 0$ решение стремится к тривиальному: $\theta(\lambda) \rightarrow 0$ всюду.

§ 3. «Обращение» процессов во времени в диссипативной открытой системе

«Обращение времени», введенное в § 1, гл. 2, было формальным приемом, позволяющим при анализе системы уравнений (17) для безразмерных представителей искомым функций одно-временно исследовать как задачи сжатия, так и задачи разрежения. Элементарное рассмотрение простых задач, как и примеры, приведенные выше, показывает, что решения формально «одинаковых», или «зеркальных» задач для одной и той же среды при $-\infty < t < 0$, $t \rightarrow 0$ и при $0 < t < +\infty$, $t \rightarrow +\infty$ отличаются принципиально. Такое отличие было связано выше с требованием выполнения второго начала термодинамики.

Тривиальным примером такого отличия может служить задача о нагреве среды в режиме с обострением [76, 118]. Краевая задача для уравнения

$$\partial T / \partial t = \frac{\partial}{\partial x} (k_0 T^\sigma \partial T / \partial x), \quad \sigma > 0, \quad k_0 > 0$$

при $T(0, t) = T_0 (-t)^{-1/\sigma}$ ($-\infty < t < 0$, $t \rightarrow 0$) и $T(x_0, t) = 0$, $T^\sigma \partial T / \partial x |_{x=x_0} = 0$ имеет решение в разделяющихся переменных $T(x, t) = T_0 (-t)^{-1/\sigma} (1 - x/x_0)^{2/\sigma}$, $T(x, t) = 0$ всюду для $x > x_0$ и $-\infty < t < 0$, [122], которое описывает остановившуюся волну нагрева. Здесь $x_0 = \sqrt[k_0 T_0^\sigma]{\frac{2(\sigma+2)}{\sigma}}$.

Задание «зеркального» режима $T(0, t) = T_0 t^{-1/\sigma}$, $0 < t < +\infty$, $t \rightarrow +\infty$, также допускает решение в разделяющихся переменных (остановившаяся волна охлаждения), принципиально, однако, отличное от вышеприведенного. В этом решении, построенном Буссинеском, $k_0 T^\sigma \frac{\partial T}{\partial x}$ обращается в нуль при максимальном значении $T(x, t) > 0$ [101], а в [122] при $T(x, t) = 0$.

Известно также, что в общем случае получить решение для сжатия сплошной среды, располагая решением для ее разрежения, путем применения простого «обращения времени» (симметричного отражения относительно некоторого момента времени) невозможно. Однако существуют примеры, когда разрежение и симметрично обращенное к нему сжатие являются реально осуществимыми физическими процессами.

Одним из примеров является рассмотренная выше задача для среды, описываемой уравнениями газовой динамики с теплопроводностью (§ 2, (33)) в случае сохранения энтропии.

Другим примером служит процесс безударного сжатия, рассматриваемый в рамках автомодельной задачи с разделяющимися переменными (как, например, в [66, 70, 112]) и подробно исследованный в гл. 1, который является обращением соответствующей задачи разрежения.

Пространственные распределения величин в этих взаимно симметричных процессах совпадают для симметричных моментов времени (в безразмерных переменных автомодельной задачи эти распределения вообще фиксированы), а изменения величин со временем следуют одним и тем же законам при изменении времен от $t=0$ до $t=+\infty$ для разрежения и от $t=-\infty$ до $t=0$ для сжатия. Кроме этих тривиальных ($n=n_*$) примеров, рассмотренные в гл. 2 автомодельные задачи при учете теплопроводности и источника тепла дают нетривиальные ($n \neq n_*$ в общем случае) примеры открытой диссипативной системы, для которой взаимно симметричные движения имеют реальный смысл. Ниже построены такие движения.

Рассмотрим среду, движение которой описывается системой (1) одномерных уравнений, и учтем в (1) только процессы теплопроводности и объемный источник тепла. Для простоты будем считать среду однотемпературной и пренебрежем эффектами вязкости. Оставим, в соответствии с этим, в (2) и (3) только $\kappa = \alpha_1 T^{m_1} \rho^{k_1}$ и $q = \alpha_6 T^{m_6} \rho^{k_6}$.

Адиабатическое движение рассматриваемой конечной массы среды без диссипативных эффектов — в этом случае она представляет собой термодинамически замкнутую систему — может происходить как обратимым образом (изменение энтропии всей массы вещества $\Delta S_{\text{н}} = 0$), так и необратимо (при этом $\Delta S_{\text{н}} > 0$ и в среде наблюдаются необратимые процессы — ударные волны).

Система с диссипацией (рассматриваемая конечная масса среды с учетом теплопроводности и источников или стоков тепла) в общем случае уже является открытой. В такой системе может быть $\Delta S_{\text{н}} < 0$ даже при наличии диссипативных процессов за счет отвода тепла через поршень.

Из общих термодинамических соображений ясно, что для обратимого адиабатического движения замкнутой системы справедливо следующее утверждение. Движение, получающееся из некоторого реально осуществленного движения заменой времени t на $-t$ и одновременной заменой знака скорости, является физически реальным процессом. Такое «обращение времени» можно представлять следующим образом.

Пусть в некоторый момент времени $t=t_1$ в процессе движения имеют место распределения плотности $\rho(x, t_1)$ и скорости $v(x, t_1)$. Распределение энтропии $S(x, t_1) = S(x)$ считаем известным. Тогда в силу адиабатичности движения, давление $p(x, t_1)$ и температура $T(x, t_1)$ могут быть вычислены по значению плотности, а радиус $r(x, t_1)$ по плотности и скорости. Не ограничивая общности, в дальнейшем адиабатический случай будем считать изоэнтропическим: $S(x, t) = \text{const}$. От момента $t=t_1$ до момента $t=t_2 > t_1$ ($t_1 \leq t \leq t_2$) поршень движется от $r_1 = r_*(t_1)$ до $r_2 = r_*(t_2)$, не нарушая адиабатичности ($\partial S / \partial t = 0$ для всей массы газа). Такие движения, как показано в гл. 1 и, например, в

[66—68, 81], существуют. Пусть на момент t_2 плотность и скорость имеют распределения $\rho(x, t_2)$ и $v(x, t_2)$. Поменяем теперь скорости на противоположные и рассмотрим момент $t=t_2$ как начальный с данными $\rho(x, t_2)$ и $-v(x, t_2)$. Поршень с момента t_2 начинает двигаться так, что повторяет свою траекторию в течение времени $t_2 \leq t \leq t_3$, $t_3 - t_2 = t_2 - t_1$, в обратном порядке так, что $r_*(t_3) = r_*(t_1)$, и, вообще, $r_*(t_1 + t') = r_*(t_3 - t')$ для $0 \leq t' \leq t_2 - t_1$. При этом

$$\rho(x, t_1 + t') = \rho(x, t_3 - t'), \quad v(x, t_1 + t') = -v(x, t_3 - t'). \quad (37)$$

Кроме того, очевидно, что

$$r(x, t_1 + t') = r(x, t_3 - t'), \quad T(x, t_1 + t') = T(x, t_3 - t'),$$

и

$$p(x, t_1 + t') = p(x, t_3 - t') \quad (38)$$

Оказывается, что для среды с диссипацией возможно построить два «взаимно симметричных» или «зеркальных» движения, т. е. таких, что движение при $t_2 < t < t_3$ «повторяет» в обратном порядке движение для $t_1 < t < t_2$. Профили плотности, давления, температуры, модуля скорости в «обратном» движении такие же, как и в «прямом», а знаки скоростей противоположны (для «взаимно симметричных» движений справедливо (37)). В определенном смысле пример таких движений демонстрирует «обращение времени» для системы с диссипативными эффектами. Построим его, используя аппарат автомодельных решений для конечной массы вещества [64, 72].

Обратимся к системе (17), которая в рассматриваемом здесь случае имеет более простой вид:

$$\begin{aligned} n(1-n)\delta\lambda &= \frac{d\beta}{d\lambda}; \\ n_v\beta &= -\frac{1}{\lambda^N} \frac{d}{d\lambda} (\lambda^N \omega) + q; \\ \omega &= -\tilde{\eta} \frac{d\theta}{d\lambda}; \quad \beta = \delta\theta; \\ \tilde{\eta} &= A_1 \theta^{m_1} \delta^{k_1}; \quad q = A_2 \theta^{m_2} \delta^{k_2}; \\ n_v &= \frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{n}{n_*} - 1 \right); \quad n_* = \frac{2}{2+\mu}; \quad \mu \equiv (\gamma-1)(N+1). \end{aligned} \quad (39)$$

Как было показано выше, различие между задачами сжатия и разрежения, описываемыми системой (39), состоит лишь в знаках безразмерных диссипативных коэффициентов A_1 и A_2 : они положительны для задач разрежения и отрицательны для сжатия.

В классе решений (10) взаимно симметричным движениям соответствуют решения для сжатия ($t < 0$) и разрежения ($t > 0$) с одинаковыми пространственными распределениями величин $f_i(\xi)$ или $f_i(\lambda)$. Последние, в свою очередь, определя-

ются системой (39). Определим взаимно симметричные движения как движения в средах с одними и теми же κ и Q , причем одно из этих движений (безразлично, сжатие или разрежение) будем называть «прямым», а другое «обратным». Тогда задача заключается в нахождении одинаковых решений двух задач для системы (39) с одинаковыми граничными условиями при $\lambda=0$ и $\lambda=\lambda_*$ и одинаковыми величинами $|A_1|$ и $|A_6|$, но с противоположными знаками A_1 и A_6 . Для взаимно симметричных движений справедливо (38), (39).

Пусть «прямое» движение имеет параметры $n^{(1)} \equiv n$ и γ_1 , так что

$$n_{\gamma}^{(1)} = \frac{2}{\gamma_1 - 1} \left(\frac{n}{n_*^{(1)}} - 1 \right), \quad n_*^{(1)} = \frac{2}{2 + \mu_1}, \quad \mu_1 = (\gamma_1 - 1)(N + 1).$$

Тогда анализ системы (39) показывает, что «обратное» движение должно обладать параметрами

$$n^{(2)} = n, \quad n_{\gamma}^{(2)} = -n_{\gamma}^{(1)}. \quad (40)$$

Последнее приводит к связи между показателями адиабаты γ_2 и γ_1 в «обратном» и «прямом» движении:

$$\gamma_2 = 1 + \frac{1}{\frac{n(N+1)}{1-n} - \frac{1}{\gamma_1 - 1}}. \quad (41)$$

Эту формулу можно переписать в симметричном виде относительно γ :

$$\frac{(\gamma_2 - 1)(\gamma_1 - 1)}{\gamma_2 + \gamma_1 - 2} = \frac{1 - n}{(N + 1)n} \quad (42)$$

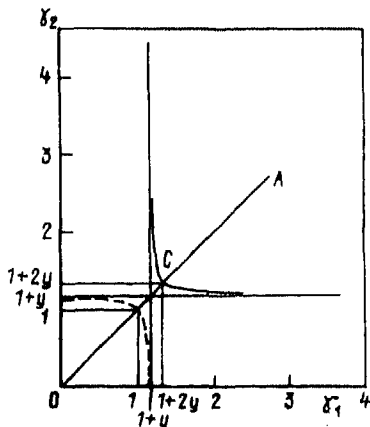


Рис. 19. Зависимость между показателями адиабаты γ_1 и γ_2 во взаимно симметричных («зеркальных») режимах

или μ :

$$\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{1-n}{n}, \quad (43)$$

что определяет равнобочную гиперболу $(\mu_2 - z)(\mu_1 - z) = z^2$, $z = (1-n)n^{-1}$. На рис. 19 приведен график зависимости (41) γ_2 от γ_1 для фиксированных n и N . Через y обозначена величина $y = z/(N+1)$. Конкретные величины n и N , для которых построен график, а также некоторые значения γ_1 и γ_2 для этих n , N приведены в таблице 3.

Таблица 3

	$N=2,$	$n=2/3,$	$y=1/6$
γ_1	$4/3=1,3\dots$	$5/3=1,6\dots$	2
γ_2	$4/3=1,3\dots$	$11/9=1,2\dots$	$6/5=1,2$

Из формул (42), (43) видно, что взаимно симметричные движения возможны лишь при $n \leq 1$ ($z \geq 0$), если считать, что $1 < \gamma_{1,2} < \infty$. Из анализа (42) или (43) следует, что прямые $\gamma_1 = 1+y$ и $\gamma_2 = 1+y$ являются асимптотами: при $\gamma_1 \rightarrow 1+y$, $\gamma_2 \rightarrow \infty$, а при $\gamma_1 \rightarrow \infty$, $\gamma_2 \rightarrow 1+y$. При $\gamma_1 = 1+2y$ будет $\gamma_2 = \gamma_1$. Вторая ветвь гиперболы (обозначенная на рис. 19 пунктиром) физически нереальна, так как на ней либо $\gamma_1 < 1$ (выше биссектрисы OA координатного угла), либо $\gamma_2 < 1$ (ниже OA). Случай равенства $\gamma_1 = \gamma_2$ (точка C на графике) соответствует движениям с сохранением энтропии. В самом деле, при $\gamma_1 = \gamma_2$ будет $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ и из (43) следует, что $n = \frac{2}{2+\mu} = n_*$. Напомним, что

$$\frac{dS_{\pi}}{dt} = \frac{2R\alpha_0}{\gamma-1} \cdot \frac{n/n_* - 1}{t}, \quad (44)$$

где S_{π} — полная энтропия массы газа. При $n = n_*$ имеем $\frac{dS_{\pi}}{dt} = 0$. Этому случаю соответствуют движения газа без учета диссипативных процессов (например, решение сверхсжатия из [66—68]), при которых «прямое» и «обратное» движение физически осуществимы для одной и той же среды с одним и тем же показателем γ .

В общем случае диссипативной среды значения γ_1 и γ_2 различны. Из формул (40)—(43) при этом следует, что если $n_*^{(1)} > n_*$, то $n_*^{(2)} < n_*$, и наоборот. Это в соответствии с (44) обеспечивает одинаковое изменение со временем энтропии S_{π} (убывание или возрастание) в «прямом» и «обратном» движениях. В самом деле, из (43) или прямо из условия (40) при учете $n = 2(2+\mu)^{-1} < 1$

($\mu > 0$) получается формула для связи $n_*^{(2)}$ и $n_*^{(1)}$:

$$\frac{n - n_*^{(1)}}{n - n_*^{(2)}} = - \frac{1 - n_*^{(1)}}{1 - n_*^{(2)}} < 0, \quad (45)$$

из которой следуют вышеприведенные утверждения. Они согласуются с физическим смыслом задачи, так как рост или убывание энтропии в среде с источником и теплопроводностью определяется профилем температуры (т. е. положительным или отрицательным потоком тепла через поршень), а последний одинаков для «прямого» и «обратного» движений.

Так, например, взяв в качестве «прямого» движения разрежение среды с $\gamma_1 = 5/3$, $N = 2$ и $n = 2/3$, что соответствует $\kappa \sim T^{5/2}$ и $Q \sim T^{1,6} \rho^{1,3}$, для «обратного» движения получим $\gamma_2 = 11/9 = 55/45 = 1,22 \dots$. При этом $n_*^{(1)} = \frac{1}{2} < n$ (режим возрастания энтропии), а $n_*^{(2)} = \frac{3}{4} > n$. Пример такого решения в случае сжатия для близкого значения $\gamma_2 = 1,2 = \frac{6}{5} = \frac{54}{45}$ приведен на рис. 16 (стр. 66). В этом примере и на стадии разрежения ($\gamma = 5/3$), и на стадии сжатия ($\gamma = 1,2$) имеет место заметный пик энерговыделения не в центре и не на поршне, вызванный действием объемного источника тепла.

В настоящей работе не затрагиваются результаты численных исследований системы (39). Такие исследования должны показать, устойчивы ли оба взаимно симметричных движения, либо одно из них обязательно неустойчиво, либо устойчивость обратного зависит от параметров задачи.

Отметим, что в [66, 68, 70] получены численные решения системы (1), показывающие устойчивость режимов (10) для сжатия теплопроводной среды.

Отметим, что в режимах с одними и теми же n и γ (а значит и n_τ), профили $f_i(\lambda)$ задачи с теплопроводностью и источником тепла будут совпадать с профилями $f_i(\lambda)$ задачи с отрицательной диффузией тепла и стоком при смене «знака времени». Такой пример является тривиальным и имеет место и для чисто тепловой задачи (без газодинамического движения). В этом случае энтропия в прямом и обратном движениях ведет себя по-разному (убывает в одном и возрастает в другом).

Более содержательным примером является построенный выше пример «обращения» процессов во времени в диссипативной среде с одинаковыми κ и Q . В этом случае, при одинаковых профилях ρ и v во взаимно симметричных движениях и при зеркально симметричном поведении их во времени, полная энтропия S_{Π} растет как в «прямом», так и в «обратном» движениях (см. (44)), причем $S_{\Pi} \sim \ln t$ ($t > 0$, $t \rightarrow \infty$) и $S_{\Pi} \sim -\ln |t|$

($t < 0$, $t \rightarrow 0$), или же убывает опять-таки и в «прямом», и в «обратном» движениях, причем $S_{\pi} \sim -\ln t$ ($t > 0$) и $S_{\pi} \sim \ln |t|$ ($t < 0$).

Таким образом, «зеркальность» во времени взаимно симметричных движений не выполняется для энтропии. Эта «незеркальность» поведения $S_{\pi}(t)$ и есть в данном примере следствие второго начала термодинамики.

§ 4. Автомодельные режимы сжатия и разрежения с учетом диффузии магнитного поля

4.1. Постановка задачи автомодельного сжатия или разлета конечной массы плазмы в присутствии магнитного поля. Эта задача обсуждалась ранее в работах [20, 24, 28, 38, 65, 67, 70, 71, 130], она является естественным обобщением изложенной выше на случай учета дополнительных физических эффектов. При этом сохраняются основные идеи исследования свойств автомодельных решений. Так, например, волны диффузии магнитного поля являются остановившимися, в режимах роста энтропии возможны тепловые структуры за счет джоулева нагрева, монотонность или немонотонность профиля магнитного поля зависит от роста или убывания некоторой интегральной величины (магнитного потока), определенные граничные условия приводят к ограничениям на значения безразмерного коэффициента теплопроводности и т. д.

Рассматриваемые здесь задачи описывают движения плоского или цилиндрического столба плазмы под действием внешних магнитных полей и протекающего по плазме тока. Такие конфигурации плазмы принято называть пинчами [100].

Для описания магнитного и электрического полей будем пользоваться уравнениями Максвелла в приближении магнитной гидродинамики [100]. В этом случае магнитное \mathbf{H} и электрическое \mathbf{E} поля и плотность тока \mathbf{j} подчиняются уравнениям:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -c \operatorname{rot} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (46)$$

Здесь c — электродинамическая постоянная (скорость света).

Двух последних уравнений системы (46) достаточно для определения полей, если задан закон Ома, связывающий \mathbf{j} с \mathbf{E} и \mathbf{H} . В общем случае его вид достаточно сложен [15].

Как известно [111], из рассмотрения системы уравнений магнитной гидродинамики при наличии пространственной симметрии решения (см. систему (1)) показатель $N=0$ или $N=1$

($N=2$ недопустим), а вид радиальных компонент H_r и E_r — тривиален.

В системе уравнений одномерного движения плазмы вместо \mathbf{H} , \mathbf{E} и \mathbf{j} удобнее рассматривать величины \mathbf{H} , \mathcal{E} и \mathbf{i} , где \mathcal{E} и \mathbf{i} есть определенные комбинации \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{j} и постоянной c : $\mathcal{E} = c\mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{H}]$, $\mathbf{i} = \frac{1}{c}\mathbf{j}$ [20, 24, 28, 67, 111, 130]. Производя покомпонентную запись уравнений [15] для случая малого влияния магнитного поля на коэффициенты переноса, будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (r^N v); \quad \frac{\partial r}{\partial t} = v;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= -r^N \frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{H_z^2 + H_\varphi^2}{8\pi} - D \right) - \frac{NH_\varphi^2}{4\pi\rho r} + N \frac{D - D'}{\rho r}; \\ \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} + p_i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) &= -\frac{\partial}{\partial x} (r^N W_i) + \frac{\Phi}{\rho} + \frac{Q_i}{\rho} + \frac{Q_{ei}}{\rho}; \\ \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial t} + p_e \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) &= -\frac{\partial}{\partial x} (r^N W_e) + \frac{Q_e}{\rho} - \frac{Q_{ei}}{\rho} + \frac{Q_j}{\rho} - \frac{Q_R}{\rho}; \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{H_z}{\rho} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} (r^N \mathcal{E}_\varphi); \quad \mathcal{E}_\varphi = \rho r^N v_m \frac{\partial H_z}{\partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{H_\varphi}{\rho r^N} \right) &= \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x}; \quad \mathcal{E}_z = \rho v_m \frac{\partial}{\partial x} (r^N H_\varphi); \end{aligned} \quad (47)$$

$$W_i = -\kappa_i \rho r^N \frac{\partial T_i}{\partial x}; \quad W_e = -\kappa_e \rho r^N \frac{\partial T_e}{\partial x};$$

$$p = p_i + p_e = \rho R (T_i + ZT_e); \quad \varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_e = \frac{R}{\gamma - 1} (T_i + ZT_e);$$

$$Q_{ei} = \chi (T_e - T_i); \quad \Phi = \rho r^N D \frac{\partial v}{\partial x} + N \frac{v D'}{r}; \quad Q_j = \frac{\mathcal{E}_z^2 + \mathcal{E}_\varphi^2}{4\pi v_m};$$

$$D = \rho r^N \left(\frac{4}{3} \eta + \xi \right) \frac{\partial v}{\partial x} + N \left(\xi - \frac{2}{3} \eta \right) \frac{v}{r};$$

$$D' = \rho r^N \left(\xi - \frac{2}{3} \eta \right) \frac{\partial v}{\partial x} + N \left[\xi + \left(\frac{7}{3} - N \right) \eta \right] \frac{v}{r}.$$

В отличие от (1), здесь добавлены члены с магнитным давлением в уравнение для импульса, джоулев нагрев Q_j и уравнения для компонент полей \mathbf{H} и \mathcal{E} , определенных из соображений удобства следующим образом: $\mathbf{H} = \{0, H_\varphi, H_z\}$ и $\mathcal{E} = \{0, -\mathcal{E}_\varphi, \mathcal{E}_z\}$. Из (47) можно найти и компоненты плотности тока

$$i_\varphi = -\frac{\rho r^N}{4\pi} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad i_z = \frac{\rho}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} (r^N H_\varphi). \quad (48)$$

В системе (47) v_m — магнитная вязкость ($v_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$, где σ — проводимость среды [100]). Как и для других коэффициентов систем (1) и (47), примем следующий вид зависимости v_m от парамет-

ров среды:

$$v_m = a_{11} T_e^{m_{11}} \rho^{k_{11}} t^{l_{11}}. \quad (49)$$

Граничные условия для полей требуют задания двух из четырех введенных величин (H_φ , H_z , \mathcal{E}_φ , \mathcal{E}_z) на каждом из концов отрезка $0 \leq x \leq x_0$.

При $x=0$ в качестве граничных условий следует взять условия симметрии

$$H_\varphi(0, t) = 0, \quad \mathcal{E}_\varphi(0, t) = 0. \quad (50)$$

При $x=x_0$ можно задать, например, продольные компоненты:

$$H_z(x_0, t) = H_0 t^{n_4}, \quad \mathcal{E}_z(x_0, t) = \mathcal{E}_0 t^{n_5}, \quad (51)$$

причем, в результате размерностного анализа (10), показатели n_4 и n_5 таковы:

$$n_4 = -1 + (1-N) \frac{n}{2}, \quad n_5 = -2 + (3-N) \frac{n}{2}.$$

При задании полного тока $I(t)$, протекающего вдоль столба плазмы, второе условие из (51) должно быть заменено на

$$H_\varphi(x_0, t) = \frac{2\pi^{1-N} I(t)}{r_*^N l^{1-N}}. \quad (52)$$

Здесь l — размер пинча при $N=0$ вдоль поперечной оси y , $r_* = r(x_0, t)$ — радиус пинча, а полный ток $I(t)$ связан с плотностью тока $i_z(x, t)$ формулой

$$I(t) = [2\pi N + 2(1-N)l] \int_0^{x_0} \frac{i_z}{\rho} dx, \quad N=0, 1. \quad (53)$$

Из (52) следует закон изменения полного тока $I(t)$, обеспечивающий автомодельность (10) задачи

$$I(t) = I_0 t^{n_0}, \quad (54)$$

где $n_0 = nN + n_4 = \frac{n}{2}(N+1) - 1$, т. е. $n_0 = \frac{n}{2} - 1$ для $N=0$ и $n_0 = n - 1$ для $N=1$.

Размерностный анализ системы (47) с учетом эффектов диссипации магнитного поля [67, 70] дополняет формулы (10) следующим образом:

$$H_{\varphi, z}(x, t) = \frac{x_0^{1/2} (v_0 t^n)^{\frac{1-N}{2}}}{t} h_{\varphi, z}(\xi),$$

$$\mathcal{E}_{\varphi, z}(x, t) = \frac{x_0^{1/2} (v_0 t^n)^{\frac{3-N}{2}}}{t^2} e_{\varphi, z}(\xi),$$

$$Q_J(x, t) = \frac{x_0^{1/2} (v_0 t^n)^{1-N}}{t^3} \cdot q_J(\xi), \quad (55)$$

$$i_{\varphi, z}(x, t) = \frac{x_0^{1/2} (v_0 t^n)^{\frac{N+1}{2}}}{t} \tilde{i}_{\varphi, z}(\xi),$$

$$v_m(x, t) = (v_0 t^n)^2 t^{-1} \tilde{v}_m(\xi).$$

Формулы (55) показывают, что в случае сжатия ($-\infty < t < 0$) величины q_J и \tilde{v}_m отрицательны, знаки компонент $\mathcal{E}_{\varphi, z}$ и $e_{\varphi, z}$ совпадают, а знаки $H_{\varphi, z}$ и $h_{\varphi, z}$ — противоположны.

Условия автомодельности (13) дополняются условием обезразмеривания постоянной a_{11}

$$n = \frac{2m_{11} - 1 - l_{11}}{2m_{11} - k_{11}(N+1) - 2}, \quad (56)$$

$$a_{11} = A_{11} v_0^{k_{11}(N+1) - 2m_{11} + 2} x_0^{-k_{11}} R^{m_{11}}$$

Для полностью нонизованной плазмы $m_{11} = -3/2$, $k_{11} = l_{11} = 0$, что приводит к значению $n = 4/5$ для любого N . Для всех других процессов (см. (14)) в этом случае получается $n = \frac{4}{4+N}$, т. е. наряду с процессами теплопроводности и вязкости в случае $N = 1$ можно учесть и диффузию магнитного поля в полностью ионизованной плазме.

Сделаем следующее замечание относительно учета замагниченности. В полностью нонизованной плазме [15] при достаточно больших значениях магнитного поля ($Y \gg 1$) коэффициенты переноса начинают зависеть от величины $Y \equiv \Omega_e \tau_e$, величина \mathcal{E}_z — от $\frac{\partial H_z}{\partial x}$ и $\frac{\partial T_e}{\partial x}$, \mathcal{E}_{φ} — от $\frac{\partial}{\partial x}(r^N H_{\varphi})$ и $\frac{\partial T_e}{\partial x}$, W_e — от $\frac{\partial H_z}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial x}(r^N H_{\varphi})$. Здесь

$$\Omega_e = \frac{eH}{m_e c}, \quad H = \sqrt{H_{\varphi}^2 + H_z^2}, \quad \tau_e = \frac{3 \sqrt{m_e} m_{\rho}^{5/2} M_l^{5/2} R^{3/2}}{4 \sqrt{2\pi} e^4 \rho \Lambda} T_e^{3/2}.$$

С точки зрения размерностного анализа, учет замагниченности требует выполнения дополнительного условия обезразмеривания постоянной a_{12} в выражении

$$Y = a_{12} H^b T_e^{m_{12}} \rho^{k_{12}} t^{l_{12}}, \quad (57)$$

где Y — безразмерна. Соответствующие условия имеют вид:

$$n = \frac{2m_{12} + b - l_{12}}{2m_{12} - k_{12}(N+1) + (1-N)b/2}, \quad (58)$$

$$a_{12} = A_{12} v_0^{k_{12}(N+1) - 2m_{12} + (N-1)\frac{b}{2}} x_0^{-k_{12} - \frac{b}{2}} R^{m_{12}}.$$

Для полностью ионизованной плазмы $n_{12} = 3/2$, $k_{12} = -1$, $b = 1$ и из (58) следует, что $n = \frac{8}{9+N}$. В случае $N = 1$ снова получаем $n = 4/5$. В этом случае в системе (47) могут быть добавлены члены, выражающие эффекты замагниченности и термоэлектрических явлений [38]. При выполнении условий (58) зависимости коэффициентов переноса от Y могут быть произвольными, так как Y — безразмерна. В частности, возможны зависимости вида $\kappa_e = \kappa_e^{(0)} \mathcal{F}_\kappa(Y)$, $\nu_m = \nu_m^{(0)} \mathcal{F}_\nu(Y)$ и т. д. Здесь $\kappa_e^{(0)}$, $\nu_m^{(0)}$ — значения коэффициентов в предельном случае слабого поля, а функции \mathcal{F}_κ , \mathcal{F}_ν аппроксимируются в [15] отношениями полиномов от Y .

Качественный анализ системы уравнений (47) с учетом дополнительных членов при $Y > 1$ осложняется из-за появляющихся зависимостей между производными H_φ , H_z и T_e [15, 38, 100]. Для выяснения принципиальных особенностей достаточно провести качественный анализ системы уравнений для представителей размерных величин лишь в случае слабого поля ($Y < 1$).

4.2. Качественный анализ поведения полей по пространству. Этот анализ показывает, что оно зависит от характера изменения со временем интегральных величин — соответствующих потоков магнитного поля.

Подставляя в (47) зависимости (10) и (55), снова получим (17), где в правой части первого уравнения добавлены члены $\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{h_\varphi^2 + h_z^2}{8\pi} \right) + \frac{N h_\varphi^2}{4\pi\lambda}$, в правой части уравнения для $n_\nu \beta_e$ добавлен источник q_ν и добавлены уравнения:

$$\begin{aligned} m_\theta h_z &= \frac{1}{\lambda^N} \frac{d}{d\lambda} (\lambda^N e_\varphi); & e_\varphi &= \tilde{\nu}_m \frac{dh_z}{d\lambda}; \\ m_z h_\varphi &= \frac{de_z}{d\lambda}; & e_z &= \bar{\nu}_m \frac{1}{\lambda^N} \frac{d}{d\lambda} (\lambda^N h_\varphi) \end{aligned} \quad (59)$$

где $m_\theta = \frac{n}{n_\theta} - 1$, $m_z = \frac{n}{n_z} - 1$, $n_\theta = \frac{2}{3+N}$, $n_z = \frac{2}{3-N}$. Как и прежде, система автомодельных уравнений рассматривается на отрезке $0 \leq \lambda \leq \lambda_*$ с граничными условиями (18) — (23).

При учете уравнений (59) на концах отрезка $[0, \lambda_*]$ задаются условия

$$h_\varphi(0) = 0, \quad e_\varphi(0) = 0$$

и

$$e_z(\lambda_*) = e_z^*, \quad h_z(\lambda_*) = h_z^*,$$

которые следуют из (50), (51).

В случае задания полного тока (54) вместо масштаба v_0 в (55) войдет масштаб $I_0: v_0 \sim (I_0 / l^{1-N} \sqrt{x_0})^{\frac{2}{N+1}}$. Включая в опре-

деление масштаба I_0 все постоянные множители (53), получим вместо (52):

$$h_{\varphi}(\lambda_{*}) = \frac{2\pi^{1-N}}{\lambda_{*}^N}.$$

Постоянные m_{θ} и m_z , введенные в (59), указывают на законы изменения со временем магнитных потоков полей H_z и H_{φ} . Осевое магнитное поле H_z существует в конфигурации, называемой Θ -пинчем, азимутальное H_{φ} — в конфигурации Z -пинча [100].

Для осевого поля H_z соответствующий магнитный поток F_z через поперечное сечение пинча выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} F_z &= (2\pi N + 2(1-N)L^{1-N}) \int_0^{r_*} H_z(r, t) r^N dr = \\ &= (2\pi N + 2(1-N)L^{1-N}) \frac{x_0^{1/2}}{t} (v_0 t^n)^{\frac{3+N}{2}} \int_0^{\lambda_*} h_z(\lambda) \lambda^N d\lambda \sim t^{m_{\theta}}, \end{aligned} \quad (61)$$

где $r_* = r(x_0, t)$ — внешний радиус плазмы, а L — то же, что и в (52).

Магнитный поток F_{φ} азимутального поля имеет вид:

$$F_{\varphi} = L \int_0^{r_*} H_{\varphi}(r, t) dr = \frac{L x_0^{1/2} (v_0 t^n)^{\frac{3-N}{2}}}{t} \int_0^{\lambda_*} h_{\varphi}(\lambda) d\lambda \sim t^{m_z}. \quad (62)$$

Из (61), (62) следует, что для режимов сжатия ($-\infty < t < 0$, $t \rightarrow 0$) магнитный поток F_z растет при $m_{\theta} < 0$, убывает при $m_{\theta} > 0$, остается постоянным при $m_{\theta} = 0$. Для режимов разрежения ($0 < t < \infty$, $t \rightarrow +\infty$), наоборот, F_z убывает при $m_{\theta} < 0$, растет при $m_{\theta} > 0$ и постоянен при $m_{\theta} = 0$. Аналогичное поведение со временем имеет поток F_{φ} с заменой m_{θ} на m_z .

Вместе с тем, знаки m_{θ} и m_z (входящих в левые части уравнений (59)) определяют характер поведения полей по пространству.

Рассмотрим сначала поля h_z и e_{φ} . Пусть h_z , θ и δ конечны при $\lambda = 0$, т. е. $h_z(0) \neq 0$, $\tilde{v}_m(0) = v_m(\theta(0), \delta(0)) \neq 0$. Из (59) следует:

$$\frac{dh_z}{d\lambda} = m_{\theta} \frac{\int_0^{\lambda} h_z(y) y^N dy}{\tilde{v}_m \lambda^N}, \quad e_{\varphi} = \frac{m_{\theta}}{\lambda^N} \int_0^{\lambda} h_z(y) y^N dy,$$

причем при $\lambda \rightarrow 0$ будет

$$\frac{dh_z}{d\lambda} \rightarrow \frac{m_{\theta} h_z(0)}{\tilde{v}_m(0)} \cdot \frac{\lambda}{N+1}, \quad e_{\varphi} \rightarrow \frac{m_{\theta} h_z(0)}{N+1} \cdot \lambda.$$

Отсюда видно, что при $\text{sign } m_\theta = \text{sign } \tilde{v}_m$ поля h_z и e_φ монотонно растут по абсолютной величине от центра ($\lambda=0$) к краю ($\lambda=\lambda_*$). Это условие совпадает с условием возрастания величины F_z ($m_\theta \leq 0$ в режиме сжатия при $\tilde{v}_m < 0$ и $m_\theta > 0$ для разрежения при $\tilde{v}_m > 0$).

Аналогично, для полей e_z и h_φ получим

$$\frac{de_z}{d\lambda} = m_z \lambda^{-N} \int_0^\lambda e_z(y) \tilde{v}_m^{-1}(y) y^N dy, \quad h_\varphi = \lambda^{-N} \int_0^\lambda e_z(y) \tilde{v}_m^{-1}(y) y^N dy.$$

Легко видеть, что $|e_z|$ монотонно растет при условии $\text{sign } m_z = \text{sign } \tilde{v}_m$.

Для противоположных условий

$$\text{sign } m_\theta = -\text{sign } \tilde{v}_m, \quad \text{sign } m_z = -\text{sign } \tilde{v}_m \quad (63)$$

профили полей h_z , e_φ и e_z , h_φ могут иметь колеблющийся характер [67, 70]. Если характерный размер изменения полей в этом случае меньше λ_* , то в автотельном режиме плазма разбивается на слои с прямыми и обратными токами (связанными с величинами полей по (47), (48)).

Наконец, в случае $m_\theta = 0$ ($n = n_\theta$) или $m_z = 0$ ($n = n_z$) решения для полей монотонны, причем h_z и e_φ перестают зависеть от \tilde{v}_m (и тем самым от решений для $\theta(\lambda)$ и $\delta(\lambda)$). Этот случай полностью аналогичен случаю $m_* = 0$ ($n = n_*$), в котором решение для $\theta(\lambda)$ является однородным по пространству и не зависит от \tilde{v} (см. (33), стр. 69).

Для оценок характерного размера колебаний поля приведем аналитические решения, имеющие место в случае $\tilde{v}_m \equiv \tilde{v}_0 = \text{const}$. Эти решения такие (C_1 — постоянная интегрирования):

$$e_\varphi = C_1 \tilde{v}_0 \frac{\bar{\lambda}_\theta}{\lambda} \cdot \text{sh}(\bar{\lambda}_\theta), \quad (64)$$

$$h_z = C_1 \text{ch}(\bar{\lambda}_\theta); \quad N=0;$$

$$e_\varphi = C_1 \tilde{v}_0 \frac{\bar{\lambda}_\theta}{\lambda} I_1(\bar{\lambda}_\theta), \quad (65)$$

$$h_z = C_1 I_0(\bar{\lambda}_\theta); \quad N=1;$$

$$h_\varphi = \frac{C_1}{m_z} \frac{\bar{\lambda}_z}{\lambda} \text{sh}(\bar{\lambda}_z), \quad (66)$$

$$e_z = C_1 \text{ch}(\bar{\lambda}_z); \quad N=0;$$

$$h_\varphi = \frac{C_1}{m_z} \frac{\bar{\lambda}_z}{\lambda} I_1(\bar{\lambda}_z), \quad (67)$$

$$e_z = C_1 I_0(\bar{\lambda}_z); \quad N=1;$$

$$h_z = C_1, \quad e_\varphi = 0, \quad m_\theta = 0; \quad (68)$$

$$e_z = C_1, \quad h_\varphi = \frac{C_1 \lambda}{\bar{v}_0 (N+1)}, \quad m_z = 0. \quad (69)$$

Здесь I_0 и I_1 — функции Бесселя мнимого аргумента, $\bar{\lambda}_\theta = \lambda \sqrt{m_\theta / \bar{v}_0}$, $\bar{\lambda}_z = \lambda \sqrt{m_z / \bar{v}_0}$ ($\sqrt{\bar{a}} = i \sqrt{|a|}$, если $a < 0$).

Из (64), (65) и (66), (67) следует простая оценка для «периода» колебания поля (при большом числе «колебаний»), когда $\lambda \gg \sqrt{-\bar{v}_0 / m_\theta}$, $\lambda \gg \sqrt{-\bar{v}_0 / m_z}$, $J_0(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi y}} \cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right) + O(y^{-3/2})$:

$$\Delta \lambda_M^\theta = 2\pi \sqrt{-\bar{v}_0 / m_\theta}, \quad \Delta \lambda_M^z = 2\pi \sqrt{-\bar{v}_0 / m_z} \quad (70)$$

J_0 — функция Бесселя).

Число «колебаний» N_M поля h_z на отрезке $[\lambda_1, \lambda_2] \in [0, \lambda_*]$ можно оценить, взяв среднее значение $\bar{v}_0 = (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} A_3 \theta_e^{m_3} \delta^{k_3} d\lambda$: $N_M = (\lambda_2 - \lambda_1) / \Delta \lambda_M^\theta$. Число нулей поля, т. е. число слоев с прямыми и обратными токами, равно $2N_M$.

4.3. Численный пример решения системы (17), (59). Этот пример приведен для случая $n = 4/5$, $N = 1$ и $n_\theta < n < n_*$. Такой случай отвечает зависимостям в $v_e(T_e, \rho)$ и $v_m(T_e, \rho)$, соответствующим реальной полностью ионизованной плазме ($v_e \sim T_e^{5/2}$, $v_m \sim T_e^{-3/2}$). Для режима сжатия неравенство $n_\theta < n < n_*$ означает, что в таком режиме наблюдается рост энтропии и убывание магнитного потока F_z . Рассмотрим случай однотемпературной плазмы ($\theta_e = \theta_i$), учтем только процессы теплопроводности и диффузии магнитного поля и ограничимся конфигурацией Θ -пинча ($h_\varphi = 0$, $e_z = 0$). Для $N = 1$ и $n = 4/5$ всегда выполнено $n > n_\theta = 1/2$. Условие $n < n_*$ выполняется при $\gamma < \frac{1}{n} = 5/4 = 1,25$.

На рис. 20 приведен результат численного решения системы автомодельных уравнений для $\gamma = 1,2$, $\bar{v} = -0,0001 \cdot \theta^{5/2}$, $\bar{v}_m = -0,001 \cdot \theta^{-3/2}$. Здесь $\xi_* = 0,66$. Профиль давления β (опущенный на графике) определяется профилем магнитного поля: β максимально в точках, где $h_z = 0$ и минимально в точках экстремумов h_z . В расчете для рис. 20 при $\lambda = 0$ $h_z^2 / 8\pi\beta \cong 32$. В окрестности других экстремумов h_z магнитное давление $h_z^2 / 8\pi \approx \beta$. В точках максимумов θ , как следует из общего рассмотрения (см. (31)), $|q_r| > |n_\gamma| \beta$.

Оценим расстояние между максимумами h_z (для $\lambda > 0,2$) по формуле (70). Подстановка численных значений $m_\theta = 0,6$, $\langle \theta \rangle \approx 3,7$, $|\langle \bar{v}_m \rangle| \approx 1,4 \cdot 10^{-4}$ дает $\Delta \lambda_M \approx 0,1$, что совпадает с расчетом. Для определения положения первого нуля h_z исполь-

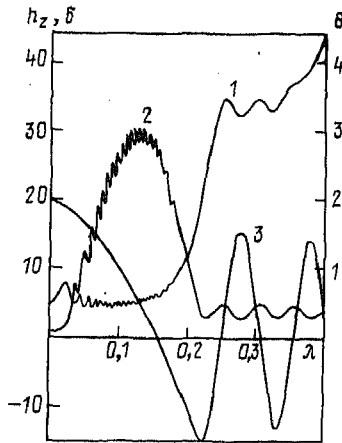


Рис. 20. Профили безразмерных температуры θ (1), плотности δ (2) и осевого магнитного поля h_z (3) в задаче о сжатии одномерной плазмы в режиме с возрастанием энтропии и убыванием магнитного потока

зуюем значение первого корня функции $J_0(y)$: $\lambda_0 \cong 2,4 \sqrt{|\langle \tilde{v}_m \rangle| / m_\Theta}$. Считая для $\lambda < 0,2$, что $\langle \theta \rangle \cong 0,5$, получим оценку $\lambda_0 \cong 0,16$, совпадающую с расчетным значением.

По аналогии с $\Delta \lambda_M$, можно дать оценку и расстояния между максимумами температуры $\Delta \lambda_T \cong 5 \sqrt{\frac{\langle \kappa \rangle (\gamma - 1)}{2 \left(\frac{n}{n_*} - 1 \right) \langle \delta \rangle}}$ [70]. Подста-

новка численных значений показывает хорошую применимость указанной формулы. Отметим, что поведение θ в расчетах, иллюстрируемых рис. 15 и рис. 17, также подчиняется этой формуле.

Максимумы θ при $\lambda \cong 0,25$ и $\lambda \cong 0,31$ на рис. 20, по-видимому, другой природы. Они возникли в областях, где $h_z \cong 0$. В неавтономных режимах здесь происходило бы возрастание плотности со временем более быстрое, чем в других участках плазмы. Такие структуры могут быть обусловлены двусторонним сжатием вещества магнитным полем в точках нулевого значения поля («р-слои»). В отличие от T -слоев, плотность внутри таких образований выше, чем в окружающей среде. Как следует из расчета, представленного на рис. 20, мощность джоулева нагрева $|q_J|$ в этих образованиях в два — три раза меньше мощности $n(1+N)\beta = 1,6\beta$ работы сжатия. Для $\lambda > 0,2$ р-слои, возникающие в точках, где $h_z = 0$, относительно слабы. Мощный р-слой имеет место в окрестности первого нуля магнитного поля ($\lambda \cong 0,14$). Он испещрен серией минимумов плотности δ , возникающей как следствие существования в этой области целого семейства максимумов температуры θ .

Немонотонный характер профилей h_z и θ означает, что в та-

ких режимах могут быть реализованы граничные условия разного характера (поле h_z и тепловой поток ω могут иметь любые знаки на поршне). Сложная структура при росте энтропии может существовать, например, как в условиях оттока ($\lambda_* = 0,26$), так и притока тепла ($\lambda_* = 0,4$). В частности, внешние магнитные и тепловые воздействия могут быть исключены: $h_* = 0$ ($\lambda_* \approx 0,36$); $\omega_* = 0$ ($\lambda_* \approx 0,33$).

Используя выражения для v_0 и v_m из [15], можно получить следующие размерные параметры расчета рис. 20: $x_0 \approx 0,15$ г/см, $|v_0| \approx 3 \cdot 10^5$ см \cdot с $^{-0,8}$. Для момента времени $t = -10^{-5}$ с = = -10 мкс по формулам (10), (55) получим: радиус поршня $r_* \approx 13$ см, его скорость $|v_*| \approx 10$ км/с, средняя температура в центральной области ($\lambda < 0,2$) $T \approx 15$ эВ, в граничной ($\lambda > 0,24$) $T \approx 80$ эВ, максимальное значение плотности $\rho_{\max} \approx 5 \cdot 10^{-3}$ г/см 3 ($n_{\max} \approx 10^{21}$ см $^{-3}$), средняя плотность $\langle n \rangle \approx 4 \cdot 10^{20}$ см $^{-3}$, максимальное значение поля $H_{\max} \approx 800$ кЭ. Замагниченность невелика: $Y \approx 0,4$. Длина пробега электронов (вычисленная по T и $\langle n \rangle$ [15] для $t = 10^{-5}$ с) $l_e \approx 3 \cdot 10^{-5}$ см $\ll r_*$ (справедливо приближение сплошной среды), время выравнивания температур электронов и ионов (для $t = -10^{-5}$ с) $\tau_{ei} \approx 4 \cdot 10^{-10}$ с (справедливо одно-температурное приближение).

В заключение отметим, что автомодельное решение, приведенное на рис. 20, представляет собой также сложный тест для проверки возможностей разностных методов решения таких задач для системы (47). Например, здесь предъявляются строгие требования к подробности сетки на интервале $0 < \lambda < 0,2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адъятов М. М., Клоков Ю. А., Михайлов А. П., Автомодельные тепловые структуры с сокращающейся полушириной. Дифференц. уравнения, 1983, 19, № 7, 1107—1114 (РЖМат, 1983, 12Б727)
2. Адалыкин Г. Б., Зибродин А. В., Новожилова Г. Н., Плинер Л. А., О некоторых расчетах по оценке влияния несимметрии на движение дейтерий-тритиевой капли под действием лазерного импульса. В кн.: Материалы объединенного семинара по вычислительной физике (Сухуми, 1973). Тбилиси, ТГУ, 1976, 17—22
3. Алыханов С. Г., Конкашбаев И. К., Равновесные распределения температуры и давления в стационарном разряде с излучением. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1971, № 4, 133—135
4. Анисимов С. И., Иванов М. Ф., Иногамов Н. А., Папимин П. П., Прохоров А. М., Численное моделирование процессов лазерного сжатия и нагрева простых оболочечных мишеней. Физика плазмы, 1977, № 3, 723—735
5. —, Иногамов Н. А., Сингулярные автомодельные режимы сверхплотного сжатия лазерных мишеней. Прикл. мат. и мех., 1980, № 4, 20—24
6. Ануфриева М. А., Демидов М. А., Михайлов А. П., Степанова В. В., Режимы с обострением в задачах газовой динамики. В кн.: Математические модели, аналитические и численные методы в теории переноса.

- Минск, Изд. Ин-та тепло- и массообмена АН БССР, 1982, 19—25 (РЖМат, 1983, 3Б611)
7. —, *Михайлов А. П.*, Локализация газодинамических процессов при изотропическом сжатии газа в режиме с обострением. Дифференц. уравнения, 1983, 19, № 3, 483—491 (РЖМат, 1983, 7Б481)
 8. —, —, Неограниченные решения квазилинейного уравнения переноса. М., 1985, Препринт ИПМат. АН СССР, № 34, 29 с.
 9. *Афанасьев Ю. В.*, *Басов Н. Г.*, *Волосевич П. П.*, *Гамалий Е. Г.*, *Крохин О. Н.*, *Курдюмов С. П.*, *Леванов Е. И.*, *Розанов В. Б.*, *Самарский А. А.*, *Тихонов А. Н.*, Лазерное инициирование термоядерной реакции в неоднородных сферических мишенях. Письма в ЖЭТФ, 1975, 21, вып. 2, 150—155
 10. —, *Гамалий Е. Г.*, *Крохин О. Н.*, *Розанов В. Б.*, Ускорение, сжатие и устойчивость плоского слоя вещества под действием излучения лазера. Прикл. мат. и мех., 1975, 39, 451—457
 11. *Ахромеева Т. С.*, *Курдюмов С. П.*, *Малинецкий Г. Г.*, Парадоксы мира нестационарных структур. М., Знание, 1985, 64 с.
 12. *Баренблатт Г. И.*, *Зельдович Я. Б.*, Промежуточные асимптотики в математической физике, Успехи мат. наук, 1971, 26, № 2, 115—129 (РЖМат, 1971, 9Б686)
 13. *Белоконь В. А.*, О достижимости ультравысокого квазиодномерного сжатия. Докл. АН СССР, 1983, 268, № 1, 86—90
 14. —, *Забродин А. В.*, *Каждан Я. М.*, *Свалов А. М.*, *Хохлов Р. В.*, Пример ультравысокого сжатия. М., 1978, Препринт ИПМат. АН СССР, № 39, 50 с. (РЖМат, 1978, 11Б502)
 15. *Брагинский С. И.*, Явления переноса в плазме. В кн.: Вопросы теории плазмы, вып. 1. М., Госатомиздат, 1963, 183—272
 16. *Брушлинский К. В.*, *Каждан Я. М.*, Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики. Успехи мат. наук, 1983, 18, № 2, 3—37 (РЖМат, 1985, 6Б348)
 17. *Бунатян А. А.*, *Неуважова В. Е.*, *Строцева Л. П.*, *Фролов В. Д.*, Численное исследование развития возмущений при сжатии мишени обостренным импульсом. В кн.: Численные методы в физике плазмы. М., Наука, 1977, 83—89 (РЖМат, 1978, 3Б891)
 18. *Васильев Н. И.*, *Клоков Ю. А.*, Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига, Знания, 1978, 183 с. (РЖМат, 1978, 11Б271К)
 19. *Волосевич П. П.*, Движение газа перед поршнем в магнитном поле в случае нелинейной теплопроводности и проводимости. В кн.: Численные методы решения задач математической физики. М., Наука, 1966, 103—112
 20. —, *Гольдин В. Я.*, *Калиткин Н. Н.*, *Курдюмов С. П.*, *Попов Ю. П.*, *Розанов В. Б.*, *Самарский А. А.*, *Четверушкин Б. Н.*, Некоторые стадии сильноточного разряда в плазме. М., 1971, Препринт ИПМат. АН СССР, № 40, 38 с.
 21. —, *Дарьин Н. А.*, *Ермолин Е. В.*, *Леванов Е. И.*, *Мухамбетжанов С. Г.*, Инвариантные решения уравнений газовой динамики с учетом теплопроводности и источника (в лагранжевых координатах). М., 1984, Препринт ИПМат. АН СССР, № 29, 29 с. (РЖМат, 1984, 8Б583)
 22. —, *Дегтярев Л. М.*, *Курдюмов С. П.*, *Леванов Е. И.*, *Попов Ю. П.*, *Самарский А. А.*, *Фаворский А. П.*, Процесс сверхвысокого сжатия вещества и инициирование термоядерной реакции мощным импульсом лазерного излучения. Физика плазмы, 1976, 2, № 6, 883—897
 23. —, *Курдюмов С. П.*, *Леванов Е. И.*, Различные режимы теплового нагрева при взаимодействии мощных потоков излучения с веществом. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1972, № 5, 41—48
 24. —, —, *Попов Ю. П.*, *Самарский А. А.*, Автомодельная задача о сильноточном разряде в плазме. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1970, 10, № 6, 1447—1457 (РЖМат, 1971, 5Б501)
 25. —, *Леванов Е. И.*, Автомодельная задача о движении плоского поршня

- в теплопроводном газе при наличии вмороженного магнитного поля. В кн.: Численные методы решения задач математической физики. М., Наука, 1966, 87—102
26. —, Решение автомодельной задачи об истечении газа в вакуум в двухтемпературном гидродинамическом приближении. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1975, 15, № 3, 702—712 (РЖМат, 1975, 10Б433)
 27. —, Некоторые автомодельные задачи газовой динамики с учетом дополнительных нелинейных эффектов. Дифференц. уравнения, 1981, 17, № 7, 1200—1213 (РЖМат, 1981, 12Б600)
 28. —, Соколов В. С., Автомодельная задача о разлете электропроводного газа в среду с заданным осевым магнитным полем. Магнит. гидродинамика, 1967, № 1, 43—46
 29. Галактионов В. А., Об условиях локализации неограниченных решений квазилинейных параболических уравнений. Докл. АН СССР, 1982, 264, № 5, 1035—1040 (РЖМат, 1982, 10Б375)
 30. —, Доказательство локализации неограниченных решений нелинейного параболического уравнения $u_t = (u^{\alpha} u_x)_x + u^{\beta}$. Дифференц. уравнения, 1985, 21, № 1, 15—23
 31. —, Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А., Асимптотическая стадия режимов с обострением и эффективная локализация тепла в задачах нелинейной теплопроводности. Дифференц. уравнения, 1980, 16, № 7, 1196—1204 (РЖМат, 1980, 11Б431)
 32. —, —, —, Локализация тепла в нелинейных средах. Дифференц. уравнения, 1981, 17, № 10, 1826—1841 (РЖМат, 1982, 2Б422)
 33. —, Самарский А. А., Об одной параболической системе квазилинейных уравнений. I. Дифференц. уравнения, 1983, 19, № 12, 2123—2140 (РЖМат, 1984, 3Б514)
 34. —, —, —, О приближенных автомодельных решениях одного класса квазилинейных уравнений теплопроводности с источником. Мат. сб., 1984, 124, № 2, 163—188 (РЖМат, 1984, 10Б471)
 35. —, —, —, О методе стационарных состояний для нелинейных эволюционных параболических задач. Докл. АН СССР, 1984, 278, № 6, 1296—1300
 36. —, —, —, Об одной параболической системе квазилинейных уравнений. II. Дифференц. уравнения, 1985, 21, № 9, 1544—1559
 37. —, Посашков С. А., Новые варианты использования сильного принципа максимума для параболических уравнений и некоторые их приложения. М., 1985, Препринт ИПМат. АН СССР, № 167, 30 с.
 38. Гасилов В. А., Змитренко Н. В., Карпов В. Я., Круковский А. Ю., Подлесный Д. В., Влияние термоэлектрических явлений на динамику тетапинча. М., 1984. Препринт ИПМат. АН СССР, № 26, 24 с.
 39. Гленсдорф П., Пригожин И., Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М., Мир, 1973, 280 с.
 40. Пригорян С. С., Задача Коши и задача о поршне для одномерных неустановившихся движений газа (автомодельные движения). Прикл. мат. и мех., 1958, 22, № 2, 179—187 (РЖМат, 1961, 3Б274)
 41. —, Предельные автомодельные одномерные неустановившиеся движения газа (задача Коши и задача о поршне). Прикл. мат. и мех., 1958, 22, № 6, 301—310
 42. Гудков В. В., Михайлов А. П., Степанова В. В., Об асимптотиках решений одной автомодельной задачи газовой динамики с нелинейной теплопроводностью. В кн.: Нелинейные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига, ЛГУ, 1985, 133—156
 43. Дарын Н. А., Автомодельные задачи газовой динамики с источником и стоком энергии. Тр. Моск. физ.-тех. ин-та, Сер. Аэрофизика и прикл. матем. М., 1981, 147—149
 44. Дегтярев Л. М., Заклязьминский Л. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А., Соколов В. С., Фаворский А. П., Развитие конечных локальных возмущений электропроводности в потоке слабопроводящего газа в

- присутствии магнитного поля. Теплофиз. высок. температур, 1969, 7, № 3, 471—478
45. Демидов М. А., Течения газа с однородной пространственной плотностью. М., 1985, Препринт ИПМат. АН СССР. № 126, 22 с.
 46. —, О построении решений, описывающих эффект локализации в некоторых сжимаемых средах. М., 1986, Препринт ИПМат. АН СССР, № 1, 24 с.
 47. —, Клоков Ю. А., Михайлов А. П., Безударное сжатие конечной массы газа плоским поршнем при произвольном распределении энтропии. М., 1984, Препринт ИПМат. АН СССР, № 151, 27 с.
 48. —, —, Структуры при безударном сферическом сжатии газа с произвольным распределением энтропии. М., 1985, Препринт ИПМат. АН СССР, № 73, 28 с. (РЖМат, 1986, 3Б646)
 49. —, Михайлов А. П., Совместная локализация процессов сжатия и нагрева в теплопроводном газе. М., 1984, Препринт ИПМат. АН СССР, № 163, 11 с.
 50. —, —, Условия проявления эффекта локализации газодинамических процессов. М., 1985, Препринт ИПМат. АН СССР, № 9, 28 с.
 51. —, —, Многомерные течения с однородной плотностью и эффект локализации. М., 1986, Препринт ИПМат. АН СССР, № 53, 24 с.
 52. —, —, Эффекты локализации и образования структур при сжатии конечной массы газа в режиме с обострением. Прикл. мат. и мех., 1986, 50, № 1, 119—127
 53. —, —, Степанова В. В., Локализация и структуры при сжатии газа в режиме с обострением. Докл. АН СССР, 1985, 281, № 1, 41—46
 54. Демченко В. В., Сравнительное исследование некоторых гидродинамических процессов сжатия. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1979, 19, № 2, 540—545 (РЖМат, 1979, 7Б1102)
 55. Дородницын В. А., Об инвариантных решениях одномерной нестационарной магнитной гидродинамики с конечной проводимостью. М., 1976, Препринт ИПМат. АН СССР, № 143, 53 с.
 56. —, Попов Ю. П., О стационарных режимах излучающего сильнооточного самосжатого разряда. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1973, 13, № 1, 247—253 (РЖМат, 1973, 6Б450)
 57. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Условия усложнения организации нелинейной диссипативной среды. М., 1977, Препринт ИПМат. АН СССР, № 106, 80 с.
 58. —, —, Самарский А. А., Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1983, 23, № 2, 380—390 (РЖМат, 1983, 9Б580)
 59. Жданов С. К., Трубников Б. А. Оптимальное сжатие плазмы в Z- и θ -пинче. Письма в ЖЭТФ, 1975, 21, № 6, 371—374
 60. Забабахин И. Е., Симоненко В. А., Сферическая центрированная волна сжатия. Прикл. мат. и мех., 1978, 42, № 3, 573—576
 61. Захаров А. И., Клавдиев В. В., Письменный В. Д., Ротхарт Л., Саенко В. Б., Старостин А. Н., Ян Г., Экспериментальные наблюдения T-слоев в движущейся плазме, взаимодействующей с магнитным полем. Докл. АН СССР, 1973, 212, № 5, 1092—1095
 62. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П., Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Наука, 1966, 632 с.
 63. Змитренко Н. В., Описание процессов сжатия и разрешения конечной массы плазмы с помощью метода разделения переменных. Тр. Междунар. конгресса матем. ИСМ-82, Краткие сообщ., Варшава, 1983, 11, 28
 64. —, Пример газодинамической диссипативной системы с обратным ходом времени. Ж. анализа и приложений (ГДР), 1983, 2, № 4, 321—327 (РЖМат, 1984, 3Б613)
 65. —, Курдюмов С. П., Автомодельные режимы сжатия плазмы поршнем. В кн.: Тепло- и массоперенос. Сб. докл. IV Всес. сов. по тепло- и массо-

- обмену, т. VIII. Минск. Ин-т тепло- и массообмена АН БССР, 1972, 432—439
66. —, —, Автомодельный режим сжатия конечной массы плазмы. М., 1973, Препринт ИПМат. АН СССР, № 16, 72 с.
 67. —, —, Автомодельный режим сжатия конечной массы плазмы в задачах зета- и тета-пинча. М., 1974, Препринт ИПМат. АН СССР, № 19, 72 с.
 68. —, —, Автомодельный режим сжатия конечной массы. Докл. АН СССР, 1974, 218, № 6, 1306—1309
 69. —, —, Возникновение структур при автомодельном режиме сжатия плазмы. Докл. АН СССР, 1974, 219, № 3, 578—581
 70. —, —, N и S -режимы автомодельного сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1977, № 1, 3—23
 71. —, —, Возможность использования локализации тепла в режимах сжатия тета-пинча с обострением. М., 1980, Препринт ИПМат. АН СССР, № 153, 20 с.
 72. —, —, Режимы сжатия и разрежения конечной массы плазмы, допускающие обращение времени в диссипативной среде. М., 1981, Препринт ИПМат. АН СССР, № 39, 12 с.
 73. —, —, Михайлов А. П., Самарский А. А., Особенности нелинейного скина. В кн.: Сб. аннотаций докладов на II Межд. конф. по теории плазмы Киев, Наукова думка, 1974, 148
 74. —, —, —, —, Возникновение структур в нелинейных средах и нестационарная термодинамика режимов с обострением. М., 1976, Препринт ИПМат. АН СССР, № 74, 67 с.
 75. —, —, —, —, Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью. Письма в ЖЭТФ, 1977, 26, вып. 9, 620—624
 76. —, —, —, —, Местабилизация локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью и условия проявления ее в эксперименте. М., 1977, Препринт ИПМат. АН СССР, № 103, 67 с.
 77. —, Михайлов А. П., Инерция тепла. М., Знание, 1982, 64 с.
 78. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983, 280 с. (РЖМат, 1983, 11А813 К)
 79. Кадомцев Б. Б., Гидромагнитная устойчивость плазмы. В кн.: Вопросы теории плазмы, вып. 2. М., Госатомиздат, 1963.
 80. Каждан Я. М., К вопросу об адиабатическом сжатии газа под действием сферического поршня. М., 1975, Препринт ИПМат. АН СССР, № 89, 23 с.
 81. —, К вопросу об адиабатическом сжатии газа под действием сферического поршня. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1977, № 1, 23—30
 82. —, Адиабатическое сжатие газа под действием цилиндрического поршня. М., 1980, Препринт ИПМат. АН СССР, № 56, 15 с.
 83. Калашиков А. С., О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1974, 14, № 4, 891—905 (РЖМат, 1974, 11Б425)
 84. —, О влиянии поглощения на распространение тепла в среде с теплопроводностью, зависящей от температуры. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1976, 16, № 3, 689—697 (РЖМат, 1976, 10Б394)
 85. Косарев В. И., Свалов А. М., К вопросу оптимизации сжатия сферической массы газа. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1983, № 11, 54—59
 86. Кочина Н. Н., Мельникова Н. С., О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем без учета противодавления. Прикл. мат. и мех., 1958, 22, вып. 4, 444—451
 87. Крашенинникова Н. Л., О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 8, 22—35
 88. Курдюмов С. П., Нелинейные процессы в плотной плазме. В кн.: Проблемы теории плазмы. Докл. II Межд. конф. по теории плазмы (Киев, 1974). Киев: Наукова думка, 1976, 278—288

89. —, *Нелинейные процессы в плотной плазме*. М., 1975, Препринт ИПМат, АН СССР. № 18, 37 с.
90. —, *Локализация тепла в нелинейных средах*. М., 1976, Препринт ИПМат. АН СССР, № 39, 21 с.
91. —, *О физике плазмы с перегретой неустойчивостью*. В кн.: *Материалы объединенного семинара по вычислительной физике* (Сухуми, 1973). Тбилиси, ТГУ, 1976, 165—177
92. —, *Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации*. М., Препринт ИПМат. АН СССР, 1979, № 29, 64 с.
93. —, *Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации*. В кн.: *Современные проблемы математической физики и вычислительной математики* М., Наука, 1982, 217—243 (РЖМат, 1982, 11Б605)
94. —, *Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.*, Диссипативные структуры в неоднородной нелинейной горячей среде. Докл. АН СССР, 1980, 251, № 3, 587—591 (РЖМат, 1980, 7Б380)
95. —, —, —, *Нестационарные диссипативные структуры в нелинейных двухкомпонентных средах с объемными источниками*. Докл. АН СССР, 1981, 258, № 5, 1084—1088 (РЖМат, 1981, 10Б522)
96. —, —, *Потапов А. Б., Самарский А. А.*, Архитектура многомерных тепловых структур. Докл. АН СССР, 1984, 274, № 5, 1071—1075 (РЖМат, 1984, 8Б670)
97. —, *Малинецкий Г. Г.*, Синергетика — теория самоорганизации. Идея, методы, перспективы. М., Знание, 1984, 60 с.
98. —, —, *Повещенко Ю. А., Попов Ю. П., Самарский А. А.* Взаимодействие диссипативных тепловых структур в нелинейных средах. Докл. АН СССР, 1980, 251, № 4, 836—839
99. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1954, 796 с.
100. —, —, *Электродинамика сплошных сред*. М., Наука, 1982, 624 с.
101. *Лейбензон Л. С.*, Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.-Л., ГИТТЛ, 1947, 240 с.
102. *Мартынов Л. К., Павлов К. Б.*, К вопросу о пространственной локализации тепловых возмущений в теории нелинейной теплопроводности. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1972, 12, № 4, 1048—1054 (РЖМат, 1972, 11Б574)
103. *Михайлов А. П., Степанова В. В.*, Локализация и структуры при автомодельном сжатии адиабатического газа в режиме с обострением. М., Препринт ИПМат. АН СССР, № 118, 26 с. (РЖМат, 1983, 3Б615)
104. —, —, *Локализация газодинамических процессов и структуры при адиабатическом сжатии вещества в режиме с обострением*. Прикл. мат. и мех., 1984, 48, № 6, 921—928
105. —, —, *Об одной автомодельной задаче газовой динамики*. М., 1985, Препринт ИПМат. АН СССР, № 168, 21 с.
106. *Немчинов И. В.*, Разлет плоского слоя газа при постепенном выделении энергии. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1961, № 1, 17—27
107. —, *О движении плоского слоя нагреваемого газа и его асимптотиках*. В кн.: *Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа*. М., Наука, 1972, 337—369
108. *Овсянников Л. В.*, Новое решение уравнений гидродинамики. Докл. АН СССР, 1956, 111, № 4, 25—28
109. —, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. М., Наука, 1978, 399 с. (РЖМат, 1978, 11Б883К)
110. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1964, 279 с.
111. *Попов Ю. П., Самарский А. А.*, Разностные схемы газовой динамики. М., Наука, 1980, 352 с.
112. *Проблемы лазерного термоядерного синтеза*. М., Атомиздат, 1976, 296 с.

113. Прохоров А. М., Анисимов С. И., Пашинин П. П., Лазерный термоядерный синтез. Успехи физ. наук, 1976, 119, № 3, 401—425
114. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М., Наука, 1978 с.
115. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Локализация процессов диффузии в средах с постоянными свойствами. Докл. АН СССР, 1979, 247, № 2, 349—353
116. —, Дородницын В. А., Курдюмов С. П., Попов Ю. П., Образование Т-слоев в процессе торможения плазмы магнитным полем. Докл. АН СССР, 1974, 216, № 6, 1254—1257
117. —, Емчин Г. Г., Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Горение нелинейной среды в виде сложных структур. Докл. АН СССР, 1977, 237, № 6, 1330—1333
118. —, Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью. Докл. АН СССР, 1975, 223, № 6, 1344—1347 (РЖМат, 1976, 1Б402)
119. —, —, —, Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла. Докл. АН СССР, 1976, 227, № 2, 321—324 (РЖМат, 1976, 8Б565)
120. —, Курдюмов С. П., Нелинейные процессы в плотной плазме и их роль в проблеме лазерного УТС. Тр. кафедры волновой и газовой динамики мех.-мат. ф-та МГУ, М., МГУ, 1979, № 3, 18—28
121. —, —, Куликов Ю. Н., Лесков Л. В., Попов Ю. П., Савичев В. В., Филиппов С. С., Магнитогидродинамическая модель нестационарного ускорения плазмы. Докл. АН СССР, 1979, 206, № 2, 307—310
122. —, Соболев И. М., Примеры численного расчета температурных волн. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1963, 3, № 4, 703—719 (РЖМат, 1964 3Б426)
123. Синочкин Ю. В., О диссипативной неустойчивости в магнитной гидродинамике. Магнитная гидродинамика, 1965, № 3, 61—66
124. Седов Л. И., О некоторых неустойчивых движениях сжимаемой жидкости. Прикл. мат. и мех., 1945, 9, вып. 4, 293—311
125. —, Об интегрировании уравнений одномерного движения газа. Докл. АН СССР, 1953, 90, № 5, 735 (РЖМат, 1955, 1776)
126. —, Методы подобия и размерности в механике. М., Наука, 1981, 448 с.
127. Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н., Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск, Наука, 1984, 272 с.
128. Станюкович К. П., Неустойчившиеся движения сплошной среды. М., Наука, 1971, 856 с.
129. Теория нагрева и сжатия низкоэнтропийных мишеней. Тр. Физ. ин-та АН СССР, 134. М., Наука, 1982, 184 с.
130. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Заключенский Л. А., Волосевич П. П., Дегтярев Л. М., Курдюмов С. П., Попов Ю. П., Соколов В. С., Фаворский А. П., Нелинейный эффект образования самоподдерживающегося высокотемпературного электропроводного слоя газа в нестационарных процессах магнитной гидродинамики. Докл. АН СССР, 1967, 173, № 4, 808—811
131. Фроммер М., Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер. Успехи мат. наук, 1941, вып. 9, 212—254
132. Хакен Г., Синергетика. М., Мир, 1980, 408 с.
133. Clark J. S., Fisher H. N., Mason R. J., Laser-driven implosion of spherical DT targets to thermonuclear burn conditions. Phys. Rev. Lett., 1973, 30, № 2
134. Gülderley G., Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse. Luftfahrtforschung, 1942, 19, № 9, 302—313
135. Keller J. B., Spherical, cylindrical and one-dimensional gas flows. Quart. of Appl. Math., 1955, 14, 171—184

136. *Kidder R. E.*, Theory of homogeneous isentropic compression and its application to laser fusion. *Nuclear Fusion*, 1974, 14, № 1, 53—68
 137. *Nuckolls J., Wood L., Thiessen A., Zimmerman G.*, Laser compression of matter to superhigh densities: thermonuclear applications. *Nature*, 1972, 239, № 2, 5638—5642
 138. *Samarskii A. A.*, Numerical methods in plasma physics. In: III International Symposium «Computing methods in applied sciences and engineering». Berlin, N.-Y., Springer Verlag, 1979, II, 235—247 (PЖMar, 1980, 1B1113)
 139. —, Numerical simulation in plasma physics. In: International Symposium «Computing methods in applied sciences and engineering». North-Holland Publishing Company INRIA, 1980, 285—303
 140. —, Numerical simulation and nonlinear processes in dissipative media. In: *Self-Organization. Autowaves and Structures Far from Equilibrium*, V. I. Krinsky, ed., Berlin, Springer Verlag, 1984, 119—129
 141. *Taylor G. I.*, The air wave surrounding an expanding sphere. *Proc. Roy. Soc.*, 1946, A 186, № 100
-