

**Обеспечение стойкости сложных систем.  
Структурные аспекты  
( Providing of Complex Systems Durability.  
Structural Aspects  
Preprint, Inst. Appl. Math., the Russian Academy  
of Science)**

**Кочкаров А.А., Малинецкий Г.Г.  
(A.A.Kochkarov, G.G.Malinetski)**

**ИПМ им. М.В.Келдыша РАН**

*Москва, 2005*

**Аннотация**

Работа посвящена исследованию стойкости сложных технических систем. Всякая система подвержена влиянию внешних воздействий. Важно знать, как долго система будет в состоянии выполнять свои функции (т.е. сохранять функциональность) при полученных в результате воздействий повреждениях. Предложена модель распространения импульсных воздействий по системе, которая позволила выявить наиболее сильные и слабые места в ее структуре. Модель позволяет оценивать стойкость элемента системы от его положения в структуре.

**Abstract**

This paper is devoted to the researching of durability of compound technical. All systems are influenced by outside factors. It is important to know how long the system will be able to functionate with given damages. The propagation of impacts through the system simulation is suggested. This simulation let to find most strong and weak points in its structure. It shows clearly the dependence of the system element durability from the element place in the structure.

**СОДЕРЖАНИЕ**

**Введение**

- 1. Надежность, живучесть, стойкость**
  - 2. Распространение импульсных воздействий**
    - 2.1. Надежность – как показатель качественного состояния элемента системы**
    - 2.2. Математическая модель распространения возмущений по системе**
    - 2.3. О некоторых особенностях построенной модели**
  - 3. Структурные параметры стойкости системы**
    - 3.1. Переход к бесконтурному графу**
    - 3.2. База орграфа и распространение импульсного воздействия**
    - 3.3. Структурная уязвимость**
    - 3.4. Предельная надежность**
    - 3.5. Показатель проникновения импульсного воздействия**
  - 4. Контуры обратной связи**
    - 4.1. Контур – как внутренний источник возмущений**
  - 5. Алгоритм повышения стойкости системы**
- Заключение**

## Литература

Не было гвоздя –  
Подкова пропала.  
Не было подковы –  
Лошадь захромала.  
Лошадь захромала –  
Командир убит.  
Конница разбита –  
Армия бежит.  
Враг вступает в город,  
Пленных не щадя,  
Оттого, что в кузнице  
Не было гвоздя.

*Самуил Маршак*

Форс-мажорные обстоятельства –  
это хорошо спланированная акция,  
только внешне выглядящая как  
случайность.

*Из высказываний  
страховых агентов*

## ВВЕДЕНИЕ

Современные технические изделия представляют собой сложные системы, состоящие из множества взаимодействующих друг с другом разнородных элементов, число которых может достигать десятков тысяч. Вместе с тем требования по эффективности функционирования и качеству производимых изделий ужесточаются. Во многом это связано с риском возникновения опасностей, аварий и катастроф при эксплуатации технических систем.

Моделирование сложных систем позволяет исследовать особенности их функционирования в различных условиях, наделять их требуемыми характеристиками и снижать риск возникновения *чрезвычайных ситуаций (ЧС)*. Закономерен вопрос – возможно ли в построенной математической модели сложной системы учесть каждый из ее многочисленных элементов.

Рассмотрим проблему с точки зрения теории самоорганизации – синергетики [1], и теории управления рисками [2]. В математической модели исследуемой системы должны быть представлены основные элементы, по поведению, по качеству, по эффективности функционирования которых можно достоверно судить о всей системе. В терминах синергетики это параметры порядка моделируемого объекта. Такой подход в исследованиях, без детального представления сложных систем, процессов и явлений в них протекающих, принято называть *системным синтезом*[3]. О

результативности использования этого подхода можно судить по многим работам [3–6].

В настоящей работе этот подход реализован в виде вероятностно-детерминистической модели, описывающей распространение внешних воздействий (различного характера) среди элементов исследуемой системы. В основе модели лежат формализации структуры системы в виде графа и внешнего негативного влияния на систему в виде импульсного воздействия. Такое представление системы, находящейся в условиях внешних воздействий, позволяет построить *иерархию упрощенных моделей* [6], т.е. рассмотреть различные виды внешних воздействий на систему при различных критериях ее неработоспособности (выход из строя ряда элементов системы, достижение элементами системы предельного состояния и т.д.).

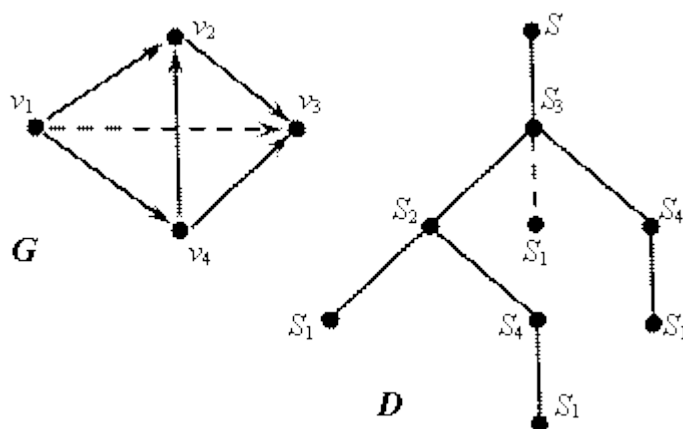
Для каждой модели из иерархии упрощенных моделей конкретного сложного явления (в том числе и системы, находящейся под влиянием внешних воздействий) четко определяется область ее применимости, там где модель наиболее эффективна и полезна. Замечательной чертой иерархии упрощенных моделей является наличие *базовых математических моделей* [7], т.е. таких математических объектов, исследование которых позволяет эффективно строить и изучать большие классы моделей различных по своей природе явлений. Отметим, что такой подход особенно полезен, а, следовательно, и предпочтителен при построении моделей сложных систем.

## 1. НАДЕЖНОСТЬ, ЖИВУЧЕСТЬ, СТОЙКОСТЬ

Под *системой* в кибернетике [8,9] принято понимать объединение любых элементов, рассматриваемых как связное целое. Каждый элемент системы производит определенные действия, что позволяет всей системе выполнять возложенные на нее функции. Особое значение для системы имеет *порядок связей* ее элементов, т.е. порядок взаимодействия элементов системы при ее функционировании. Факт непосредственного (без посредников) взаимодействия между двумя элементами системы и определяет наличие *связи* между ними. Общую картину связей между всеми элементами системы отражает *структура системы*. Опыт исследования многих сложных систем показывает, что на начальном этапе анализа элементы системы целесообразно представлять в виде вершин графа [5,8], наделенных определенными свойствами, а взаимодействие описывать с помощью ребер.

С точки зрения концепции безопасности [10], всякую сложную техническую систему следует изучать с трех основных позиций: *надежности системы, живучести системы*, и ее *безопасности*. Каждая из этих позиций по-разному описывает связь и взаимодействие системы с окружающей ее средой. Исследование перечисленных свойств системы позволяет уменьшить риск возникновения чрезвычайных ситуаций (ЧС), возникающих в результате бедствий, аварий и катастроф.

С позиции классических моделей теории надежности система изучается изолированно от окружающей среды: ни система не подвергается воздействиям внешней среды, ни сама окружающая среда не испытывает на себе воздействий со стороны системы.



**Рис. 1.** Двухполюсный граф  $G$  и дерево отказов  $D$

Вершины  $v_1$  и  $v_3$  – полюсные вершины. На вершину  $v_1$  подается сигнал, который должен достичь вершины  $v_3$ . Главное событие  $S$  – непрохождение сигнала от вершины  $v_1$  до вершины  $v_3$ . Промежуточные события  $S_i, i=\{1,2,3,4\}$ , – непрохождение сигнала до вершины  $v_i$ . Пунктиром изображены резервное соединение (на графе  $G$ ) и соответствующее ему событие (на дереве  $D$ ). Считая надежность (вероятность безотказной работы в течение некоторого промежутка времени) для всех вершин графа равными 0.9 получаем, что надежность функционирования коммуникационной сети в виде графа  $G$  без резервного соединения равна  $P(\bar{S})=1-(1-P(S_3S_4S_1))(1-P(S_3S_2S_1))(1-P(S_3S_2S_4S_1))=$   
 $=1-(1-0.9^3)(1-0.9^3)(1-0.9^4)\approx 0.975$ , с резервным –  $P(\bar{S})=$   
 $=1-(1-P(S_3S_4S_1))(1-P(S_3S_2S_1))(1-P(S_3S_2S_4S_1))(1-P(S_3S_1))=$   
 $=1-(1-0.9^3)(1-0.9^3)(1-0.9^4)(1-0.9^2)\approx 0.995$ . Событие  $\bar{S}$  – событие противоположное событию  $S$ , т.е.  $\bar{S}$  – функционирование коммуникационной сети  $G$ .

*Надежность* [11–17] – свойство системы сохранять в течение определенного промежутка времени значение параметров, характеризующих функционирование системы. Надежность – это комплексное свойство системы, зависящее от ее безотказности, ремонтпригодности, долговечности и т.д.

Теория надежности использует аппарат теории вероятностей и математической статистики. Как правило, для оценки возможности возникновения опасного для окружающей среды состояния системы используется дерево событий (отказов). *Дерево событий (отказов)* – это диаграммное представление всех событий (отказов), последовательное и/или совместное появление которых в системе приводит к некоторому главному событию (возможно, потенциально опасному происшествию). Зная вероятности появления тех или иных событий (отказов), можно подсчитать возможность возникновения главного события (опасного происшествия). В

зависимости от задачи и традиций той или иной области, главным событием называют либо отказ системы (выход из строя), либо адекватную реакцию на воздействие.

В сложных многоэлементных системах к потенциально опасному происшествию могут привести последовательные и/или совместные отказы различных элементов системы. Поэтому для повышения надежности элементов (вероятности безотказной работы) системы, и как следствие, надежности самой системы, используются различные методы резервирования [11–17]. На рис. 1, изображенная в виде графа  $G$ , показана коммуникационная сеть некоторой системы управления. Сеть должна обеспечивать прохождение информационного сигнала от элемента  $v_1$  системы до элемента  $v_3$ . Событие обратное этому является главным для построенного на рис. 1 дерева отказов  $D$ . Использование резервного соединения (см. рис. 1) в коммуникационной сети увеличивает надежность функционирования всей системы.

Для коммуникационной сети (как и для других сложных систем, представляемых в виде графов) численный расчет ее надежности может оказаться задачей требующей значительных временных ресурсов. По сути, построение дерева отказов для коммуникационной сети сводится к простому перебору всех возможных вариантов недостижения информационного сигнала от одной полюсной вершины до другой. Если  $n$ -вершинный граф коммуникационной сети является полным (когда существует двусторонняя связь между любой парой вершин графа), то число только  $n$ -вершинных путей между полюсными вершинами будет равно  $n!$ . Поэтому временная трудоемкость перебора всевозможных отказов системы, а значит и построения дерева отказов, будет зависит экспоненциально  $O(2^n)$  от числа  $n$  элементов системы. То есть при  $n = 1000$ , операций потребуется больше, чем атомов во вселенной. Это недостижимо в компьютерных расчетах. В то же время в современном автомобиле более 10 тыс. деталей, каждая из которых имеет свою вероятность отказа, а в самолете более 100 тыс. деталей. Все это является весомым доводом в пользу применения методов системного синтеза.

Увеличение надежности функционирования систем ведет к снижению риска возникновения ЧС (т.е. опасного для окружающей среды состояния системы).

*Живучесть* – свойство системы, характеризующее ее способность функционировать под влиянием внешних воздействий (нагрузок), возбуждаемых в окружающей систему среде.

Изучение живучести систем возможно с помощью вероятностных моделей, в рамках современной математической теории надежности [11–17], и детерминистическими, в рамках механики катастроф [10].

Вероятностную модель описывающую живучесть системы называют “нагрузка – прочность” (“нагрузка – несущая способность”, “нагрузка –

сопротивляемость”, прочностная модель) [11]. Под действием внешней нагрузки прочность системы постепенно уменьшается до тех пор, пока система не выйдет из строя. Внешние нагрузки описываются случайной величиной (функцией), и как правило, не приводят к скачкообразному изменению прочности системы.

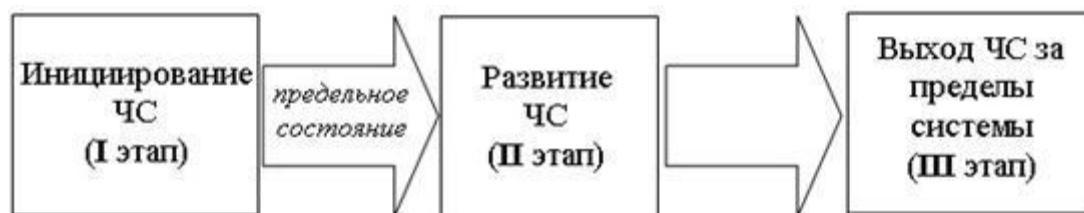
Детерминистическая модель живучести системы лежит в основе механики катастроф [10]. Объектом исследования механики катастроф являются системы, испытывающие постоянные внешние воздействия (нагрузки). Простым примером таких систем служат инженерные конструкции. В рамках механики катастроф исследуются процессы накопления повреждений, достижения предельного (критического) состояния, реакции элементов конструкций на внешние воздействия и т.д.

Особое место в механике катастроф занимает изучение процесса закритического поведения элементов конструкций (систем), которое и приводит к тем или иным нежелательным событиям (авариям, катастрофам и т.д.). Элементы конструкций (систем) в своей закритической области выходят из строя, оказывают влияние на другие элементы системы, порождая тем самым внутренние для самой конструкции (системы) негативные воздействия. Внешние и внутренние воздействия приводят к последовательности отказов элементов системы, инициирующей переход системы в аварийное состояние (ЧС).

Понятие живучести широко используется и при исследовании систем со сложной структурой, таких как коммуникационные сети систем управления и систем энергетики [18]. Нарушение функционирования этих систем возможно при нарушении *связности* их структур. Система не может выполнять свои функции, когда не существует взаимодействия между всеми или, по крайней мере, жизненно важными элементами. “*Мерой живучести*” в этом случае служит минимальное число элементов системы (*вершинная связность* [18,19]) или связей (*реберная связность* [18,19]), выход из строя которых под влиянием внешних воздействий приводит к нарушению связности структуры системы. Для коммуникационной сети (графа  $G$ ) на рис. 1 без резервного соединения реберная связность равна 2, вершинная – 1. При использовании резервного соединения реберная связность возрастает до 3, а вершинная остается равной 1.

Внешние воздействия делят на воздействия природного [10] и техногенного [10] характера. Ко вторым относятся и воздействия, вызываемые умышленными действиями человека. Во многих случаях, при создании сложных технических систем, сейчас приходится принимать во внимание и возможность террористических актов. В зависимости от интенсивности и мощности оказываемых на систему воздействий рассматриваются нормативные (проектные) и экстремальные (сверхнормативные) нагрузки. В первом случае изучается живучесть системы в штатных (нормальных) условиях функционирования, когда переход в аварийное состояние возможен при длительном накоплении системой повреждений и достижения предельного (критического) состояния.

(Подобное поведение систем описывается и методами самоорганизованной критичности [2,4].) Во втором случае изучается живучесть системы, когда возможен относительно быстрый переход в аварийное состояние – форс-мажорные обстоятельства.



**Рис. 2.** Схема развития чрезвычайных ситуаций

Механика катастроф занимается не столько изучением воздействий различного рода, сколько созданием аппарата перехода от воздействий к расчетным действующим нагрузкам.

Живучесть и надежность систем являются теми характеристиками, которые позволяют оценить риск возникновения чрезвычайных ситуаций при эксплуатации сложных технических систем. Используя эти критерии, возможно обеспечение безопасности систем при чрезвычайных ситуациях, или наделение системы необходимыми качественными характеристиками, не допускающими возникновения чрезвычайных ситуаций. В схеме на рис. 2 надежность и живучесть описывают переход от первого этапа ко второму. Живучесть системы предполагает тщательное описание поведения систем (в отличие от надежности), при имеющихся внешних воздействиях на систему как в докритической области (до ЧС), так и в закритической (при развитии ЧС), когда система функционирует, достигнув предельного состояния. Третий этап предполагает изучение возможных последствий ЧС на окружающую систему среду и лежит в области обеспечения безопасности систем [10].

Согласно схеме, представленной на рис. 2, безопасность системы можно обеспечить различными способами: не допустить развитие ЧС в системе, не допустить выхода ЧС за пределы системы, и свести к возможному минимуму влияния аварий на окружающую систему среду.

Напомним, *структура системы* [20] отражает общую картину причинно-следственных взаимодействий элементов системы. Во многих случаях сложность системы определяется сложностью ее структуры. Для подобных технических систем исследование инициирования ЧС (I этап схемы, представленной на рис. 2) внешними воздействиями имеет особое значение. Важно представлять, как от структуры системы зависит достижение системой предельного состояния (критического уровня), за чертой которого риск возникновения ЧС резко возрастает.

В рамках модели, предлагаемой в настоящей работе, сложная техническая система считается подвергнутой влиянию внешних воздействий. Это соответствует попаданию системы в зону “форс-мажорных обстоятельств”, т.е. под влияние ненормативных, непредусмотренных при проектировании системы, экстремальных нагрузок, имеющих также внезапный характер. В основе модели лежит формально представленная структура системы, что позволяет детально воспроизвести все возможные варианты распространения внешних воздействий по элементам системы. Модель при заданных нагрузках на некоторое множество элементов системы, вызываемых различными внешними воздействиями, определяет темп и сроки достижения системой предельного состояния.

*Стойкостью* [21,22] системы назовем ее способность противостоять внешним воздействиям и функционировать в штатном режиме на этапе инициирования ЧС, т.е. в докритической области функционирования системы. Другими словами, *стойкость – это живучесть системы в докритической области функционирования, под влиянием внешних ненормативных воздействий (нагрузок)*. Поэтому основной характеристикой стойкости системы будет служить время достижения системой предельного состояния. Увеличение этого промежутка времени будет способствовать уменьшению риска развития ЧС в системе и обеспечению ее безопасности.

## 2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

### 2.1. НАДЕЖНОСТЬ – КАК ПОКАЗАТЕЛЬ КАЧЕСТВЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТА СИСТЕМЫ

Существуют различные виды внешних воздействий, оказывающих влияние на систему. Воздействия могут быть – механические, термические, электромагнитные, биохимические, радиационные, гидродинамические и т.д. (Как правило, основными считают первые три из перечисленных.) Всякое воздействие вызывает повышение нагрузки на те или иные элементы системы. Повышение нагрузки на отдельно взятый элемент системы отражается на возможности этого элемента выполнять свои функции.

Установление связи между нагрузками  $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_n}$ , вызываемыми воздействиями различного рода, как уже отмечалось, является одной из важных задач механики катастроф. Установление такой связи позволяет ввести функционал

$$\zeta = \Phi(\sigma_{i_1}(t), \sigma_{i_2}(t), \dots, \sigma_{i_n}(t)), \quad (1)$$

задающий зависимость *показателя качественного состояния*  $\zeta$  некоторого элемента системы от нагрузок  $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_n}$ , вызванных внешними воздействиями в момент времени  $t$ .

Для механических систем, все элементы которых являются механическими, функционал (1) имеет вид



$$\zeta_M = \Phi(\sigma_D(t), \sigma_N(t)),$$

где как показатель качественного состояния  $\zeta_M$  элементов системы выступают повреждения, накопленные элементом к моменту времени  $t$ . Деформация  $\sigma_D$  и напряжение  $\sigma_N$ , возникающие у элемента системы, служат количественными представлениями полученных при внешних воздействиях нагрузок и поражений.

Как показывает практика, сложные системы состоят из взаимодействующих элементов различной природы (механической, радиоэлектронной и т.д.). Поэтому не для всех сложных систем удастся точно воспроизвести функционал (1), в левой части которого как показатель качественного состояния элемента системы выступают накопленные за время внешнего поражающего воздействия повреждения. В такой ситуации как показатель качественного состояния элемента разумно использовать его *надежность*. Количественной мерой надежности может служить вероятность  $P$  выхода элемента из строя за единицу времени или, что тоже самое, время  $\bar{T}$ , за которое с заданной вероятностью  $\bar{P}$  элемент также выйдет из строя. Надежность элемента уменьшается при получении им повреждений, вызванных внешними воздействиями.

Функционирование системы предполагает постоянное взаимодействие образующих его элементов. Поэтому внешние воздействия, причинив повреждения одним элементам системы, окажут влияние на показатели качественного состояния (надежности) и элементов, не подвергнутых влиянию этого воздействия непосредственно. Т.е. повышение нагрузки будет наблюдаться не только у тех элементов системы, которые оказались под влиянием внешних воздействий, но и у элементов, взаимодействующих (связанных) с ними. Что приведет к понижению надежности у последних. Надо отметить, что речь идет только о нагрузках, которые не являются нормативными, т.е. учитываемыми при проектировании и эксплуатации системы. Нормативные нагрузки не должны приводить к повреждениям, резко ухудшающим надежность элементов системы. Кратковременные и мощные внешние (далее – *импульсные*) воздействия мгновенно и в значительной степени могут уменьшать показатели надежности отдельных элементов и всей системы в целом, при этом система в состоянии сохранить свою работоспособность.

Надо отметить, что для одних систем, таких как системы вооружений и военная техника, форс-мажорные обстоятельства, формализуемые в настоящей работе в виде импульсных воздействий, являются “нормальными” условиями эксплуатации. Подобные системы должны быть подготовлены для пребывания в условиях форс-мажорных обстоятельств длительное (или достаточное для достижения поставленных целей) время. Для других систем, таких как социально-экономические, биологические и т.п., несмотря на то, что времена их пребывания в условиях форс-мажорных обстоятельств очень

малы, важно знать их реакцию на импульсные воздействия, поскольку они могут оказаться губительными для систем.

## 2.2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ПО СИСТЕМЕ

Как показывает практика, внешнее поражающее воздействие на один из элементов системы обязательно отразится некоторым образом на показателях надежности элементов и всей системы. Это происходит даже в том случае, когда ни элемент, непосредственно получивший поражающий импульс воздействия, ни сама система не потеряли работоспособности. Возможны случаи, когда, с течением времени, помимо элемента получившего воздействия “напрямую”, из строя выходят и элементы системы, не получавшие непосредственного воздействия. Структура многих технических системы, в том числе и военных, представляет собой “жесткую” конструкцию, что позволяет внешнему воздействию, в виде импульса, распространяться по структуре системы. При этом импульс воздействия, уменьшает как показатели надежности отдельных элементов системы, так и всей системы в целом. Для формального отражения этой ситуации можно использовать аппарат дискретной математики и теорию графов, в частности.

Следуя известным подходам к повышению надежности систем и их элементов, не предоставляется возможным продублировать все элементы системы, предполагающей попадание под внешнее влияние. Поэтому требуется изучить реакцию системы на “стороннее” влияние, найти наиболее уязвимые “места” системы и рекомендовать их к резервированию. Для достижения этой цели важно подобрать точный метод формальное представление системы, внешнего воздействия и определить динамику распространения внешнего влияния по системе.

Будем считать тождественными следующие понятия: *граф системы и структура системы, вершина графа и элемент системы, ребро графа и связь между элементами системы.*

Для всякого конечного графа будем использовать обозначение –  $G = (V, E)$ , где  $V = \{v_i\}, i = \overline{1, n}$  – множество вершин, а  $E = \{e = (v, u)\}$  – множество его ребер [23].

Распространения воздействия от одного элемента системы к другому, на графе системы будем задавать *ориентированным ребром* – ребром с определенными началом и концом. Ориентированное ребро часто называют *дугой*, а граф с дугами – *орграфом* [23]. Орграф структуры моделируемой системы не будет иметь петель (т.е. дуг, конец и начало которых совпадает).

*Надежностью элемента* системы будем считать вероятность  $P(t < T)$  того, что элемент будет работоспособен в течение времени  $T$  с момента начала эксплуатации. Но надежности элементов, приписываемые соответствующим вершинам графа системы, не достаточно для полного формального представления системы. Воздействие при прохождении от

одного элемента к другому теряет свою “силу”. Надежность элемента системы и долю уменьшения воздействия при переходе от одного элемента к другому можно получить экспериментально или при экспертном анализе.

Таким образом,

на орграфе  $G = (V, E)$  системы для вершины  $v_i \in V, i \in \{1, 2, \dots, n\}$  весом  $w_i(t) = P_{v_i}(t < T)$  является величина надежности элемента системы, соответствующего вершине  $v_i$ . А весом  $w(v_i, v_j) = \varepsilon_{ij}, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$ , дуги  $(v_i, v_j) \in E$ , причем со знаком “+”, является число  $0 < \varepsilon_{ij} \leq 1$ , равное сохранившейся доле передаваемого воздействия, при переходе от вершины  $v_i$  к вершине  $v_j$ .

Процесс изменения весов вершин графа системы можно отразить следующим правилом, называемым *импульсным воздействием*. Импульсное воздействие определяется *импульсом*  $imp_j(t), j \in \{1, 2, \dots, n\}$  в дискретном времени  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ , который задается отношением

$$imp_j(t) = w_j(t) / w_j(t-1), \text{ при } t > 0. \quad (3)$$

Тогда для  $t \geq 0$  для  $i$ -ой вершины графа  $G$  определим импульсный воздействие

$$w_i(t+1) = w_i(t) \prod_{k=1}^{deg v_i} \varepsilon_{ik} imp_k(t), \quad (4)$$

или

$$imp_j(t+1) = \prod_{k=1}^{deg v_j} \varepsilon_{jk} imp_k(t), \quad (5)$$

полагая при этом, что  $deg v_i$  – число входящих в вершину  $v_i$  дуг.

Формулы (3), (4) и (5) задают изменения весов вершин графа  $G = (V, E)$ , тем самым определяя динамику распространения внешних воздействий по системе.

*Автономное импульсное воздействие* на взвешенном орграфе  $G$  определим по правилу (3) с вектором начальных значений  $\mathbf{W}(0) = (w_1(0), w_2(0), \dots, w_n(0))$  и вектором импульсов

$$\mathbf{Imp}(0) = (imp_1(0), imp_2(0), \dots, imp_n(0)), \quad (6)$$

задающим импульс  $imp_j(0)$  в каждой вершине  $v_j$  в момент времени  $t = 0$ . Автономное импульсное воздействие в паре с вектором начальных значений описывает состояние системы в начальный момент времени, когда под влияние внешних поражающих воздействий попадают все или часть элементов системы.

Автономное импульсное воздействие, в котором вектор  $\text{Imp}(0) = (1, 1, \dots, \text{imp}_{p_i}(0), \dots, 1)$ ,  $p_i(0) > 0$ , имеет только  $i$ -ую отличную от единицы компоненту, назовем *простым воздействием с начальной вершиной*  $v_i \in V$ . Простое импульсное воздействие описывает состояние системы в начальный момент времени, когда внешнее воздействие поражает один из элементов системы. А именно, тот который соответствует  $i$ -ой вершине графа системы.

В соответствии с описанным импульсным воздействием на орграфе, можно ввести различные критерии (признаки) достижения системой предельного состояния. К примеру, можно считать, что система находится в предельном состоянии, если надежность одного или нескольких наиболее значимых элементов системы ниже некоторого допустимого уровня. Этот уровень будем называть *критическим уровнем* надежности элемента. Введенный критерий четко разделяет докритическое и закритическое состояние элемента системы. Если надежность элемента ниже критического уровня, то элемент не в состоянии выполнять возложенных на него функций, или функционировать требуемое время.

Представление исследуемой системы в виде взвешенного по правилу (2) графа  $G = (V, E)$  и формализация внешнего влияния на систему как автономного импульсного воздействия (3)–(6) определяет *модель распространения поражающих воздействий по системе*.

Исследование построенной модели необходимо для решения важной задачи – выяснить, как внешнее воздействие распространяется по структуре системы, и влияет на качественное состояние ее элементов.

### **2.3. О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ПОСТРОЕННОЙ МОДЕЛИ**

Распространение поражающих воздействий по системе в модели (3)–(6) во многом зависит от структуры системы. Поэтому, целесообразно, подвергнуть тщательному анализу граф системы  $G = (V, E)$ , который в полной мере отражает структуру системы.

Во-первых, необходимо выяснить какую часть элементов системы может поразить внешнее воздействие, т.е. как глубоко может распространиться импульсное воздействие по структуре системы. При этом важно найти какая часть весов вершин графа будет уменьшена при таком воздействии. Задача усложняется тем, что глубина распространения импульса зависит непосредственно от его “точки приложения”, от тех вершин к которым будет приложен начальный импульс. В связи с этим, разумно, ввести ряд показателей и параметров, которые будут описывать возможную “поражаемость” элементов системы при различных внешних воздействиях.

Во-вторых, у графа системы возможно наличие контуров, т.е. конечной последовательности дуг графа, начало каждой из которых обязательно совпадает с концом другой из контура. Любой контур в нашей модели

является *контуром положительной обратной связи* [24]. Т.е. уменьшение веса любой вершины контура графа системы из модели (2)–(6) приведет к уменьшению надежности всех элементов контура, а в конечном счете и к уменьшению надежности вершины первой получившей воздействие. Такое “зацикливание” импульсного воздействия может привести к потере работоспособности (переходу в предельное состояние) какого-либо элемента из контура. Более того, при подобном распространении импульса по графу системы, возможен отказ элемента системы, не получавшего импульс воздействия непосредственно. То, как это происходит, и как производить в структуре системы поиск контуров, являющихся “наименее стойкими” или “наиболее поражаемыми” местами в системе, будет показано ниже.

Нельзя обойти стороной вопрос о сложности системы. *Сложность системы* можно понимать двояко: сложность в структуре (compound) системы, и сложность в поведении (complexity) системы. Последнее иногда называют динамической сложностью [7]. Оба понятия сложности не эквивалентны, и не исключено их совместное проявление у одной и той же системы.

Динамической сложности посвящено множество работ, что позволяет говорить о некоторых общепринятых представлениях [6,7,25,26]. Но нельзя этого же сказать касательно определения сложности структуры системы.

В рамках настоящего исследования вполне достаточно утверждать, что сложность структуры системы заключается в наличии большого числа элементов, составляющих систему, и отсутствия тривиальных связей между ними. Очевидно, чем запутанней и трудней для восприятия связи между элементами системы, тем сложнее проследить распространение импульсного воздействия по системе.

Процесс изменения весов вершин графа системы во время импульсного воздействия можно в полной мере считать динамическим. Но длительность этих изменений зависит непосредственно от структуры системы. Только от положения элемента в структуре системы зависит то, как будет меняться его надежность в период распространения возмущений по системе. Надежность элемента может измениться один раз за время импульсного воздействия, а может меняться периодически довольно длительное время. Во многом в предложенной модели (2)–(6), “сложное” поведение надежностей элементов системы в период распространения возмущений – есть следствие (это будет показано ниже) *структурной сложности* системы.

Что бы не быть голословными, приведем примеры *простых* структур. Простым структурам, в нашем понимании, соответствуют регулярные [23], периодические [27], симметричные [28] и автоморфные [28] графы. Распространение импульсных воздействий по таким графам происходит одинаково, по одним и тем же принципам, независимо от точки приложения импульсного воздействия.

Для модели (2)–(6), в рамках концепции иерархии упрощенных моделей, имеет смысл заострить внимание на одном возможном усложнении. Каждому ребру в графе системы можно придать тип (цвет) для того, чтобы

оно могло переносить возмущение только заранее определенных типов (цветов). Такое усложнение модели приведет к необходимости более тщательного и детального анализа исследуемой модели, хотя по сути и не повлияет на адекватность модели. Поэтому в дальнейшем будем считать ребра графа из модели (2)–(6) и переносимые ими возмущения однотипными, “окрашенными в один цвет”.

### 3. СТРУКТУРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ СТОЙКОСТИ СИСТЕМЫ

Функционирование системы в модели (2)–(6) в условиях внешних воздействий зависит от того, к каким элементам (имея ввиду их количество и связи с другими элементами системы) в начальный момент времени было приложено импульсное воздействие. Полный анализ структуры системы как графа (точнее орграфа), проведенный в этом параграфе, выявляет особые свойства структуры системы. Найденные свойства позволяют, в свою очередь, ввести *структурные параметры стойкости системы*, которые определяют наиболее желательный вид структуры для обеспечения стойкости системы. Если структура не удовлетворяет выбранным параметрам, возможно ее изменение для повышения стойкости системы.

#### 3.1. ПЕРЕХОД К БЕСКОНТУРНОМУ ГРАФУ

Последовательность чередующихся вершин  $v_i$  и дуг  $e_i = (v_i, v_{i+1})$

$$S = (v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_i, e_i, v_{i+1}, \dots, v_N), \quad v_i \in V, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (7)$$

орграфа  $G = (V, E)$ , называется *маршрутом* [23] или  $(v_1, v_N)$ -*маршрутом*.

Вершины  $v_1$  и  $v_N$  назовем *крайними*, а все остальные *промежуточными*. *Длиной* маршрута назовем число входящих в него дуг. Маршрут называется *цепью*, если все входящие в него дуги различны, *ипутем*, если входящие в него вершины различны. Будем говорить, что *вершина  $v_N$  достижима из вершины  $v_1$* , если существует  $(v_1, v_N)$ -путь. Если в орграфе  $G$ , где нет параллельных дуг и петель, маршрут (7) можно записать в виде последовательности его вершин  $S = (v_1, v_2, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_N)$ .

Маршрут называется *циклическим*, если совпадают его крайние вершины. Циклический путь называется *контуром* [23].

Последовательность (7) чередующихся вершин и дуг орграфа  $G$  таких, что  $e_i = (v_i, v_{i+1})$  или  $e_i = (v_{i+1}, v_i)$ , называется *полумаршрутом*. Аналогично определяются *полуцепь*, *полупуть* и *полуконтур*.

Орграф называется *сильносвязным*, если любые две его вершины достижимы друг из друга. Орграф называется *слабосвязным*, если две его вершины соединены полупутьем.

Сильносвязной компонентой орграфа называется его максимальный относительно включения сильносвязный подграф. Очевидно, что отношение взаимной достижимости орграфа  $G$  рефлексивно, транзитивно и симметрично. Поэтому получим разбиение множества вершин  $V$  на классы, если в один класс включим вершины, достижимые друг из друга. Как подтверждает [23], подграфы, порожденные классами этого разбиения, и только они, служат сильносвязными компонентами орграфа  $G$ . В орграфе могут быть ребра не входящие ни в одну из его сильносвязных компонент.

Пусть  $\{H_1, H_2, \dots, H_m\}$  – множество всех сильносвязных компонент орграфа  $G$ . Конденсацией орграфа  $G$  называется граф  $G^*$ , вершины  $h_1, h_2, \dots, h_m$  которого соответствуют сильносвязным компонентам орграфа  $G$ , и пара  $(h_i, h_j)$  является дугой в  $G^*$  тогда и только тогда, когда в  $G$  есть дуга, начало которой принадлежит компоненте  $H_i$  а конец –  $H_j$ . На рис. 3 изображены граф  $G$  и его конденсация  $G^*$ .

Очевидно, что любой контур орграфа  $G$  входит в одну из его сильносвязных компонент, но тогда конденсация  $G^*$  не имеет контуров, а значит является бесконтурным графом [29].

Распространяясь по структуре системы импульсное воздействие, уменьшив надежность хотя бы одного элемента какого-либо контура графа, уменьшит надежности и всех остальных элементов контура. Т.е. если импульсное воздействие достигло хотя бы одной из вершин бикомпоненты (так иногда называют сильносвязные компоненты [29]) орграфа, то оно, очевидно, достигнет и всех остальных вершин этой бикомпоненты. Поэтому, без нарушения целостности, изучение процесса распространения импульсного воздействия по графу системы имеет смысл свести к исследованию его конденсации. Гамильтоновы графы [23], т.е. те, которые имеют контур связывающий все вершины, будут исследованы отдельно. Конденсация гамильтонова графа, очевидно, – есть изолированная вершина [23].

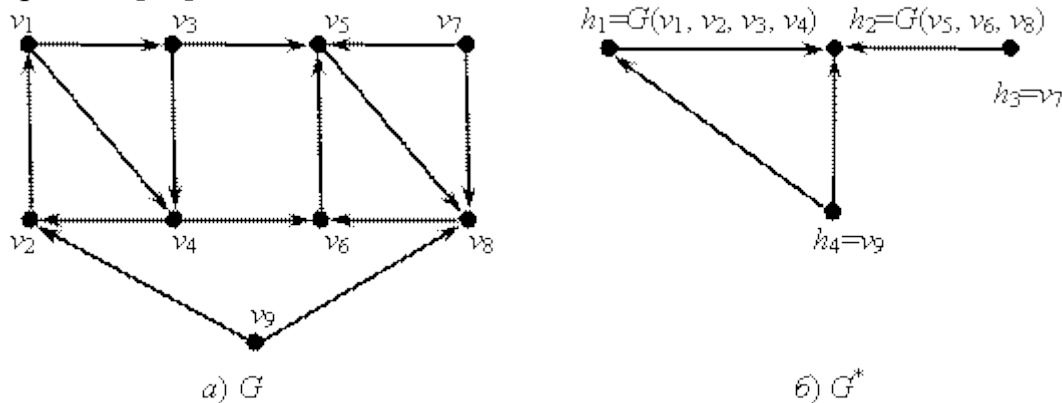


Рис. 3. Граф  $G$ , и его конденсация  $G^*$

Сильно связанные компоненты графа системы, состоящие из всевозможных контуров требуют, как и гамильтоновы графы, отдельного изучения, поскольку являются “особо слабыми местами” в структуре системы. А также возникает необходимость их нейтрализации, т.е. преобразование структуры системы в бесконтурный граф. Нейтрализацию контуров, включенных в сильносвязные компоненты, можно осуществить, к примеру сменой направлений дуг входящих в контур, если такое преобразование позволяет произвести структура системы и ее инженерные особенности. Важно отметить что, отыскание всех сильносвязных компонент орграфа  $G$ , а как следствие и всех его контуров, осуществляет одновременно с построением конденсации  $G^*$ .

Наиболее полное описание алгоритмов построения конденсаций и выделения бикомпонент можно найти в книгах [29] и [30]. Среди прочих следует выделить матричный алгоритм, алгоритмы Тарьяна, Фараджева и Касьянова.

### 3.2. БАЗА ОРГРАФА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Рассмотрим орграф  $G = (V, E)$ , и подмножество его вершин  $B \subseteq V$ , такое что любая вершина из  $V \setminus B$  достижима из какой-либо вершины, принадлежащей  $B$ . Если, к тому же, множество  $B$  минимально относительно включения среди всех подмножеств вершин с описанным свойством, то оно называется базой [23] орграфа  $G$ . В любом орграфе существует база и никакие две вершины базы не соединены маршрутом.

Ранее было решено исследовать конденсацию  $G^* = (V^*, E^*)$  орграфа системы, поэтому отметим следующую особенность бесконтурного графа  $G^*$ . Вершины с нулевыми полустепенями захода, т.е. те которые не имеют входящих дуг, не достижимы ни из каких вершин, а значит все они принадлежат базе. Тогда база любого бесконтурного графа, в том числе и база  $C^*$  орграфа  $G^*$ , состоит только из таких вершин. Поэтому выделение базы бесконтурного графа сводится к поиску всех вершин с нулевыми полустепенями захода.

Суть, каждая вершина  $v_i \in C^*$ ,  $i = \overline{1, |C^*|}$ , имеет окружение  $\xi(v_i)$

$$\bigcup \xi(v_i) = V^*$$

– множество вершин достижимых из вершины  $v_i$ , такое что  $i$ . Поэтому база графа системы – это множество элементов из которых импульсное воздействие в состоянии достичь любой элемент системы без исключения.

Из определения бесконтурного графа следует, что среди его вершин есть такие, полустепени исхода которых равны нулю (число исходящих дуг



из вершины равно нулю). Множество всех таких вершин называется *контрабазой* [29,30]. Вообще говоря, контрабазой может обладать любой оргграф.

На рис. 3 для графа  $G^*$  базу образуют вершины  $(h_3, h_4)$ , а контрабазу – вершина  $h_2$ .

Все введенные понятия связаны следующими утверждениями.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 1.** У всякого бесконтурного графа есть хотя бы одна вершина с нулевой полустепенью захода и хотя бы одна с нулевой полустепенью исхода.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.** Всякая вершина бесконтурного графа принадлежит либо базе графа, либо контрабазе графа, или является *промежуточной*, с ненулевыми полустепенями захода и исхода.

Путь, началом которого является вершина из базы, назовем *базовым*, если его концом является вершина из контрабазы, и *полубазовым* – в противном случае.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 3.** Всякая вершина бесконтурного графа принадлежит не менее чем одному базовому пути.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 4.** Всякая вершина бесконтурного графа из контрабазы достижима не менее чем из одной вершины его базы.

Граф  $G^*$ , изображенный на рис. 3, имеет три базовых пути:  $(h_4, h_1, h_2)$ ,  $(h_4, h_2)$ ,  $(h_3, h_2)$ .

### **3.3. СТРУКТУРНАЯ УЯЗВИМОСТЬ**

Ситуация, когда система попадает в условия поражающих воздействий и в начальный момент времени меняются надежности ряда ее элементов, моделируется, как это отмечалось ранее, автономным импульсным воздействием на граф системы (2).

Рассмотрим конденсацию графа системы и автономное импульсное воздействие на него. Поскольку поражающее воздействие в описываемом случае достигает всех вершин системы, то мера того на сколько изменится надежность конкретного элемента зависит от числа базовых путей которым он принадлежит или, точнее, от числа путей, концом которых он является.

*Структурной уязвимостью*  $\forall l(u)$  вершины  $u \in V^*$  назовем число путей, концом которых является вершина  $u$ .

Для того, что бы осуществить подсчет структурной уязвимости вершины  $u \in V^*$  графа  $G^*$  достаточно определить множество  $U$  вершин, из которых достижима вершина  $u$ , и пересчитать число всех несовпадающих друг с другом  $(v, u)$ -путей для каждой вершины  $v \in U$ . Множество  $U$  назовем *множеством уязвимости* вершины  $u$ . Очевидно, что в образовании всех полубазовых путей вершины  $u \in V^*$  участвуют только вершины ее

множества уязвимости  $U$ . Множество уязвимости  $U$  вершины  $u \in V^*$  на графе  $G^*$  выделяет

**АЛГОРИТМ  $\alpha$ .** Сначала выделим исходную вершину  $u$ , структурную уязвимость которого требуется подсчитать. На этапе  $i = 1$  выделим все входящие в вершину  $u$  дуги, и вершины  $u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{1,s_1}$ , из которых они исходят,  $s_1 \geq 1$  – полустепень захода вершины  $u$ . Вершины  $u$  и  $u_{1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{1,s_1}$  объединим в множество  $U$ . На  $i$ -ом этапе,  $i = 2, 3, \dots, I$ , подобную операцию проведем с каждой из выделенных на предыдущем шаге вершин  $u_{i-1,1}, u_{i-1,2}, \dots, u_{i-1,s_{i-1}}$ , а выделенные на текущем этапе вершины  $u_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,s_i}$  добавим в множество  $U$ . На всех этапах выделять необходимо только непомеченные, т.е. невыделенные ранее, вершины. Процесс выделения продолжается, пока у выделяемых вершин полустепень захода отлична от нуля. Т.е. до тех пор, пока выделяемые вершины не окажутся вершинами базы графа  $G^*$ . Все вершины из множества  $U$  с нулевыми полустепенями захода образуют подмножество  $C_u^* \subseteq U$ , которое является подмножеством базы  $C^* \ni C_u^*$ . ◀Ш

Во-первых, в алгоритме  $\alpha$  любая вершина выделенная на этапе  $i - 1$  достижима хотя бы из одной вершины выделенной на следующем  $i$ -ом этапе, а  $i = 2, 3, \dots, I$ . В противном случае, указанная вершина имела бы нулевую полустепень захода. Во-вторых, для вершины  $u \in V^*$  графа  $G^* = (V^*, E^*)$  ее множество уязвимости  $U$  может совпасть с множеством вершин  $V^*$  всего графа, тогда в результате работы алгоритма  $\alpha$  будет выделено и все множество ребер  $E^*$ . поэтому время работы алгоритма будет наиболее длительным. Такое происходит, к примеру, когда вершина  $u$  – является единственной вершиной контрабазы.

Оба аргумента является основой доказательства следующей теоремы.

**ТЕОРЕМА 1.** Алгоритм  $\alpha$  определяет множество уязвимости  $U$  вершины  $u \in V^*$  графа  $G^* = (V^*, E^*)$  за время  $O(n \cdot m)$ , где  $n = |V^*|$ , а  $m = |E^*|$ .

**ТЕОРЕМА 2.** Для всякой вершины  $v \in V^*$ , входящей в множество уязвимости  $U$  вершины  $u \in V^*$  графа  $G^* = (V^*, E^*)$ , верно неравенство  $vl(u) \geq vl(v)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Множество  $U \subseteq V^*$  графа  $G^* = (V^*, E^*)$  является максимальным относительно включения в него вершин, т.е. не

существует такой вершины из  $V^*$ , добавление которой в множество уязвимости  $U$  вершины  $u \in V^*$  увеличило бы ее структурную уязвимость. А значит, подграф  $J = (U, W) \subseteq G^*$ , порожденный множеством  $U$  (т.е. граф с множеством вершин  $U$  и множеством  $W$  всех ребер из  $E^*$  их соединяющих [23]), является единственно возможным. Подграф  $J = (U, W) \subseteq G^*$  назовем *графом уязвимости* вершины  $u$ . Тогда для всякой вершины  $v \in U$ , отличной от  $u \in U$ , ее множество  $\bar{U}$  уязвимости является подмножеством множества  $U$  уязвимости вершины  $u$ . В таком случае, граф уязвимости  $\bar{J} = (\bar{U}, \bar{W})$  вершины  $v$  также является подграфом  $\bar{J} \supseteq J$  графа уязвимости вершины  $u$ . Поэтому структурные уязвимости вершин  $u$  и  $v$  связаны неравенством  $vl(u) > vl(v)$ , а при совпадении вершин  $u$  и  $v$  – неравенством  $vl(u) \geq vl(v)$ . ◀

**СЛЕДСТВИЕ 2.1.** Для вершин  $u_1, u_2 \in V^*$  графа  $G^* = (V^*, E^*)$  и их графов уязвимости  $J_1 = (U_1, W_1)$  и  $J_2 = (U_2, W_2)$  соответственно, такими что  $J_1 \subseteq J_2$ , справедливо неравенство  $vl(u_1) \leq vl(u_2)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из условия содержания  $J_1 \subseteq J_2$  множества уязвимости вершины  $u_1$  в множестве уязвимости вершины  $u_2$  можно заключить, что  $u_1 \in U_2$ . Но тогда согласно теореме 2  $vl(u_1) \leq vl(u_2)$ . ◀

Каждой вершине  $u$  графа  $G^*$  соответствует некоторое подмножество  $C_u^* \subseteq C^*$  его базы. Но соответствие это не взаимно однозначное. Различные вершины графа  $G^*$  могут принадлежать одним и тем же базовым путям, но иметь различные длина полубазовых путей. Более того, даже если база графа уязвимости одной вершины включена в базу графа уязвимости другой вершины, это не дает возможность установить соотношение между значениями структурной уязвимости первой вершины и второй.

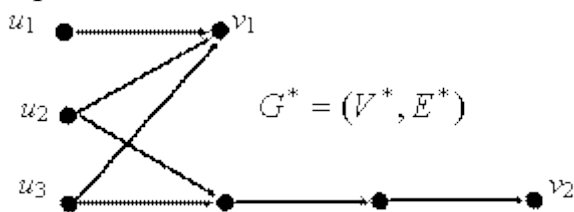


Рис. 4

На рис. 4 изображен граф  $G^*$  с базой  $C^* = \{u_1, u_2, u_3\}$ . Для баз  $C_{v_1}^* = \{u_1, u_2, u_3\}$ ,  $C_{v_2}^* = \{u_2, u_3\}$  графов уязвимости вершин  $v_1, v_2 \in V^*$  выполняется включение  $C_{v_2}^* \subseteq C_{v_1}^*$ . Несмотря на

это, структурная уязвимость вершины  $v_2$  больше структурной уязвимости вершины  $v_1$ . Структурные уязвимости вершин  $v_1$  и  $v_2$  равны  $vl(v_1) = 3$  и  $vl(v_2) = 4$  соответственно.

### 3.4. ПРЕДЕЛЬНАЯ НАДЕЖНОСТЬ

Структурная уязвимость элемента дает качественную оценку его расположению в структуре системы. Структурная уязвимость позволяет судить о том, насколько безопасно расположение элемента в структуре системы относительно других элементов в период поражающих воздействий. Но структурная уязвимость не дает количественной оценки ухудшения надежности элемента при попадании системы в условия поражающих воздействий. Такой оценкой будет служить новый параметр, отчасти являющийся дополнением структурной уязвимости.

Надежность произвольно выбранного элемента  $u \in V^*$  системы из модели (2)–(3) с автономным импульсным воздействием на граф системы  $G^* = (V^*, E^*)$  изменяется скачкообразно, по мере прохождения импульсного воздействия от вершин графа уязвимости  $J = (U, W)$  до самого элемента. Промежуток времени, в течение которого меняется надежность элемента  $u$  назовем *временем воздействия* на элемент  $u$  (вершину) и будем обозначать через  $T_u$ .

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. При автономном импульсном воздействии на систему надежность любого ее элемента изменяется непрерывно, в каждый момент, в течение всего времени воздействия.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. При автономном импульсном воздействии на систему время воздействия на любой ее элемент равно длине его максимального полубазового пути.

Максимальное время воздействия  $T_u$  среди всех элементов  $u$  графа системы  $G^*$  назовем *временем распространения импульсного воздействия* по графу системы и будем обозначать через  $T_{G^*}$ ,  $T_{G^*} = \max_{u \in V^*} T_u$ .

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Время распространения импульсного воздействия по графу системы  $G^*$  равно длине его максимального базового пути.

Важно знать, как к окончанию времени распространения импульсного воздействия по графу системы изменились надежности элементов системы. *Предельной надежностью вершины  $u$*  назовем величину надежности соответствующего ей элемента системы на момент окончания времени воздействия, и обозначим через  $br(u)$ .

Алгоритм  $\alpha$ , описанный в предыдущем параграфе, для любой вершины  $u \in V^*$  графа  $G^* = (V^*, E^*)$  выделяет множество уязвимости  $U$ , из всех вершин которого вершина  $u$  достижима. Благодаря этому, можно

подсчитать сумму длин всех путей, концом которых является вершина  $u$ . Обозначим эту сумму через  $ps(u)$  и назовем мерой структурной уязвимости вершины  $u$ .

**ТЕОРЕМА 3.** *Предельная надежность  $br(u)$  вершины  $u \in V^*$  графа  $G^* = (V^*, E^*)$  с равными весами  $\varepsilon$  для всех ребер из  $E^*$  при автономном импульсном воздействии с начальным импульсом  $imp_0$ , одинаковым для всех вершин из  $V^*$ , определяется формулой*

$$br(u) = w_u imp_0^{vl(u)+1} \varepsilon^{ps(u)}, \quad (8)$$

где  $w_u$  – надежность вершины  $u$  в начальный момент автономного импульсного воздействия.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предельная надежность вершины  $u \in V^*$  графа  $G^* = (V^*, E^*)$  определяется импульсными воздействиями отходящими от вершин его множества уязвимости. Каждое импульсное воздействие, проходя путь от вершины  $v \in V^*$  (важно, что таких путей может быть несколько) до вершины  $u$ , уменьшается в  $\varepsilon^{l(v,u)}$  раз,  $l(v,u)$  – длина пути  $(v,u)$ , и становится равным  $imp_0 \varepsilon^{l(v,u)}$ . По этому же принципу высчитываются значения всех импульсных воздействий подходящих в вершине  $u$ . А их количество, как известно, равно  $vl(u)$  – числу путей, концом которых является вершина  $u$ . Перемножив, в соответствии с (4), значения всех импульсных воздействий подходящих к вершине  $u$ , получаем искомую предельную

надежность  $br(u) = w_u imp_0 imp_0^{vl(u)} \varepsilon^{ps(u)} = w_u imp_0^{vl(u)+1} \varepsilon^{ps(u)}$ .

Показатель  $ps(u)$  множителя  $\varepsilon^{ps(u)}$  появляется в произведении (8) как результат сложения длин всех путей, концом которых является вершина  $u$ . Множитель  $imp_0$  появляется в произведении (8) без уменьшающего его сомножителя  $\varepsilon$ , поскольку одно импульсное воздействие подходит к вершине  $u$  непосредственно. ◀

**ПРИМЕЧАНИЕ 2.1.** Условия теоремы 3 описывает идеализированный случай модели (2)–(6) с равными весам  $\varepsilon$  для ребер графа  $G^*$  и равными импульсами  $imp_0$ , прилагаемыми ко всем его вершинам. Несмотря на это, предельная надежность является очень важным показателем для оценки состояния как системы так и отдельно взятых ее элементов. В общем случае, когда веса ребер и вершин графа  $G^*$  различны вместе с прилагаемыми к ним импульсами, для подсчета предельной надежности элементов в качестве  $\varepsilon$  и  $imp_0$  можно использовать либо наименьшие, либо средние значения весов и импульсов соответственно. Для точного подсчета предельной надежности

отдельного элемента системы достаточно проследив весь путь каждого импульса исходящего из вершин множества уязвимости элемента, отметить какая его доля достигла исследуемого элемента. А затем доли импульсов достигших исследуемый элемент перемножить с величиной его надежности в начальный момент импульсного воздействия. ◀

Предельная надежность элемента зависит непосредственно, как это показывает доказанная теорема, от величины приложенных импульсов к его вершинам графа уязвимости. В различных условиях, при различных импульсных воздействиях, предельная надежность выбранного элемента будет разной.

ПРИМЕЧАНИЕ 2.2. Если критический уровень надежности элемента системы выше, чем ее предельная надежность при предстоящем импульсном воздействии, то этот элемент под влиянием импульсного воздействия выйдет из строя (перейдет в предельное состояние). Таким образом, предельная надежность является тем самым значением, до которого необходимо понизить критический уровень надежности элемента для выполнения возложенных на него функций в период попадания системы в условия, моделируемые данным импульсным воздействием или повысить надежность. ◀

Вообще говоря, в доказательстве теоремы 3 было предположено, что элементы множество уязвимости вершины  $u$  не выходят из строя, т.е. могут передавать соседним вершинам распространяющееся по системе импульсное воздействие.

ПРИМЕЧАНИЕ 2.3. Так же стоит отметить, что повышение надежности или понижения критического уровня надежности элемента до предельной требует определенных затрат. Поэтому при проектировании сложных систем связи (ребра, дуги) между ее элементами следует наделять *амортизирующими свойствами*, которые максимально возможно уменьшали бы долю передаваемых через них импульсов. Количественным отражение таких свойств являются веса из (2). Из формулы (8) видно, что чем меньше вес ребер графа уязвимости вершины  $u$ , тем выше предельная надежность, а значит, тем меньше потребуется затрат для достижение критического уровня надежности элемента системы. ◀

### **3.5. ПОКАЗАТЕЛЬ ПРОНИКНОВЕНИЯ ИМПУЛЬСНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ**

В модели (2)–(6) распространения импульсного воздействия по системе, простое импульсное воздействие с определенной начальной вершиной, независимо от своей величины, имеет возможность распространения на некоторое множество элементов системы. Чем меньше это множество, тем выше сопротивления системы к импульсному воздействию.

Множество вершин любого  $V$  орграфа  $G = (V, E)$  можно разделить на три попарно непересекающихся подмножества. Первое  $C$  –

множество *выходных вершин или база*, это вершины, в каждую из которых не заходит ни одна дуга. Второе  $\bar{C}$  – множество *входных вершин или контрабаза*, это вершины, из которых не исходит ни одна дуга. И наконец, третье – множество *промежуточных вершин*, вершины, у которых имеется хотя бы по одной входящей и исходящей дуге. В графе системы промежуточные вершины передают простой импульс от одной смежной вершине к другой, поэтому такие вершины в графе системы наименее желательны. Наличие входных и выходных вершин в графе системы, наоборот, желательно потому, что простой импульс не дойдет ни до одной входной вершины, и не будет распространяться по системе, если его начальная вершина – выходная.

Опираясь на проделанные рассуждения, введем *показатель проникновения* импульсного воздействия по системе. Показателем проникновения орграфа  $G$  системы будем называть

число 
$$\text{gr}(G) = \frac{|V| - |C| - |\bar{C}|}{|V|}$$
. К примеру, если граф  $G$  имеет гамильтонов контур [23], то  $\text{gr}(G) = 1$ . Надо отметить, что это наихудший случай среди всевозможных орграфов. Все вершины в контуре промежуточные, а значит импульс может распространиться по всей системе, начав с любого ее элемента.

Напомним, что любой бесконтурный граф имеет хотя бы по одну входной и выходной вершине, а поэтому имеет место

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Для всякого бесконтурного графа  $G^* = (V^*, E^*)$ , для его показателя проникновения  $\text{gr}(G^*)$ , справедливо

$$\text{gr}(G^*) \geq \frac{|V^*| - 2}{|V^*|}.$$

Подсчет показателя проникновения импульсного воздействия по орграфу сводится к поиску и подсчету всех входных и выходных вершин орграфа.

## 4. КОНТУРЫ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

В предыдущей главе был определен ряд параметров оценивания стойкости системы. Их значения были подсчитаны не для самого графа системы, а для его конденсации. Исключение составил показатель проникновения импульсного воздействия, определенный в последнем параграфе этой главы. Цель исследования конденсации графа системы – дать поверхностную, приближенную оценку стойкости системы, необходимую на первичном этапе проектировании системы в целом, и ее структуры – в частности. Исследование конденсации графа и подсчет его структурных

параметров имеет смысл только в том случае, когда конденсация – нетривиальный граф, т.е. не вырождается в одну вершины при построении.

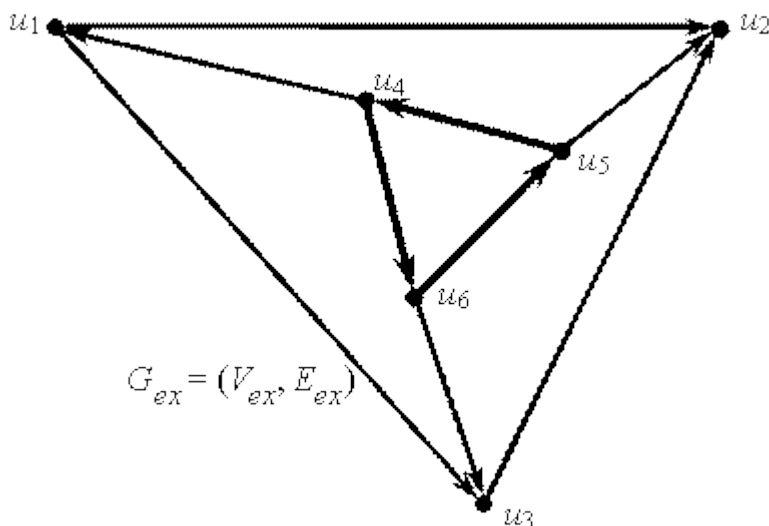
Для внесения изменений в структуру системы, т.е. изменения порядка связей среди элементов системы, с целью повышения стойкости системы или улучшения значения некоторых из структурных параметров системы требуется более детальное изучение структуры системы. И в этом случае объектом исследования должен быть сам граф системы, а не его конденсация. Основное отличие между графом и его конденсацией заключается в наличии у первого контуров обратной связи. Контур графа системы принадлежит исключительно его бикомпонентам и, напомним, стягиваются [23] в некоторые вершины его конденсации. Вершины конденсации, полученные стягиванием бикомпонент графа системы, будем называть *стянутыми*, а все остальные вершины конденсации, соответственно, – *нестягиваемыми*. Конденсация в зависимости от числа бикомпонент своего графа может приобретать различный вид. К примеру, конденсация графа вообще может не содержать нестягиваемых вершин.

Очевидно, значения структурных параметров вершин графа и его конденсации отличаются друг от друга. И то, как и настолько они отличаются друг от друга зависит, в первую очередь, от числа и размера контуров в структуре системы. О том, как контуры в структуре системы влияют на стойкость системы и посвящена эта глава.

#### **4.1. КОНТУР – КАК ВНУТРЕННИЙ ИСТОЧНИК ВОЗМУЩЕНИЙ**

Неоднократно обращалось внимание на то, что контуры в структуре системы являются ее “наименее стойкими местами” при попадании системы в условия поражающих (импульсных) воздействий. Выход элемента системы из строя предполагается только в случае уменьшения его надежности ниже заранее определенного критического уровня. Вышедший из строя элемент накладывает ограничения (большие или меньшие, в зависимости от значимости этого элемента) на функционирование системы, если это еще возможно. Выход из строя любого элемента системы, очевидно, является нежелательным.





**Рис. 5**

отрицательное влияние на стойкость системы. Прежде чем перейти к теоретическому обоснованию нежелательности наличия в структуре системы контуров обратной связи, рассмотрим пример наглядно демонстрирующий еще одно негативное качество контуров в структуре системы.

На рис. 5 изображен 6-вершинный орграф  $G_{ex} = (V_{ex}, E_{ex})$  с множеством вершин  $V_{ex} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$  таким, что вершины  $u_4, u_5$  и  $u_6$  образуют контур положительной обратной связи. Контур  $H_1 = (u_4, u_5, u_6)$  выделен на рис. 5 “жирными” линиями. Начальные веса вершин графа будем считать равными  $w_i(0) = 0.9, i = \overline{1,6}$ . Веса ребер графа положим равными единицы, что позволит ускоренно получить желаемый эффект.

Проследим за тем как будут меняться вектор значений при простом импульсном воздействии

$$\mathbf{Imp}(0) = (1,1,1,1,0.9) \tag{9}$$

на граф  $G_{ex}$  с начальной вершиной  $u_6$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(1) &= (0.9, 0.9, 0.9, 0.9, 0.9, 0.81), \\ \mathbf{W}(2) &= (0.9, 0.9, 0.81, 0.9, 0.81, 0.81), \\ \mathbf{W}(3) &= (0.9, 0.73, 0.81, 0.81, 0.81, 0.81), \\ \mathbf{W}(4) &= (0.81, 0.73, 0.81, 0.81, 0.81, 0.73), \\ \mathbf{W}(5) &= (0.81, 0.66, 0.66, 0.81, 0.73, 0.73), \\ \mathbf{W}(6) &= (0.81, 0.54, 0.66, 0.73, 0.73, 0.73), \\ \mathbf{W}(7) &= (0.73, 0.54, 0.66, 0.73, 0.73, 0.66), \\ \mathbf{W}(8) &= (0.73, 0.49, 0.54, 0.73, 0.66, 0.66), \\ \mathbf{W}(9) &= (0.73, 0.4, 0.54, 0.66, 0.66, 0.66), \end{aligned} \tag{10}$$

**УТВЕРЖДЕНИЕ 9.**  
Импульсное воздействие на любую вершину контура положительной обратной связи приведет к понижению надежности какого-либо элемента этого контура до критического уровня, а как следствие, и к переходу в предельное состояние.

По этой причине контуры в структуре системы имеют

$$\mathbf{W}(10) = (0.66, 0.4, 0.54, 0.66, 0.66, 0.59).$$

Этого количества шагов достаточно, что бы выделить закономерность в изменении весов вершин. Последовательность выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} t = 1 & - u_6; \\ t = 2 & - u_3, u_5; \\ t = 3 & - u_2, u_4; \\ t = 4 & - u_1, u_6; \\ t = 5 & - u_2, u_3, u_5; \\ t = 6 & - u_2, u_4; \\ t = 7 & - u_1, u_6; \\ t = 8 & - u_2, u_3, u_5; \\ t = 9 & - u_2, u_4; \\ t = 10 & - u_1, u_6. \end{aligned} \tag{11}$$

Последовательность изменений весов вершин на шагах с 3-го по 5-ый и с 6-го по 8-ой полностью совпадают. Наблюдается цикличность в изменении весов вершин, не входящих в контур  $H_1$ , но смежных с вершинами контура. Это происходит после второго (на шаге  $t = 4$ ) и третьего (на шаге  $t = 7$ ) изменения веса вершины  $u_6$ , к которой было приложено начальное импульсное воздействие (9). Вершины контура  $H_1$ , в отсутствии внешних импульсных воздействий, циклически изменяют значения своих весов, и влияют на веса остальных вершин графа. Что позволяет считать контур  $H_1$  – *внутренним источником импульсных воздействий*, распространяющихся по вершинам графа, смежных с вершинами контура.

С другой стороны, исходя из определения времени распространение импульсного воздействия по бесконтурному графу, логично предположить, что время распространение импульсного воздействия по произвольному орграфу равно длине его максимального простого пути. Путь  $S = (u_6, u_5, u_4, u_1, u_3, u_2)$  графа  $G_{ex}$ , представленном на рис. 5, является максимальным, а его длина равна  $l(S) = 5$ . Вершина  $u_6$  является точкой приложения простого импульсного воздействия (9), и поэтому после прохождения импульса от вершины  $u_6$  до вершины  $u_2$  по вершинам пути  $S$  распространение импульсных воздействий по графу  $G_{ex}$  должно было прекратиться. Но как показывает последовательность изменений (10)–(11) весов вершин графа  $G_{ex}$  этого не происходит. Сверх того, появляется цикличность в последовательности изменений весов. Прекращение

распространения импульсного воздействия по графу, как будет показано ниже, возможно только при нейтрализации его контуров обратной связи.

Контур, как и любой источник импульсных воздействий, поражает и выводит из строя элементы системы. Обратим внимание на то, что из строя могут выйти элементы системы, не входящие контуры. Чтобы продемонстрировать это, для всех элементов системы со структурой, представленной в виде графа  $G_{ex}$  на рис. 5, определим одинаковый для всех критический уровень надежности  $cr(u_i) = 0.6$ ,  $i = \overline{1,6}$ .

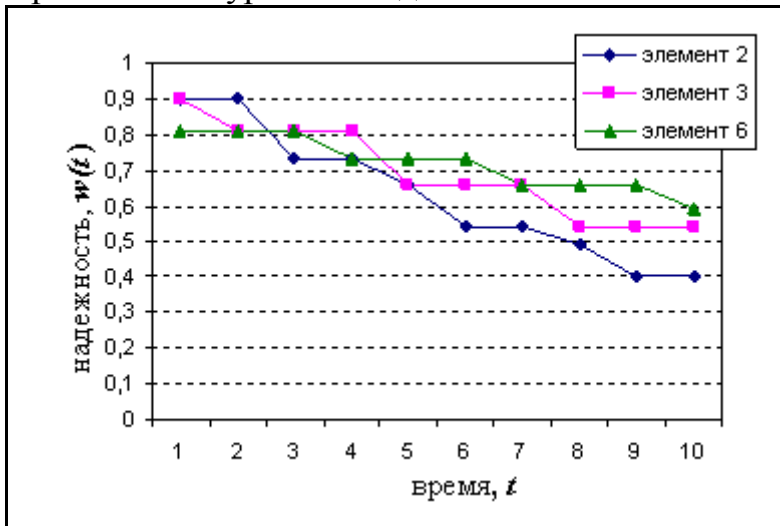


Рис. 6

Первым из всех элементов системы из строя выйдет элемент, соответствующий вершине  $u_2$  графа  $G_{ex}$ . На шаге  $t = 6$  (см. последовательность (10) и рис. 6) его надежность упадет до значения ниже критического,  $w_2(6) = 0.54$ ,  $w_2(6) < cr(u_2)$ .

Следующим из строя выйдет на шаге  $t = 8$  (см.

последовательность (10) и рис. 6) элемент  $u_3$ ,  $w_3(8) = 0.54$ ,  $w_3(8) < cr(u_3)$ . И только лишь на шаге  $t = 10$  (см. последовательность (10) и рис. 6) из строя выйдет элемент  $u_6$ , принадлежащий контуру,  $u_6 \in \bar{H}_1$ . Его надежность достигнет значения  $w_6(10) = 0.59$ , находящегося ниже критического уровня  $w_6(10) < cr(u_6)$ .

Необходимо отметить, что в момент времени  $t = 1$  значение надежности элемент  $u_6$  была меньше, чем значение надежностей элементов  $u_2$  и  $u_3$  (см. последовательность (10) и рис. 6). Но несмотря на это, элемент  $u_6$  вышел из строя, т.е. значение его надежности упала ниже критического уровня, “позже”, чем у элементов  $u_2$  и  $u_3$  (см. последовательность (10) и рис. 6).

Для произвольного графа  $G = (V, E)$  эффект выхода из строя элементов системы по прошествию  $t = l(S)$  шагов распространения импульсного воздействия по структуре системы в виде графа  $G$  назовем остаточным, где  $S \subseteq G$  – путь максимальной длины. За время  $t = l(S)$  импульсное воздействие проходит путь между самыми удаленными друг от друга вершинами графа  $G$ , и изменения значений

надежностей всех элементов системы, происходящие в этом промежутке времени, следует считать вызванными автономным импульсным воздействием. Все изменения значений весов, происходящие по истечении этого времени, являются свидетельствами остаточного эффекта.

Причиной остаточного эффекта, очевидно, являются контуры в структуре системы. Вопрос, о том, в каких местах (на каких элементах) системы проявиться остаточный эффект, может прояснить исследование внутренних источников (а их может быть несколько) возмущений системы.

Элемент системы, вышедший из строя (надежность, которого опустилась ниже критического уровня), не в состоянии передавать импульсное воздействие смежным с ним элементам – таково требование модели (2)–(6), определяющее распространение поражающего воздействия по системе. Выход из строя контуробразующего элемента остановит циркуляцию импульсного воздействия по контуру, что приведет, в конечном итоге, к “затуханию” внутреннего источника возмущений. При этом важно знать, как долго контур будет являться внутренним источником возмущений. Рассмотренный пример показывает, что если нейтрализация контура не производится искусственно – путем изменения структуры системы, то контур перестанет быть источником импульсных воздействий с момента выхода из строя одного из контуробразующих элементов системы.

Контур  $S_{con}$  графа  $G \cong S_{con}$  [23] называется *простым контуром*, если в последовательности (7) среди вершин образующих контур  $S_{con}$ , повторяются только крайние. Возможны три типа простых контуров. Простой контур  $S_{con}$ , вершины которого не являются началами дуг не входящих в его образование, назовем *изолированным*. Если же любая дуга, не входящая в образование простого контура  $S_{con}$ , является исходящей из инцидентной ей вершины контура, то контур  $S_{con}$  назовем *очаговым*. На рис. 5 контур  $H_1 = (u_4, u_5, u_6)$  является очаговым. Если же среди вершин контура  $S_{con}$  есть такие, что имеют инцидентные дуги входящие и исходящие из них, причем не участвующие в образование самого контура  $S_{con}$ , то контур  $S_{con}$  назовем *промежуточным*.

Очаговые, изолированные и промежуточные контуры на графе  $G$  стягиваются соответственно в выходные, входные и промежуточные вершины конденсации  $G^*$ .

Началом и окончанием действия контура  $S_{con}$  – как внутреннего источника возмущений на графе  $G$  будем считать момент первого и, соответственно, последнего изменения надежности вершин (или вершины) образующих контур  $S_{con}$ . *Время действия контура  $S_{con}$*  в качестве внутреннего источника возмущений будем обозначать как  $T(S_{con})$ .

Согласно определению, импульсное воздействие распространяющееся по вершинам изолированного контура, не передается элементам системы, не являющихся составной частью этого контура. Поэтому в отношении изолированного контура справедливо следующее

**УТВЕРЖДЕНИЕ 10.** Изолированный контур  $S_{\text{кон}}$  в структуре системы является внутренним источником возмущений лишь для элементов, образующих сам контур  $S_{\text{кон}}$ .

**ТЕОРЕМА 4.** *Время действия изолированного контура  $S_{\text{кон}}$  в качестве внутреннего источника возмущений на графе  $G = (V, E)$  с равными весами  $\varepsilon$  для всех ребер из  $E$  и равными весами  $w_0$  для всех вершин контура  $S_{\text{кон}}$ , при простом импульсном воздействии  $\text{imp}_0$ , приложенном к*

*одной из вершин контура  $S_{\text{кон}}$ , определяется формулой*

$$T(S_{\text{кон}}) = \frac{\ln \frac{\text{cr}(S_{\text{кон}})}{w_0 p_0}}{K \ln \varepsilon},$$

*где  $\text{cr}(S_{\text{кон}})$  – критический уровень надежности вершин контура,  $(K-1)$  – количество полных обходов, произведенных импульсным воздействием по всем вершинам контура.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Любой простой контур, не являющийся подграфом никакого другого графа, – есть однородная структура. Все вершины и дуги такого графа обладают одними и теми же топологическими свойствами: его вершины имеют полустепени захода и исхода равные единице. Поэтому импульсное воздействие достигнув какой-либо вершины контура может перейти от нее только лишь к другой смежной с ней вершине контура. В процессе распространения простого импульсного воздействия по контуру в каждый момент времени будет меняться значение веса только лишь одной вершины контура. Зная к какой вершине было приложено простое импульсное воздействие, можно проследить динамику изменения импульсного воздействия в процессе распространения по контуру.

Структурная однородность контура позволяет пренебречь “точкой приложения” простого импульсного воздействия, и считать ее произвольно определяемой из вершин контура.

Рассмотрим орграф  $G = (V, E)$  с изолированным контуром  $S_{\text{кон}} \subseteq G$ , удовлетворяющим условиям настоящей теоремы. Поскольку простой импульсное воздействие будет приложено к одной из вершин изолированного контура  $S_{\text{кон}}$ , то оно будет распространять только по вершинам контура. А это позволяет исследовать процесс распространения импульсного воздействия по контуру  $S_{\text{кон}}$ , пренебрегая остальными вершинами и дугами графа  $G$ .

Благодаря структурным особенностям контура  $S_{\text{кон}}$ , простое импульсное воздействие, приложенное к одной из вершин этого контура,

будет распространяться только в одном направлении: в направлении к вершине, смежной с вершиной уже достигнутой воздействием. Это, напомним, позволяет легко проследить изменение величины распространяющегося по контуру импульсного воздействия. В момент времени  $t$  величина импульсного воздействия при передаче от одной вершине к другой, согласно условию теоремы, будет уменьшена в  $\varepsilon$  раз, а по отношению к начальному моменту времени – в  $\varepsilon^t$  раз, и будет равна  $\varepsilon^t \text{imp}_0$ . При этом вес каждой вершины контура зависит от того, сколько раз эта вершина испытала на себе влияние импульсного воздействия. Таким образом, можно вывести зависимость

$$w(t) = w_0 \varepsilon^t \text{imp}_0^{k(t)}, \quad (12)$$

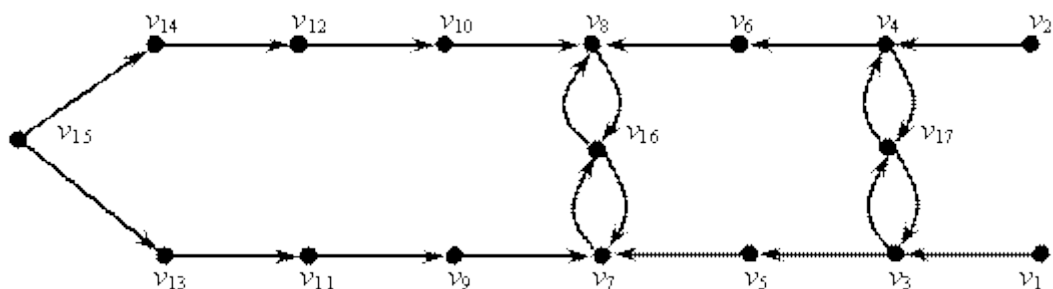
где  $k(t) = [t/l(S_{con})] + 1$  – количество импульсных воздействий испытавших на себе вершина контура к моменту времени  $t$  (квадратными скобками обозначена операция получения целой части числа), а  $l(S_{con})$  – длина контура  $S_{con}$ . Вообще говоря, слагаемое  $[t/l(S_{con})]$  показателя степени в правой части (12) есть число полных обходов [23] произведенных импульсным воздействием по всем вершинам контура  $S_{con}$ , а  $[t/l(S_{con})] + 1$ , –соответственно, номер текущего обхода.

Подставив в (12) значение критического уровня вершин контура, получим

$$\text{cr}(S_{con}) = w_0 \varepsilon^{T(S_{con})} \text{imp}_0^K \quad (13)$$

для определения времени окончания распространения простого импульсного воздействия по контуру  $S_{con}$ . Выразим из (13) время  $T(S_{con})$  действия контура – как внутреннего источника возмущений:

$$\begin{aligned} \ln \text{cr}(S_{con}) &= \ln w_0 \varepsilon^{T(S_{con})} \text{imp}_0^K, \\ \ln \text{cr}(S_{con}) &= T(S_{con}) \ln \varepsilon + K \ln w_0 \text{imp}_0, \\ T(S_{con}) \ln \varepsilon &= \ln \text{cr}(S_{con}) - K \ln w_0 \text{imp}_0, \\ T(S_{con}) \ln \varepsilon &= \frac{1}{K} \ln \frac{\text{cr}(S_{con})}{w_0 \text{imp}_0}, \\ T(S_{con}) &= \frac{\ln \frac{\text{cr}(S_{con})}{w_0 \text{imp}_0}}{K \ln \varepsilon}. \end{aligned} \quad (14)$$



**Рис. 7.** Структурная схема корабельной электроэнергетической системы

Граф  $G$ . Вершины графа  $G$  соответствуют следующим элементам системы:  $v_1, v_2$  – основные генераторы переменного тока;  $v_3, v_4$  – главные распределительные щиты отключаемой нагрузки;  $v_5, v_6, v_9, v_{10}$  – автоматические выключатели;  $v_7, v_8$  – распределительные щиты неотключаемой нагрузки;  $v_{11}, v_{12}$  – обратимые преобразователи постоянно-переменного тока;  $v_{13}, v_{14}$  – запорные устройства;  $v_{15}$  – источник постоянного тока;  $v_{16}, v_{17}$  – междубортные перемычки с автоматическими выключателями. Элемент  $v_{16}$  имеет наибольшую структурную уязвимость среди всех элементов системы, и в первую очередь, необходимо проверить его предельную надежность. Структура системы имеет четыре простых контура:  $(v_8, v_{16}, v_7)$ ,  $(v_7, v_{16}, v_7)$ ,  $(v_4, v_{17}, v_4)$ ,  $(v_3, v_{17}, v_3)$ .

Формула (14) определяет время действия изолированного контура в качестве внутреннего источника возмущений для исследуемой системы. ◀

На рис. 7 в виде ориентированного графа изображена структура корабельной электроэнергетической системы. Элемент  $v_{16}$  имеет наибольшую структурную уязвимость среди всех элементов системы, и в первую очередь необходимо проверить его предельную надежность.

## 5. АЛГОРИТМ ПОВЫШЕНИЯ СТОЙКОСТИ СИСТЕМЫ

Ранее доказанные теоремы являются обоснование следующего алгоритма повышения стойкости (ПС) системы.

### АЛГОРИТМ ПС:

1. Рассмотрим систему со структурой в виде ориентированного графа  $G = (V, E)$ . Предельное состояние системы определяется предельным состоянием некоторого множества ее элементов  $\tilde{v}_i \in V, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Система попадает под влияния импульсного воздействия  $\text{Imp}(0)$ . Для предотвращения перехода системы в предельное состояние необходимо с каждым из элементов  $\tilde{v}_i$  проделать следующие операции.

2. Подсчитать предельную надежность  $br(\tilde{v}_i)$  (см. теорему 1). В случае если, среди элементов  $\tilde{v}_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$  есть элементы контуров обратной связи или элементы смежные с контурами, подсчет  $br(\tilde{v}_i)$  необходимо вести с учетом времени действия этих контуров (см. теорему 2).

3. Повысить надежность элемента  $\tilde{v}_i$  на разницу  $w_i(0) - br(\tilde{v}_i)$ . Повысить надежность элемента  $\tilde{v}_i$  можно любым из известных методов резервирования [11,16]. ◀

$Imp_1(0) = (1, 0.75, 1, 0.75)$	$Imp_2(0) = (0.75, 1, 1, 1)$
$W_1(1) = (0.9, 0.68, 0.9, 0.68)$	$W_2(1) = (0.68, 0.9, 0.9, 0.9)$
$W_1(2) = (0.9, 0.51, 0.51, 0.68)$	$W_2(2) = (0.68, 0.68, 0.68, 0.68)$
$W_1(3) = (0.9, 0.51, 0.38, 0.68)$	$W_2(3) = (0.68, 0.51, 0.38, 0.68)$

**Таблица 1**

К примеру, для графа системы, изображенного на рис. 1 предельным будем считать состояние, когда надежность элемента  $v_3$  опустится ниже отметки 0.4. Тогда, предельное состояние этой системой достигается (см. табл. 1) при импульсном воздействии  $Imp_1(0) = (1, 0.75, 1, 0.75)$  за время  $t_1 = 3$ , а при  $Imp_2(0) = (0.75, 1, 1, 1)$  за время  $t_1 = 3$  (учитывая и резервное соединение).

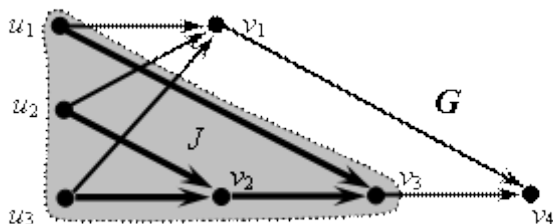
И в первом и во втором случаях время, определяющее стойкость системы, равно трем единицам, но во втором случае система переходит в предельное состояние при меньшем воздействии, по сравнению с первым. Для того чтобы предотвратить переход системы в предельное состояние под влиянием импульсного воздействия  $Imp_1(0)$ , достаточно повысить надежность элемента  $v_3$  до 0.95.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как показывает практика графы являются удобным, и поэтому широко используемым инструментом в математическом моделировании. Заслужено популярны графы в физике [31], химии [32,33], биологии [34,35], технике [16,36,37], экономике [38,39], географии [40] и т.д. Не смотря на то, что графы являются универсальным инструментом, они еще не нашли должного применения в синергетике. В качестве исключения можно сослаться на цикл работ [2,41–43] и монографию [44], где графы используются в моделировании сложных динамических систем с целью получения картины их поведения.

Предложенная в настоящей работе математическая модель распространения внешних воздействий по системе позволяет объяснить ряд явлений, наблюдаемых в сложных технических системах при попадании их в условия внешних воздействий (форс-мажорные обстоятельства). В частности, становится ясно, каким образом при внешних воздействиях выходят из строя (достигают предельного состояния) элементы, не получавшие импульсного воздействия непосредственно. Показано, что причиной выхода из строя элементов системы вне зоны форс-мажорных обстоятельств (после окончания влияния внешних воздействий) являются *внутренние источники возмущений*. Существенной особенностью построенной модели является возможность выхода из строя при распространении импульсных воздействий по системе наиболее надежных элементов. Этот факт красноречиво подчеркивает *прямую зависимость надежности элемента от его положения в структуре, а также зависимость стойкости всей системы от выбранной при проектировании структуры*. Найденные в ходе исследования модели явление относятся к классу синергетических эффектов [45], прогнозирование которых на начальных этапах исследования не тривиально.



**Рис. 8.** Множество уязвимости и граф уязвимости вершины  $v_3$  графа  $G$ .

Граф уязвимости  $J=(U, W)$  вершины  $v_3$  на графе  $G$  нарисован “жирными” стрелками. Множество уязвимости  $U=\{u_1, u_2, u_3, v_2, v_3\}$  вершины  $v_3$  очерчены пунктирной линией. Внешние воздействия, приложенные ко всем или некоторым элементам множества уязвимости вершины  $v_3$ , в состоянии привести к выходу из строя элемента системы, соответствующего этой вершине.

Использование предложенных в работе характеристик (структурная уязвимость, предельная надежность) для оценки состояния элементов при внешних воздействиях, с одной стороны, позволяет решить оптимизационную задачу – резервирование наиболее подверженных внешнему влиянию элементов системы (см. алгоритм ПС в параграфе 5). С другой стороны, искусственно направленные воздействия на множество уязвимости (см. рис. 8) некоторого элемента системы выведут этот элемент из строя.

В общем, руководствуясь предложенной моделью, можно говорить о стойкости системе к конкретным воздействиям. В случае, когда класс воздействий за время их распространения по структуре системы не переводит ее в предельное состояние, система считается *абсолютно стойкой* к этому классу воздействий.  $\mathcal{G} = F(\sigma_D(t), \sigma_N(t))$

В работе представлены рекомендации (см. параграф 5) по наделению системы требуемым уровнем стойкости к внешним поражающим воздействиям. С одной стороны, это позволяет уменьшить риск [2] возникновения ЧС (аварий, и катастроф) в системах, функционирование которых предполагается в условиях внезапных внешних воздействий, на необходимый промежуток времени. К подобным системам относятся системы управления при ЧС, военная техника и т.д. С другой, определение значения стойкости к заданным внешним воздействиям позволяет предупредить возможность возникновения ЧС.

Таким образом, стойкость является одним из параметров управления риском возникновения угроз и опасностей в сложных системах, что принципиально важно для обеспечения безопасности этих систем [46].

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980.
2. *Владимиров В.А., Кульба В.В., Малинецкий Г.Г., Махутов Н.А. и др.* Управление риском. – М.: Наука, 2000.
3. *Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г.* Синергетика и системный синтез // Новое в синергетике: взгляд в третье тысячелетие. – М.: Наука, 2002.
4. Новое в синергетике: взгляд в третье тысячелетие / Под ред. Малинецкого Г.Г., Курдюмова С.П. – М.: Наука, 2002.
5. *Кульба В.В., Кононов Д.А., Косяченко С.А., Шубин А.Н.* Методы формирования сценариев развития социально-экономических систем. – М.: СИНТЕГ, 2004.
6. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос. – М.: Наука, 1992.
7. *Малинецкий Г.Г.* Базовые модели и ключевые идеи синергетики. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, №70. М., 1994.

8. *Кастри Дж.* Большие системы. Связность, сложность и катастрофы. – М.: Мир, 1982.
9. *Эйген М.* Гиперцикл. – М.: Мир, 1984.
10. Безопасность России. Правовые, социально-экономические и научно-технические аспекты. Функционирование и развитие сложных народнохозяйственных, технических, транспортных систем, систем связи и коммуникаций / Под ред. К.В. Фролова. – М.: МГФ “Знание”, 1998.
11. *Острейковский В.А.* Теория надежности. – М.: Высшая школа, 2003.
12. *Райнише К.* Модели надежности и чувствительности систем. – М.: Мир, 1979.
13. *Барлоу Р., Прошан Ф.* Математическая теория надежности. – М.: Советское радио, 1969.
14. *Барлоу Р., Прошан Ф.* Статистическая теория надежности и испытание на безотказность. – М.: Наука, 1984.
15. *Куюнджич С.М.* Разработка и анализ моделей надежности и безопасности систем. – М.: Физматлит, 2001.
16. *Райнише К., Ушаков И.А.* Оценка надежности систем с использованием графов. – М.: Радио и связь, 1988.
17. *Рябинин И.А.* Надежность и безопасность структурно-сложных систем. – СПб.: Политехника, 2000.
18. Моделирование живучести систем энергетики: методология, модель, реализация. Сообщения по прикладной математике. – М.: ВЦ АН СССР, 1986.
19. *Кочкаров А.А., Кочкаров Р.А.* Предфрактальные графы в проектировании и анализе сложных структур. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, №10. М., 2003.
20. *Архипова Н.И., Кульба В.В.* Управление в чрезвычайных ситуациях. – М.: РГГУ, 1998.
21. *Кочкаров А.А., Малинецкий Г.Г.* Концепция стойкости для социально-экономических и технических систем. Труды Международной конференции “Математическое моделирование социальной и экономической динамики”. М.: РГСУ, 2004. – с. 151-154.
22. *Кочкаров А.А., Малинецкий Г.Г.* Стойкость и обоснование стойкости сложных технических и социально-технических систем. Труды XI Международной конференции “Проблемы управления безопасностью сложных систем”. Часть 1. М.: РГГУ, 2003. – С. 50-53.
23. *Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.* Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990.
24. *Робертс Ф.С.* Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. – М.: Наука, 1986.
25. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. – М.: Эдиториал УРСС, 2000.
26. *Николис Г., Пригожин И.* Познание сложного. Введение. – М.: Мир, 1990.

27. Уилсон Р. Введение в теорию графов. – М.: Мир, 1977.
28. Харари Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1973.
29. Евстигнеев В.А., Касьянов В.Н. Теория графов: алгоритмы обработки бесконтурных графов. – Новосибирск: Наука, 1998.
30. Евстигнеев В.А., Касьянов В.Н. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003.
31. Кестен Х. Теория просачивания для математиков. – М.: Мир, 1986.
32. Применение теории графов в химии / Под ред. Зефирова Н.С., Кучанова С.И. – Новосибирск: Наука, 1988.
33. Химические приложения топологии и теории графов. Под ред. Кинга Р. – М.: Мир, 1987.
34. Миркин Б.Г., Родин С.Н. Графы и гены. – М.: Наука, 1977.
35. Розенблит А.Б., Голендер А.Е. Логико-комбинаторные методы в конструировании лекарств. – Рига: Зинатне, 1983.
36. Применение теории графов связи в технике / Под ред. Кернопа Д., Розенберга Р. – М.: Мир, 1974.
37. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. – М.: Наука, 1974.
38. Волконский В.И., Груздов В.В., Сомик К.В. Связные информационные структуры – метод интеграции экономики будущего. – М.: Полтекс, 2001.
39. Авондо-Бодино Дж. Применение в экономике теории графов. – М.: Прогресс, 1966.
40. Коробков С.А. Применение теории графов в геодезии. – М.: Недра, 1976.
41. Кульба В.В., Назаретов В.М., Чухров И.П. Модифицированные функциональные графы как аппарат моделирования сложных динамических систем. Препринт. – М.: Институт проблем управления, 1995.
42. Кульба В.В., Кононов Д.А., Ковалевский С.С. и др. Сценарный анализ динамики поведения социально-экономических систем. Препринт. – М.: Институт проблем управления, 2002.
43. Кононов Д.А., Кульба В.В. и др. Синтез формализованных сценариев и структурная устойчивость сложных систем (синергетика и аттрактивное поведение). Препринт. – М.: Институт проблем управления, 1998.
44. Кульба В.В., Кононов Д.А., Косяченко С.А., Шубин А.Н. Методы формирования сценариев развития социально-экономических систем. – М.: СИНТЕГ, 2004.
45. Малинецкий Г.Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: Введение в синергетику. / Сер. “Кибернетика: неограниченные возможности и возможные ограничения”. – М.: Наука, 1997.
46. Махутов Н.А., Гаденин М.М. Научные исследования и подготовка специалистов по обеспечению защищенности критически важных объектов // Машиностроение и инженерное образование. – 2004. – №1.

---

<sup>[1]</sup> Здесь и далее символом “◀” будем обозначать окончание алгоритмов, доказательств лемм и теорем.