

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. КЕЛДЫША
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

МАЛКОВ Артемий Сергеевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
РАЗВИТИЯ АГРАРНЫХ ОБЩЕСТВ

Специальность 05.13.18 –
Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2005

Работа выполнена в Ордена Ленина Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук

Научные руководители: д.ф.-м.н., проф. Г.Г.Малинецкий
д.ф.-м.н., проф. Д.С.Чернавский

Официальные оппоненты: д.ф.-м.н., член-корр. РАН, проф. Ю.Н.Павловский (Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН),
к.ф.-м.н., д.и.н. проф. Л.И.Бородкин (Исторический факультет МГУ им.М.В.Ломоносова)

Ведущая организация: Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова.

Защита диссертации состоится « ____ » _____ 2005 г.
на заседании диссертационного совета Д002.024.02 при Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
по адресу: Москва, Миусская пл., д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Автореферат разослан « ____ » _____ 2005 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
к.ф.-м.н.

Г.В. Устюгова

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В последние годы математическое моделирование все более широко применяются в социальных науках, прежде всего в экономике и социологии. Речь идет о *динамическом* моделировании социальных процессов. При этом большинство методов, применяемых в настоящее время, ориентированы на поиск равновесных состояний и экстраполяцию по временным рядам, характеризующим историю системы. Однако такой подход имеет серьезные недостатки, которые становятся все более явными. Тем не менее, математическое описание социальных процессов, развивающихся в пространстве и во времени, пока не получило должного развития и распространения.

Один из возможных путей изучения динамики общества связан с анализом исторических процессов. Такой подход, с одной стороны, позволяет иметь дело с более простыми системами – предыдущими стадиями сегодняшнего общества, с другой – дает эмпирическую базу для анализа и поиска закономерностей. Эта идея была использована многими известными историками и экономистами. К ним можно отнести Фернана Броделя¹, стремившегося внести в историю количественный подход, ориентировать ее на анализ и выявление законов развития общества. Нобелевский лауреат по экономике 1971 года Саймон Кузнец², рассматривал экономический рост на столетнем масштабе и применял точные математические и статистические методы. Нобелевские лауреаты 1993 года Роберт Фогель³ и Дуглас Норт⁴ стали основателями «клиометрии» – количественной истории.

В России наиболее значимые работы в этой области принадлежат академику Н.Н. Моисееву⁵, член-корр. РАН Ю.Н. Павловскому⁶ и проф. Л.И. Бородину⁷, предложившим ряд математических моделей исторических процессов. Исследовательская программа по теоретической истории была выдвинута С.П. Капицей, С.П. Курдюмовым и Г.Г. Малинецким⁸. В соответствии с ней в истории появляется прикладной аспект, она рассматривается как основа для стратегического прогноза и планирования.

¹ Бродель Ф. Материальная цивилизация, экономика и капитализм, XV-XVIII вв., в 3 томах, М: Прогресс, 1986

² Kuznets, S. National Product since 1869. New York: Nation Bureau of Economic Research, 1946.

³ Fogel R.W., Engerman S.L. The Economic of Slavery // The Reinterpretation of American Economic History. New York, 1971.

⁴ North D.C. The Economic Growth of the United States, 1790-1860. Englewood Cliffs; Prentice Hall, 1961.

⁵ Моисеев Н.Н. Математика ставит эксперимент. – М.: Наука, 1979.

⁶ Гусейнова А.С., Устинов В.А., Павловский Ю.Н. Опыт имитационного моделирования исторического процесса. – М.: Наука, 1984.

⁷ Андреев А.Ю., Бородин Л.И., Коновалова А.В., Левандовский М.И. Методы синергетики в изучении динамики курсов акций на Петербургской бирже в 1900-х гг. // Круг идей: Историческая информатика в информационном обществе. М., 2001. С.68-109.

⁸ Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. – М.: Наука, 1997.

Во всех этих подходах принципиальным является построение базовых математических моделей, которые позволяют анализировать исторические явления в их наиболее простом и явном виде.

В этом контексте перспективным объектом исследования представляются аграрные (земледельческие) общества, доминировавшие в мировой истории с начала нашей эры практически до XX века. Такие социальные системы, с одной стороны, менее сложны, чем современное общество, с другой – достаточно хорошо задокументированы, чтобы строить математические модели, опирающиеся на статистические данные.

Настоящая диссертация посвящена построению математических моделей развития аграрных обществ.

Целью диссертации является математическое описание социально-исторических процессов, построение и верификация соответствующих математических моделей, анализ роли и взаимного влияния демографических, экономических, технологических и пространственно-географических факторов социальной эволюции аграрных обществ.

В диссертации решались следующие задачи:

1. Обоснование методов математического моделирования социально-исторических процессов в аграрных обществах с учетом пространственно-географических аспектов.
2. Анализ взаимосвязи различных факторов и возможностей их совместного математического описания при построении моделей исторических процессов.
3. Разработка моделей пространственно-исторической динамики аграрных обществ.

Методы исследования. При проведении исследований использовались методы системного анализа, нелинейной динамики, качественной теории нелинейных дифференциальных уравнений, вычислительной математики (в том числе методы переменных направлений, конечных суперэлементов, многосеточный метод Федоренко), теории бифуркаций, фрактальной геометрии, теории вероятностей и математической статистики, а также методы подходы к обработке и представлению данных, используемые в геоинформационных системах.

Научная новизна полученных результатов заключается в том, что

1. предложены математические модели пространственно-исторической динамики аграрных обществ на различных временных масштабах; предложен критерий оценки соответствия результатов пространственного моделирования и реальных пространственных исторических данных;
2. математически описаны механизмы глобального демографического перехода. В модель в качестве одного из основных введен показатель уровня грамотности, ввиду его тесной связи с уровнем рождаемости;
3. выявлены и математически описаны взаимосвязи между численностью населения Земли, мировым ВВП и уровнем грамотности за период с начала нашей эры по настоящее время;

4. предложены и отработаны (на примере моделирования динамики Великого Шелкового пути) методы математического описания исторических процессов с учетом пространственно-географических факторов;
5. введены новые пространственно-географические характеристики: транспортная проводимость и товаропроводность и предложены методы их оценки.

Практическая значимость. Полученные результаты используются в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Институте Африки РАН, Институте востоковедения РАН, University of California, Irvine (США), George Mason University, Fairfax (США), могут быть использованы в Институте российской истории РАН, National Institute of Informatics, Tokyo (Япония).

Предложенные методы и созданные на их основе модели расширяют возможности для моделирования демографических и экономических процессов в аграрных обществах, для реконструкции отсутствующих и верификации имеющихся исторических данных.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на 17 конференциях и симпозиумах: международная конференция «Математика. Компьютер. Образование» (Дубна 2000, 2002, Пущино 2001, 2003, 2005), NATO Advanced Study Institute: Nonlinear Dynamics in Social Science (Москва, 2000), Международный конгресс по искусственному интеллекту ICAI'2001 (Дивногорск, 2001), Международный симпозиум «Рефлексивные процессы и управление» (Москва, 2001, 2003), V International Congress on Mathematical Modeling, V ICMM (Дубна, 2002), Всероссийская научно-практическая конференция «Информационные модели экономики» (Москва, 2003), II Международный научно-практический семинар «Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте» (Коломна 2003), XII Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Владимир, 2003), I Международная научно-практическая конференция. «Стратегии динамического развития России: единство самоорганизации и управления» (Москва, 2004), Международная конференция «Математическое моделирование социальной и экономической динамики», MMSED-2004 (Москва, 2004), Международный симпозиум «Процессы самоорганизации в Универсальной истории» (Белгород, 2004), Annual Meeting of Society for Anthropological Sciences (Santa Fe, USA, 2005), а также на семинарах ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Института Востоковедения РАН, РГГУ и МГУ им.М.В.Ломоносова.

Публикации. По результатам выполненной работы имеется 20 публикаций (см. список публикаций).

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения и четырех глав, изложенных на 160 страницах, содержит 60 рисунков, 17 таблиц и библиографию из 140 наименований.

II. СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обсуждаются проблемы математического моделирования исторических процессов. Рассматриваются различные подходы к описанию социальной динамики, проводится краткий обзор работ, посвященных динамическому моделированию экономических, социальных и исторических процессов.

Приводится краткое изложение содержания диссертации.

Первая глава диссертации посвящена анализу и формализации основных факторов и процессов динамики аграрных обществ, изложению методического подхода к их описанию и моделированию.

В качестве основных переменных выделены *время, пространство, численность населения и ресурс*. Рассмотрены основные подсистемы и предложена общая схема функционирования и взаимодействия аграрных обществ (см. рис.1):

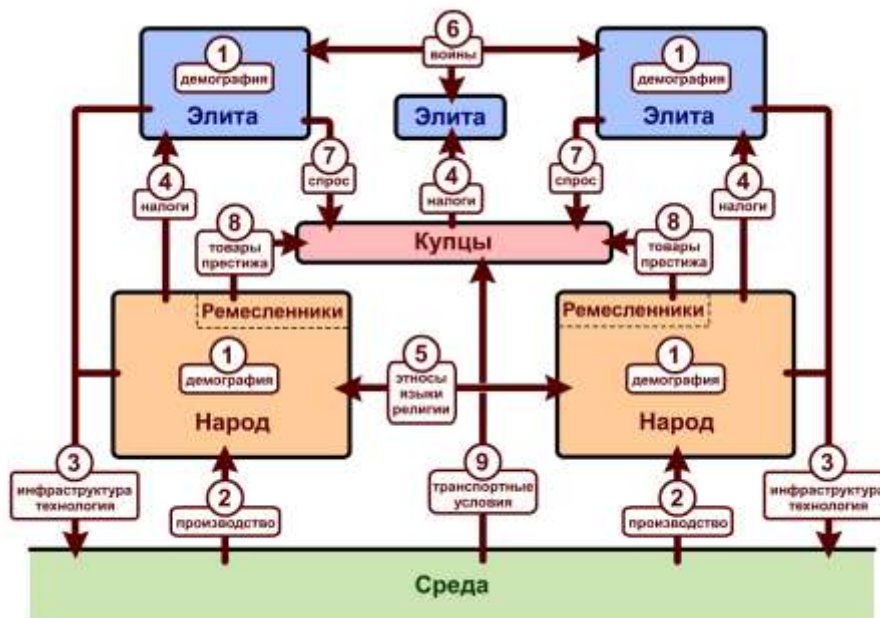


Рис.1. Обобщенная схема функционирования и взаимодействия аграрных обществ.

В рамках диссертации проводится анализ связей и процессов, отраженных на данной схеме, их формализация, разработка и верификация математических моделей, описывающих связи, а также разработка методик оценки параметров этих моделей.

Считается, что население аграрных обществ состоит из *элиты*, выполняющей административные и военные функции, и *народа* – подавляющей части населения, занимающейся, прежде всего, аграрным производством. В представленной схеме учитывается наличие кочевых обществ, обеспечивающих транзитную торговлю между крупными аграрными государствами. Наиболее важными для проводимых исследований социальными слоями этих обществ являются купцы и военно-административная эли-

та, облагающая налогами транзит товаров. Основную массу товаров международной торговли составляют престижные товары (предметы роскоши), спрос на которые поддерживается элитами аграрных государств. Ввиду самодостаточности натурального аграрного хозяйства торговля ресурсами на дальние расстояния может не приниматься во внимание, тогда как торговля предметами престижа играет важнейшую роль, прежде всего, для государств, осуществляющих эту торговлю.

Для описания и взаимодействия аграрных государств имеют важное значение следующие факторы, отраженные на рис.1:

1. *Демография.* Важную роль для описания аграрных обществ играет демографическая динамика, как народа, так и элиты. Перенаселение часто приводит к голоду, крупным социальным кризисам, войнам, эпидемиям и т.п. В связи с этим описание демографической динамики с учетом влияющих на нее факторов является важнейшей задачей.
2. *Аграрное производство.* Это основной вид производства аграрной империи. От наличия или отсутствия излишков продовольствия зависит и демографическая динамика, и сила государства, и благосостояние городов, торговли и ремесел.
3. *Инфраструктура и технологии.* Урожайность территории зависит не только от природных условий, но и от антропогенного влияния. Большую роль играет создаваемая и поддерживаемая государством инфраструктура, а также используемые в хозяйстве технологии.
4. *Налоги.* Сила государства и преуспевание элиты серьезно зависят от сбора налогов – изъятия части произведенного продукта для поддержки бюрократии, армии, высококвалифицированных ремесленников и международной торговли товарами престижа.
5. *Этнические, языковые и религиозные взаимодействия.* Горизонтальные связи между различными государствами осуществляются как на уровне народа, так и на уровне элит. Для народа характерны этнические, языковые и религиозные взаимодействия, играющие важную роль при разделении на «своих» и «чужих». Отдельное значение имеет такое явление как этническая диаспора, выполняющая специализированные социальные функции.
6. *Войны.* Военные действия в аграрных обществах ведутся в первую очередь между элитами за передел сфер контроля над плодородными землями и транспортными потоками, приносящими ресурс в виде налогов. В аграрных обществах нередко элита и народ принадлежат к разным национальным группам, в связи с этим военная динамика часто мало связана с динамикой на уровне основного населения – этнической, языковой и т.п.
7. *Спрос на товары престижа.* Для поддержания своего статуса для элиты особую важность представляют предметы престижа. Немалую

долю собираемых налогов элита тратит на приобретение этих престижных товаров, косвенным образом поддерживая часть населения, занимающегося торговлей и высококвалифицированным ремеслом.

8. *Производство товаров престижа.* Производством товаров престижа занимается достаточно узкая часть населения, состоящая из высококвалифицированных ремесленников. Эта часть получает относительно большой ресурс, однако полностью зависит от спроса на свою продукцию. Ввиду высокой стоимости товаров престижа, а также их относительно малого веса, можно говорить об относительно малых издержках на их перевозку. Это значит, что рынок товаров престижа охватывает большие пространства, и элиты других, даже сильно удаленных государств, участвуют в потреблении товаров, производимых в разных точках географической сети.
9. *Транспортировка товаров.* Транспортировка товаров осуществляется купцами и существенно образом зависит от транспортных условий местности. На условия транспортировки влияет инфраструктура, поддерживаемая местной элитой, а также налагаемые ею налоги.

Далее в первой главе проводится исследование методов формализации описанных связей и процессов на основе имеющихся исторических источников. Проведен детальный разбор литературы, и имеющихся моделей, которые могут быть использованы для описания отдельных элементов общей схемы (**Ошибка! Источник ссылки не найден.**).

Во второй главе изложен предлагаемый подход к моделированию пространственно-исторической динамики аграрных обществ. Вначале рассматриваются вертикальные связи элементов общей схемы, изображенные на рис.2.

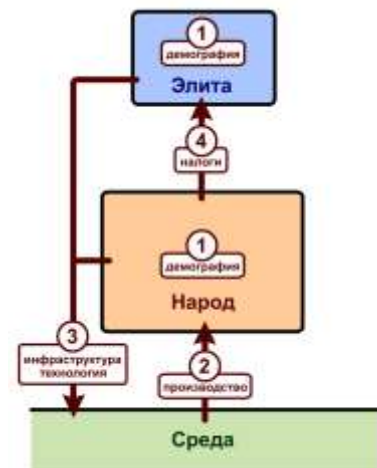


Рис.2. Демография и вертикальные связи

1. Демография.

Демографическая динамика народа и элиты описывается уравнением

$$\frac{\partial N}{\partial t} = B - D - \text{div} \mathbf{J}^M, \quad (1)$$

где N – численность группы населения, B и D – числа рождений и смертей в единицу времени, \mathbf{J}^M – миграционный поток.

В современной демографии используются⁹ модели, опирающиеся на кинетические уравнения, которые описывают динамику численности $N^{M,W}(x,t)$ мужчин (M) и женщин (W), возраста τ во времени t с учетом различий смертности

⁹ Галахов М.А., Орлов Ю.Н., Суслин В.М. Математические модели жизнеустройства. Демография. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 69, 2000.

$d^{M,W}$, рождаемости $b^{M,W}$ по возрастам и полам. Однако в случае исторического моделирования мы не располагаем точными данными по половозрастной структуре обществ. Поэтому неизбежны осреднения

$$b = \frac{\int_0^{\infty} b(\tau)n(\tau)d\tau}{\int_0^{\infty} n(\tau)d\tau} \quad \text{и} \quad d = \frac{\int_0^{\infty} d(\tau)n(\tau)d\tau}{\int_0^{\infty} n(\tau)d\tau},$$

где b и d – общие коэффициенты рождаемости и смертности, а $n(\tau)$ – стационарное (с точностью до постоянного множителя) распределение по возрастам. Осреднения, как показывает анализ, можно считать справедливыми, полагая распределение по возрастам и полу стационарным в рамках выбранных временных масштабов.

В дополнение к данному осреднению для человеческой популяции необходимо учитывать различия в ресурсе, приходящегося на каждого человека. Ввиду значительных различий в доходе населения – народа и элиты (см. рис.3.), целесообразно рассмотреть динамику элиты и народа отдельно, аппроксимируя распределения по доходам $w(r)$ двумя дельта функциями: $w(r) = N\delta(r - r_N) + E\delta(r - r_E)$, где N и E – численность, а r_N и r_E – соответственно, усредненные доходы народа и элиты.

Проведенный в диссертации анализ дает основания принять за базовую следующую зависимость смертности от доходов:

$$d_{N,E} = d_0 + \frac{d_1^{N,E}}{r_{N,E}}, \quad (2)$$

где $d_{N,E}$ – коэффициенты смертности отдельно для народа и элиты, d_0 – базовый уровень смертности, определяемый уровнем медицины, $d_1^{N,E}$ – коэффициенты при члене, отражающем рост смертности с уменьшением дохода на душу населения. Ввиду гораздо больших потребностей элиты по сравнению с простым народом, коэффициент d_1^E заметно больше d_1^N .

Проведенный анализ факторов изменения рождаемости позволяет считать коэффициент рождаемости для аграрных обществ постоянным.

В итоге при соблюдении ряда критериев, выявленных в диссертации, вековую демографическую динамику народа и элиты можно описать уравнениями логистического типа

$$\frac{\partial N_{N,E}}{\partial t} = N_{N,E} \left(b_0 - d_0 - \frac{d_1^{N,E}}{r_{N,E}} \right) - \text{div} \mathbf{J}_{N,E}^M. \quad (3)$$

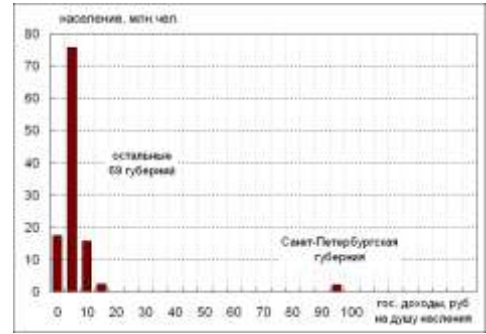


Рис.3. Распределение гос. дохода по губерниям России, 1892-1895

2. Аграрное производство.

Анализ особенностей аграрного производства позволяет применить для его описания производственную функцию вида

$$F(N, x, y) = \frac{\rho(x, y)N}{N + \nu(x, y)}, \quad (4)$$

где $F(N, x, y)$ – количество произведенного зерна с единицы посевной площади в год, N – количество крестьян, обрабатывающих единицу площади, $\rho(x, y)$ – урожайность территории, $\nu(x, y)$ – минимальные трудозатраты, измеряемые в людях на единицу площади. Данная функция обладает характерным для аграрного хозяйства насыщением: при $N \rightarrow \infty$ $F(N, x, y) \rightarrow \rho(x, y)$, что, в частности, резко ограничивает численность населения, способного прожить на данной территории.

Потребление ресурса народом можно описать функцией

$$Q(N, R) = \frac{mNR}{R + mN}, \quad (5)$$

или, в терминах дохода на душу населения: $Q(N, r) = \frac{mr}{r + m} N$, где N – численность населения, m – подушное потребление (излишек свыше которого потребитель считает возможным тратить на ценности, не связанные с питанием), также имеющий естественную оценку: в аграрном обществе рацион питания более чем на половину состоит из злаковых, а более или менее достаточное потребление злаков в год составляет 300-400 кг на человека, R – доступные объемы зерна¹⁰.

3. Инфраструктура и технологии. Создаваемая инфраструктура приводит к повышению урожайности единицы посевной площади

$$\rho(x, y) = \rho_0(x, y)\eta(N^+), \quad (6)$$

где $\rho_0(x, y)$ – исходная урожайность, $\eta(N^+)$ – безразмерный множитель увеличения урожайности за счет инфраструктуры ($\eta(0)=1$), однако это повышение выливается в то, что приходится содержать дополнительную часть населения N^+ , занятую поддержанием инфраструктуры, изымая часть ресурса у производителей. Добавка η не является произвольной, ее максимальное значение η_{max} определяется текущим уровнем технологии, которое также лимитирует необходимую часть населения $N^+_{max}(\eta_{max})$. Существенные изменения технологии более четко проявляются на больших временных масштабах. Поэтому вопросы, связанные с ростом технологии, рас-

¹⁰ Имеются в виду объемы зерна, доступные для потребления. Если в модели полагается, что зерно потребляется или реализуется достаточно быстро, то R соответствует производству зерна, если же имеет место накопление зерна в количествах, сравнимых с производством и оно считается доступным для потребления (составляет резерв на случай неурожая), то в этом случае R следует считать объемами накопленных R^* .

смаатриваются отдельно в третьей главе, посвященной тысячелетней динамике аграрных обществ.

4. **Налоги.** Процесс налогообложения, имеющий достаточно сложную структуру, в конечном счете выражается в функции распределения по доходам $w(r)$. В качестве довольно грубой модели можно записать:

$$R_E(N, E) = \xi N + \zeta E, \quad (7)$$

где R_E – общий ресурс элиты, ξ – подушевой налог с крестьян, ζ – дополнительные изъятия в пользу элиты, в целом пропорциональные ее численности.

Следующая часть главы посвящена, прежде всего, пространственной динамике и формализации горизонтальных связей, выделенных на **Ошибка! Источник ссылки не найден.** Для моделирования чрезвычайно важным является верификация полученных результатов. Поэтому для оценки близости модельных и реальных данных в диссертации вводится следующий критерий.

Ω -критерий близости пространственных данных.

Пусть пространственные данные представлены в виде двух пространственных распределений $q_i(x, y) > 0$; $i = 1, 2$; $(x, y) \in U$, где U – область пространства, тогда Ω -критерием близости этих данных будем называть разность этих функций в норме L^1 после сглаживания и нормировки:

$$\Omega(\sigma) = 1 - \frac{1}{2} \iint_U |g_1(\sigma, x, y) - g_2(\sigma, x, y)| dx dy, \quad (8)$$

$$\text{где } g_i(\sigma, x, y) = \frac{G_i(\sigma, x, y)}{\iint_U G_i(\sigma, \xi, \eta) d\xi d\eta},$$

$$G_i(\sigma, x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \iint_U q_i(\xi, \eta) e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{2\sigma^2}} d\xi d\eta.$$

Параметр σ определяет допустимую неточность при сопоставлении данных, связанную в исторических исследованиях с изначальной грубостью задания пространственных параметров модели, а также частой неполнотой и условностью имеющих пространственных исторических данных. Если значение σ составляет порядка нескольких процентов от характерных размеров области U , то значения $\Omega(\sigma) > 0,6$ можно считать очень хорошим результатом.

Далее продолжается изучение горизонтальных связей аграрных обществ.

5. Этнические, языковые и религиозные процессы. Проведенный анализ позволяет рассматривать эти процессы, связывая их с распространением и конкуренцией различных типов информации. Будем считать, что M этносов занимают земледелием на одной территории. Предположим, что производство соответствует насыщенности $\rho(x,y)$ и результаты труда делятся между этносами пропорционально их численностям. Тогда изменение численности этносов может быть описано уравнением

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = N_i \left(b_0 - d_0 - d_1 \frac{\sum_j^M N_j}{\rho(x,y)} \right) - \sum_{j \neq i}^M d_{ij} N_i N_j + \sum_j^M \theta_{ij}(N_i, N_j) - \mathcal{G}_i(N_i) - \text{div} \mathbf{J}_i^M \quad (9)$$

где первый член соответствует рассмотренной выше демографической динамике, второй – повышенной смертности из-за межэтнических конфликтов, третий – наличию смешанных браков и последующей самоидентификации детей от данных браков, четвертый – прямому влиянию государства на численность и пятый – миграции. Значение $\theta_{ij}(N_i, N_j)$ равно разности количества детей от смешанных браков между этносами i, j , которые самоидентифицируют себя с этносом i и этносом j . В свою очередь, прямое влияние государства \mathcal{G}_i на численность также может иметь разный характер и заключаться в насильственной ассимиляции, дискриминации или даже геноциде.

Отдельного рассмотрения требует возникновение торговой диаспоры. Если в модели (9) фактически имела место конкуренция в нише с ограниченным ресурсом $\rho(x,y)$, то в случае различных социальных функций ниши различны и доход на душу населения определяется по-разному:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial t} &= N_1 \left(b_0 - d_0 - d_1 \frac{N_1}{\rho(x,y)(1-\varphi)} \right) - d_{12} N_1 N_2 + \theta_{12}(N_1, N_2) - \mathcal{G}_1(N_1) - \text{div} \mathbf{J}_1^M \\ \frac{\partial N_2}{\partial t} &= N_2 \left(b_0 - d_0 - d_1 \frac{N_2}{\rho(x,y)\varphi} \right) - d_{21} N_1 N_2 - \theta_{12}(N_1, N_2) - \mathcal{G}_2(N_2) - \text{div} \mathbf{J}_2^M \end{aligned}$$

где φ – доля продукта, производимого крестьянами (этнос 1), которая в результате экономических взаимодействий попадает к торговцам (этнос 2). В данном случае фактически отсутствует ресурсная конкуренция и при отно-



Рис.4. Факторы, которые учитываются при описании пространственной динамики аграрных обществ.

сительно низких d_{21} может существовать стационарное решение с ненулевым N_2 . Для численности носителей языков и религий уравнения фактически аналогичны.

В рамках диссертации с помощью модели (9) рассматривалась этническая динамика в Европе. В качестве начальных условий задавалось точечное распределение пятисот этнических групп со случайными начальными координатами. Коэффициенты модели считались близкими для всех групп с 5%-ным случайным разбросом. Поточковый член, описывающий в данном случае миграционные процессы, был взят диффузионным: $\mathbf{J}_i^M = -k(x, y)\text{grad}N_i$, $k(x, y)$ – коэффициент пространственной проводимости, методика оценки которого описана в четвертой главе диссертации. На рис.5. показана типичная динамика модели.

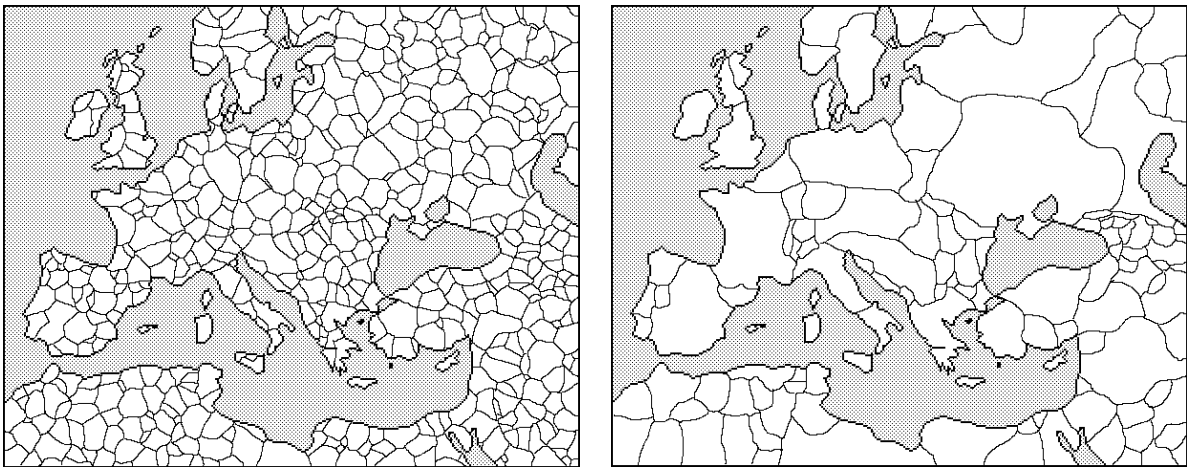


Рис.5. Динамика изменения границ между этносами в разные моменты времени (слева – результат моделирования на 200 шаге, справа – на 3000 шаге расчета)

Сначала формируется мозаика мелких, но однородных, кластеров, которые затем расширяются, поглощают друг друга, пока, наконец, не сформируются крупные кластеры с достаточно медленно движущимися границами. Ввиду стохастичности задания начальных условий при моделировании речь не шла о точном воспроизведении исторического хода этногенеза. Исследовалась другая задача – принципиальная зависимость динамики границ от ландшафта, то есть фактически изучалась степень влияния коэффициента пространственной проводимости на вероятность возникновения границы в различных точках пространства. Полученные результаты имеют сильную значимость. При сравнении с реальной вероятностью расположения границ¹¹: $\Omega(\sigma) = 0,742$ при $\sigma = 3\%$ от линейных размеров карты. Наибольшее расхождение наблюдается в районах Германии и Северной Италии, которые долго были раздробленными. Модель не дает такого результата, и фактически это указывает на то, что данная раздробленность не является следствием влияния коэффициента пространственной

¹¹ Брались реальные данные с X по XX век нашей эры

проводимости и исследование должно учитывать дополнительные факторы, в том числе экономические. Для остальных же областей коэффициент пространственной проводимости фактически является важнейшим фактором формирования границ.

6. Войны. Моделирование взаимодействий между элитами главным образом сводится к моделированию процессов борьбы за власть, взаимного уничтожения и подчинения. Если в рамках модели рассматривать элиту отдельного государства как единый объект и описывать взаимодействие элит, то с этой точки зрения важно описание причин возникновения войн, динамики силы и слабости государств, а также моделирование тактических военных действий.

Согласно исследованиям¹², повышение военной напряженности происходит в случае, когда вследствие роста численности элиты понижается ресурс, приходящийся на одного представителя элиты r_E . Милитаризация происходит также в ответ на рост угрозы со стороны вероятного противника – соседей¹³. С другой стороны, она ограничивается людскими и материальными ресурсами. Данный процесс можно описать уравнением вида:

$$\frac{\partial M_i^j}{\partial t} = M^+(r_E, E_i, M_i^j, M_j^i, T_i^W) - M^-(R_E, E_i, M_i^j, \sum_{k \neq j} M_i^k),$$

где M_i^j – степень мобилизации i -ой элиты против j -ой (под мобилизацией будем понимать объем выделяемых людских и материальных ресурсов, связанных пропорцией, определяемой текущей военной технологией T_i^W), M^+ – факторы увеличения мобилизации, связанные с переизбытком элиты, внешних угроз M_j^i , и текущей военной технологией T_i^W , M^- – факторы понижения мобилизации, связанные с ресурсными ограничениями.

Взаимная мобилизация выливается в военное столкновение, которое ранее моделировалось в ряде работ^{14,15}. С использованием опыта моделирования этого процесса, для описания тактических военных действий была использована модель вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{i \neq j} q^{W+}(x, y, u_i, M_i^j) - \sum_{i \neq j} W(x, y, u_i, u_j, M_i^j, M_j^i) - q^{W-}(x, y, u_i, T_i^W) - \text{div} \mathbf{J}_i^W \quad (10)$$

где u_i – численность войск, q^{W+} – пополнение войск за счет мобилизации, W – боевые потери в ходе военных действий, q^{W-} – небоевые потери (болезни, голод и т.п.), а также демобилизация, \mathbf{J}_i^W – передвижение войск.

Для выяснения области применимости модели (10) проведено описание динамики фронта воюющих группировок в Европе в ходе Второй мировой войны. При этом M_i^j задавались извне. В результате была получена временная динамика расположения линии фронта, имеющая высокую до-

¹² Turchin, P., Korotaev, A. V., Population Dynamics and Internal Warfare: a Consideration. // submitted to *Current Anthropology*

¹³ Richardson L.F., Arms and Insecurity – Pittsburgh, Boxwood Press, 1960

¹⁴ Lanchester, F. W.. Aircraft in Warfare – London: Constable, 1916

¹⁵ Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – 264 с.

стоверность по критерию $\Omega(\sigma) = 0,738$ при $\sigma = 2\%$ от линейных размеров всей карты. А при $\sigma = 5\%$, значение $\Omega(\sigma)$ достигает 0,872.

Третья глава посвящена анализу и моделированию глобальной демографической динамики аграрных обществ на больших временах и анализу технологического роста.

Демографическая динамика сложных аграрных обществ двух последних тысячелетий ярко выделяется на графике роста численности населения Земли (рис.6). После широкого распространения земледелия, возникшего ок. 10000 лет назад, к началу нашей эры подавляющее большинство населения мира уже жило в границах сложных аграрных обществ. Эта ситуация сохранялась вплоть до совсем недавнего времени.

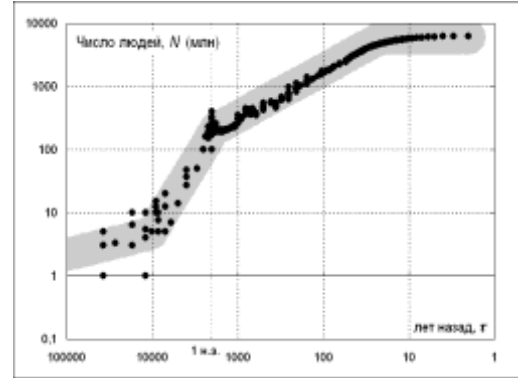


Рис.6. Динамика населения Земли

Для всего периода существования аграрных обществ выполнялся единый закон роста населения, прекрасно описываемый гиперболической кривой (прямая линия в двойном логарифмическом масштабе на рис.6). Некоторые авторы^{16,17}, детально исследовавшие вопросы динамики населения, склонны продлевать данный закон в прошлое также на стадию охотничье-собираТЕЛЬСКИХ обществ, для которых характерны несколько иные качественные зависимости для рождаемости и смертности, однако обсуждение этих вопросов выходит за рамки диссертации. Во всяком случае, бесспорно, что и внутренняя структура, и эмпирический закон развития сложных аграрных обществ были в заметной степени постоянными.

С точки зрения объяснения причин гиперболического роста, общее мнение^{16,17} заключается в том, что рост является причиной информационных и технологических взаимодействий.

На макроуровне целесообразно пренебречь колебаниями и рассматривать динамику стационарного состояния, для которой характерен локальный баланс производства и потребления, рождаемости и смертности. Поддержание хозяйственной инфраструктуры сложного аграрного общества требует устойчивого наличия ресурсного излишка. Сложность инфраструктуры и возможность избыточного производства ресурсов определяется уровнем развития технологий. В работе было принято, что уровень технологий T может быть охарактеризован максимально доступным при нем уровнем инфраструктуры $T = Inf_{\max}$. Тогда производимый продукт R можно считать функцией $R = R(N, Inf_{\max})$. В свою очередь для измерения Inf_{\max} можно использовать среднюю величину ресурсного излишка \bar{S} на душу населения в рассматриваемую эпоху. Реальный излишек $S(t) = r(t) - m$ может колебать-

¹⁶ *Kanuca C. П.* Сколько людей жило, живет и будет жить на Земле. – М.: Наука. 1999.

¹⁷ *Kremer, M.* Population Growth and Technological Change: One Million B.C. to 1990. – The Quarterly Journal of Economics 108: 681–716. 1993.

ся вокруг значения \bar{S} , однако для макромоделли колебаниями можно пренебречь. Тогда уравнения для роста населения и технологии записываются как $\frac{dN}{dt} = F_N(N, S)$ $\frac{dT}{dt} = F_T(N, S, T, Inf)$, где F_N, F_T – некоторые функции.

Переходя к усредненным величинам, имеем

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= aN\bar{S} \\ \frac{d\bar{S}}{dt} &= bN\bar{S} \end{aligned} \quad (11)$$

где a и b – константы. Адекватность данной системы полностью подтверждается эмпирическими данными как по N , так и по \bar{S} . Обе величины растут в режиме с обострением, причем мировой ВВП, определяемый как $R = N(\bar{S} + m)$, в действительности (рис.7) равен $R = N(\gamma N + m)$, где γ и m – константы. В свою очередь подстановка $\bar{S} = \gamma N$ в первое уравнение дает известное уравнение, изученное С.П.Капицей: $\dot{N} = N^2 / C$.

Переход от аграрных обществ к индустриальным сопровождается демографическим переходом. Его причины являются открытой научной проблемой. Проведенное в рамках диссертации исследование выявило переменную, наиболее значительно влияющую на снижение рождаемости во время демографического перехода. Этой переменной оказалась женская грамотность (см. рис.8). Другие факторы такие как, например, урбанизация или уровень медицины, имеют более нелинейную и неоднозначную зависимость, хотя, безусловно, при совместной динамике всех этих переменных более правильным будет говорить об обобщенной переменной человеческого капитала, в которую грамотность входит важной составляющей.

Учет влияния грамотности в модели (11) позволяет ее расширить:

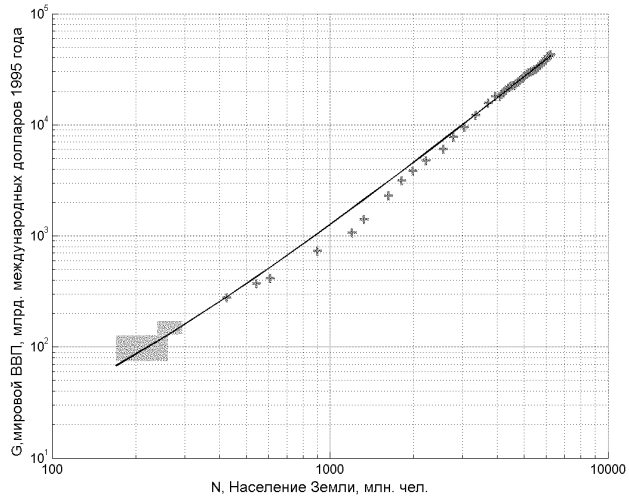


Рис.7. Связь населения мира и мирового ВВП с 1 года н.э. по 2004 год.

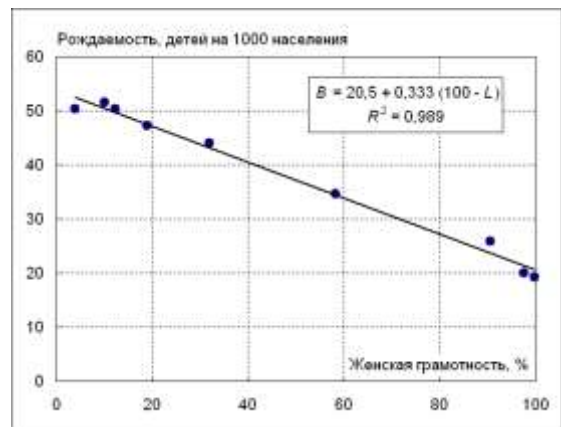


Рис.8. Связь рождаемости и женской грамотности в России (1800-1987)

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= aN\bar{S}(1-L) \\ \frac{d\bar{S}}{dt} &= bN\bar{S} \\ \frac{dL}{dt} &= cL\bar{S}(1-L) \end{aligned} \quad (12)$$

где c – константа. Такая модель дает

прямую связь $L \propto N^{\frac{c}{a}}$, которая также имеет эмпирическое подтверждение (рис.9). Результаты расчета системы (12) показаны на **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, демонстрирующем исключительную близость эмпирических данных и модели, описывающей как гиперболический рост населения, имевший место на протяжении 10000 лет, так и демо-

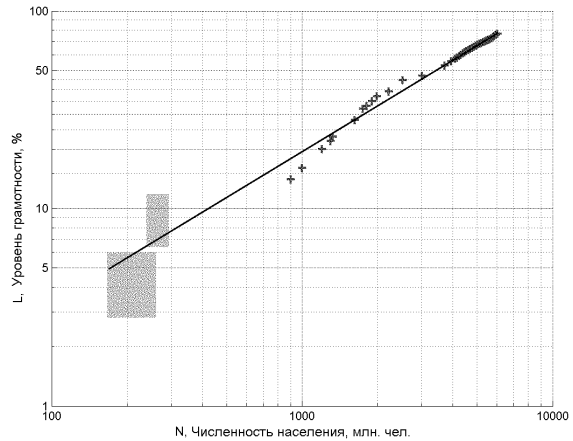


Рис.9. Связь населения и грамотности с 1 года н.э. по 2004 год.

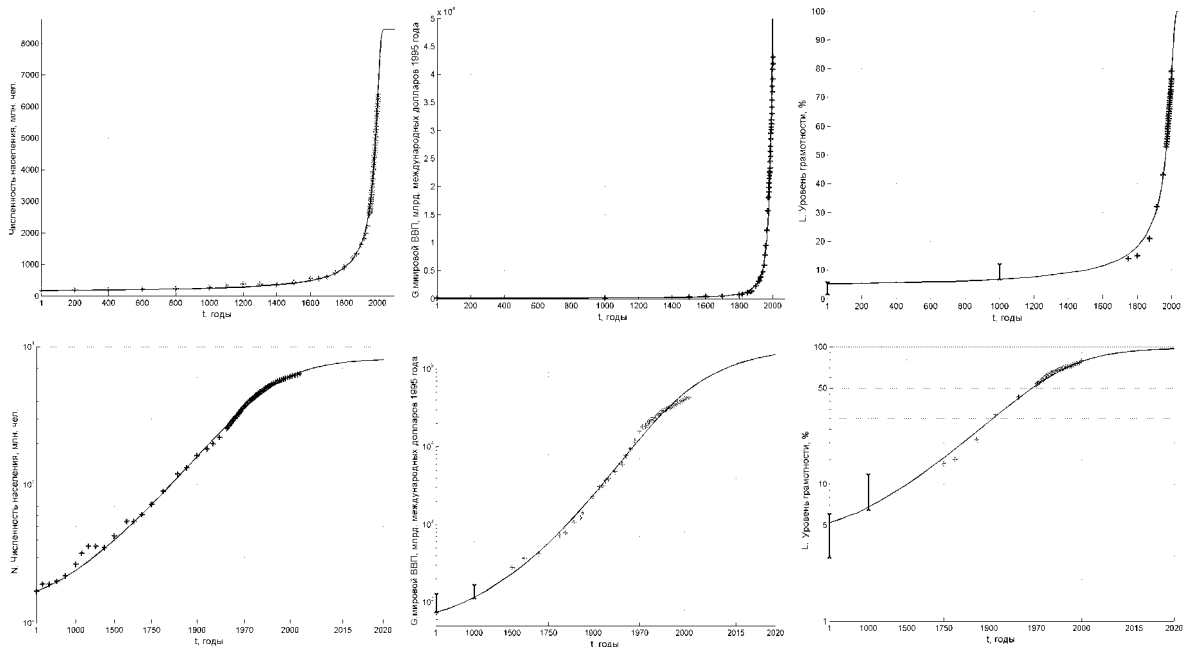


Рис.10. Результаты моделирования: обычный и двойной логарифмический масштаб.

графический переход.

Четвертая глава посвящена вопросам моделирования пространственных экономических процессов. Рассматриваются и формализуются следующие связи:

7. Спрос на товары престижа.

Предметы роскоши служат для элиты, прежде всего, как отличительные признаки. Для элиты помимо цены особую важность играет качество товара, поэтому спрос на товары престижа будет функцией от

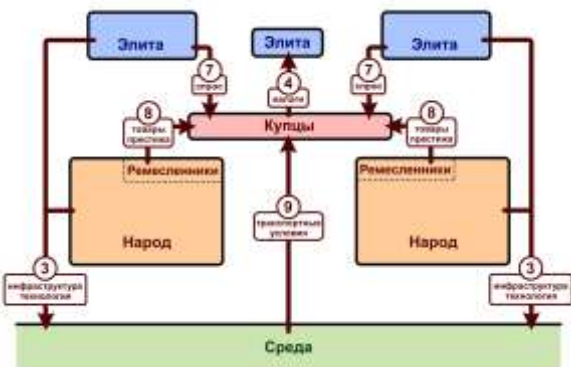


Рис.11. Подсистема схемы рис. 1, соответствующая торговле.

численности элиты E , ее доходов r_E , цены на товар престижа p и его качества q_p : $D_p(E, r_E, p, q_p)$.

8. Производство товаров престижа. Предметы роскоши производятся относительно немногочисленной группой высококвалифицированных ремесленников, предложение товаров на рынке можно описать функцией $S_p(N_c, r_c, p, q_p)$, где N_c – численность ремесленников, r_c – их средний доход.

Спрос на товары престижа нелинейно увеличивается с повышением их качества и сокращается при повышении цены. Напротив, предложение товаров престижа увеличивается с ростом их цены и сокращается при повышении их качества. Такое поведение может быть описано с помощью следующих зависимостей:

$$D_p = \frac{Eq_p^\psi}{\alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{p}{r_E}\right)^\phi}, \quad S_p = N_c \frac{\beta p}{r_c q_p},$$

где $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$, $\beta > 0$, $\psi > 1$, $\phi > 1$ – константы. В этом случае равен-

ство спроса и предложения наблюдается, когда $q_p = \left(p \frac{N_c \beta}{r_c E} \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{r_E^\phi} p^\phi \right) \right)^{\frac{1}{\psi+1}}$.

Объем продаж зависит от цены как

$$D_p^*(p) = S_p^*(p) = \left(p \frac{\beta N_c}{r_c} \right)^{\frac{\psi}{\psi+1}} \left(\frac{\alpha_0}{E} + \frac{\alpha_1}{E r_E^\phi} p^\phi \right)^{-\frac{1}{\psi+1}},$$

отражая тот эффект, что товары престижа не могут быть слишком дешевыми, иначе они теряют престиж и не пользуются спросом.

9. Транспортировка товаров престижа. Ранее М.Бекманном¹⁸ была предложена модель для описания статистической структуры товаропотока внутри географического региона с заданными функциями распределения производителей и потребителей товара, а также распределения стоимостей перевозок. Основная идея модели сводится к тому, что $\zeta(x, y) \frac{\mathbf{J}^T}{|\mathbf{J}^T|} = \text{grad} p$, то

есть поток товара \mathbf{J}^T направлен по градиенту цены p , а модуль градиента цены равен стоимости транспортировки $\zeta(x, y)$ в рассматриваемой точке. В диссертации данная модель была развита и адаптирована к историческим задачам. Во-первых, в отличие от статической задачи Бекманна, учтена динамика:

Было принято, что уравнение непрерывности для товара имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div} \mathbf{J}^T + q(x, y),$$

где T – плотность товара, $q(x, y)$ – разность спроса и предложения в точке. Также было сделано предположение, что поток не

¹⁸ Beckmann M.J. A continuous model of transportation // *Econometrica*, Vol.20 No.4 The University of Chicago, 1952, pp. 643-660

только направлен по градиенту цены, но и пропорционален ему: $\mathbf{J}^T = k \cdot \text{grad} p$. Это предположение базируется на том, что доход отдельного перевозчика пропорционален градиенту цены, а предложение труда перевозчиков (то есть, фактическое число движущихся торговых караванов, из которых складывается поток) в простейшем случае можно считать пропорциональным доходу. Коэффициент k назовем *коэффициентом товаропроводности*, методика оценки которого предлагается ниже.

Динамика цены в каждой точке определяется разностью спроса и предложения, равно как и динамика запасов товара в точке (с точностью до знака), что дает возможность записать: $\zeta \frac{\partial p}{\partial t} = D - S = -\frac{\partial T}{\partial t}$, где ζ – коэффициент, в дальнейшем сводимый к единице нормировкой p . Объединение всех указанных выше уравнений дает общее уравнение для цены:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= \text{div}(k(x, y)\text{grad} p) - q(x, y) \quad t > 0 \quad (x, y) \in U \\ k \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{(x, y) \in \partial U} &= -J_n^T(x, y, t) \\ p(x, y, t) \Big|_{t=0} &= p_0(x, y) \end{aligned} \quad (13)$$

Полученное уравнение описывает пространственную динамику цен и товаропотоков в области U с заданными втекающими товаропотоками J_n^T на кусочно-гладкой границе ∂U . На эту динамику существенно влияет коэффициент товаропроводности k , для которого на основе энергетических соображений выводится следующая оценка:

$$k = \chi S_T v_m^2 = \chi S_T \left(\frac{\gamma}{1 + \gamma} \frac{\sqrt{2}w}{g(\mu\sqrt{1 + \nabla H^2} + |\nabla H|)} \right)^2.$$

Здесь γ и w – грузоподъемность и мощность транспортного средства, H – высота точки над уровнем моря, μ – коэффициент транспортного трения, g – ускорение свободного падения, S_T – коэффициент предложения труда перевозчиков (см. выше), χ – степень безопасности территории, определяемая как наиболее вероятная доля дохода, которая останется у торговца.

Коэффициент транспортного трения μ напрямую связан со свойствами территории и скоростью движения транспорта. Оценка коэффициента μ проводится эмпирически. Можно предположить, что данный коэффициент постоянен внутри природных зон, в этом случае скорость движения транспорта по территории будет выражаться как $v(x, y) = \frac{C}{\mu + |\nabla H|}$, где C – неко-

торая константа. Для оценки μ необходимо решить обратную задачу. Зная реальные времена перемещения из одного пункта в другой, а также решая

задачу поиска кратчайшего пути (рис.12) при разных μ , можно подобрать такое значение μ , при котором будет наблюдаться наибольшая корреляция между реальными и рассчитанными временами.

В диссертации проведена оценка коэффициентов μ на историческом материале путешествия Марко Поло в XIII веке (см. рис.12). При всей относительности и спорности этих данных, тем не менее, удастся выделить зависимости, особенно четкие для некоторых природных зон.

Следует обратить внимание, что при численном моделировании пространственных процессов могут возникать особенности, связанные с шагом сетки. В частности, при использовании $k(x,y)$ и $v(x,y)$, следует обратить внимание на то, что в формулу входит $|\nabla H|$, который, если он рассчитывается через H в узлах сетки, существенно зависит от ее шага в связи с *фрактальностью* поверхности земли. Для того чтобы ввести поправку в выражение для μ , был исследован вопрос о фрактальной размерности величины $|\nabla H|$ и предложена поправка

$$\mu_L(x, y) = \mu_0 + s_0(x, y) \left(1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_L} \right)^{D-1} \right), \quad \text{где}$$

μ_0 и s_0 – соответственно коэффициенты μ и перепад высот на эталонной сетке, D – фрактальная размерность, λ_0 , λ_L – шаг эталонной и используемой сеток.

В завершение исследований с использованием полученных оценок проводилось моделирование динамики товаропотоков Великого Шелкового Пути. Полагалось существование точечного источника товара в Китае и точечного потребления – в Европе. Коэффициенты товаропроводности вычислялись с использованием предложенной методики и полагались одинаковыми для различных эпох за исключением коэффициентов $\chi(x,y)$, которые в данном случае определялись пространственным расположением крупных империй. В модели учитывалось, что империи поддерживают инфраструктуру и обеспечивают защиту торговцев, повышая товаропроводность своей территории. Внутри империй коэффициент $\chi(x,y)$ умножался



Рис.12. Поиск кратчайших путей путешествия Марко Поло на физической карте при заданных коэффициентах μ .

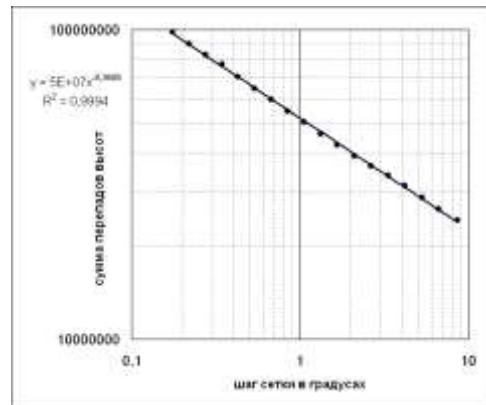


Рис.13. Оценка фрактальной размерности суммы перепадов высот по меридианам.

на постоянный множитель $\chi_E > 1$. Таким образом, для разных эпох с точки зрения модели отличия состояли только в различных пространственных конфигурациях империй, внутри которых товаропроводимость повышает-

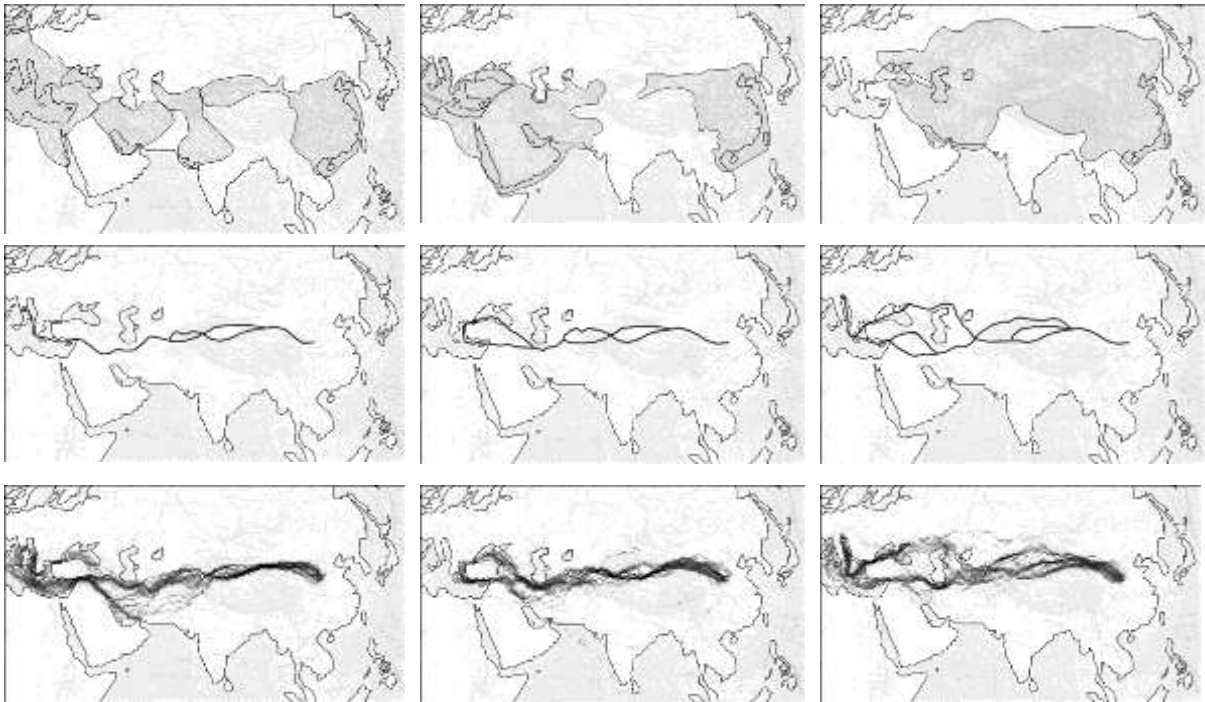


Рис.14. Крупные империи, реальные пути и результаты моделирования для трех эпох: II в д.н.э. – III в н.э., VII – IX вв. и XII – XIV вв.

ся. Результаты приведены на рис.14. Анализ результатов расчета показал их хорошее соответствие с известными историческими сведениями о путях транспортирования товаров в эпохи расцвета Великого Шелкового Пути.

Значения Ω -критерия для результатов при $\sigma = 3\%$ размеров карты для трех эпох составляют 0,696, 0,804 и 0,773 соответственно.

В заключении подводятся итог формализации общей схемы (рис. 1), излагаются основные результаты, полученные в ходе исследования.

III. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Разработана схема построения пространственно-временных моделей динамики аграрных обществ на характерных временных масштабах в сотни и тысячи лет. Исследована и обоснована адекватность применения развитого подхода для описания ряда исторических процессов.
2. На основе динамической теории информации построены математические модели, позволяющие описывать взаимодействие аграрных обществ и ряд других исторических процессов, развивающихся в пространстве и во времени.
3. Предложена новая модель описания глобальных демографических процессов, обобщающая модель С.П.Капицы и учитывающая технологические и культурные факторы. Построенная модель позволяет

объяснить глобальный демографический переход и дать прогноз этого процесса.

4. Предложено обобщение модели транспортных потоков Бекманна, позволяющее эффективно учитывать ряд географических, технологических и социальных факторов. На этой основе построена модель динамики Великого Шелкового пути.

ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ СЛЕДУЮЩИЕ РАБОТЫ:

1. *Малков С.Ю., Ковалев В.И., Коссе Ю.В., Малков А.С.* Математическое моделирование социально-экономических процессов. Применение моделей к анализу перспектив российских реформ // *Стратегическая стабильность*, 1999, №1. С. 34-46.
2. *Малков С.Ю., Ковалев В.И., Малков А.С.* История человечества и стабильность (опыт математического моделирования) // *Стратегическая стабильность*, 2000, №3. С. 52-66.
3. *Малков С.Ю., Малков А.С.* Математические методы в исследовании закономерностей развития общества: моделирование эволюции этнических систем // *Стратегическая стабильность*, 2000, №4. С.31-36.
4. *Малков С.Ю., Коссе Ю.В., Малков А.С.* Изучение экономической структуры общества с помощью методов синергетики // В сб. материалов конференции "От истории природы к истории общества: прошлое в настоящем и будущем", часть I, М., 2000. С.77-84.
5. *Малков С. Ю., Малков А.С.* История в свете математического моделирования // *История за и против истории*, книга 2.- М.: Центр общественных наук, 2000. С. 54-76.
6. *Малков А.С.* ФАБР-метод и моделирование социальных систем. // Труды конгресса ICAI'2001, Физматлит. М. 2001, Том 1. С. 440-453
7. *Чернавский Д.С., Чернавская Н.М., Малков С.Ю., Малков А.С.* Математическое моделирование геополитических процессов. // *Стратегическая стабильность*, 2002, №1.С. 60-66
8. *Чернавский Д.С., Чернавская Н.М., Малков С.Ю., Малков А.С.* Математическое моделирование геополитических процессов // Системные проблемы качества, математического моделирования, информационных и электронных технологий. Часть 7. Имитационное моделирование и конфликтология / Материалы Международной конференции и Российской научной школы. – М.: Радио и связь, 2003, с.141-170.
9. *Малков А.С.* Базовая пространственная динамическая модель торговли.// Сборник трудов всероссийской научно-практической конференции «Информационные модели экономики», М.2003, с.78-83
10. *Malkov A.S.* Spatial Modeling of Historical Dynamics// Труды международной конференции «Математическое моделирование социальной и экономической динамики» MMSSED-2004, М.2004, с.201-204

11. *Малков А.С.* Пространственные модели исторической динамики // Стратегии динамического развития России: единство самоорганизации и управления. Материалы первой международной научно-практической конференции. Том III. Часть 2: Международный симпозиум "Синергетика в решении проблем человечества XXI века: диалог школ". – М.: Изд-во "Проспект", 2004. – С.128-132.
12. *Малков А.С.* Математический анализ устойчивости социальных структур // Системы управления и информационные технологии, 2004, №4(16), с.62-66.
13. *Малков А.С.* Математический анализ устойчивости социальных структур // Системные проблемы надежности, качества, информационных и электронных технологий: Материалы Международной конференции и Российской научной школы. Часть 4: Социальные и экономические системы. – М.: Радио и связь, 2004. – С.33-42.
14. *Малков А.С.* Моделирование формирования социальных структур в условиях различной ресурсной обеспеченности // Стратегическая стабильность, 2004, №3, с.60-65.
15. *Малков А.С.* О математическом моделировании товаропотоков. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН № 11, Москва, 2005
16. *Малков А.С., Кортаев А.В., Халтурина Д.А.* Математическая модель роста населения Земли, экономики, технологии и образования. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН № 13, Москва, 2005
17. *Малков А.С., Малинецкий Г.Г., Чернавский Д.С.* О математическом моделировании исторических процессов: аграрные общества. // Информационные технологии и вычислительные системы (статья принята к печати)
18. *Малков А.С.* О математическом моделировании товаропотоков. // **Математическое моделирование (статья принята к печати)**
19. *Малков А.С., Малинецкий Г.Г., Чернавский Д.С.* Математика и геоэкономика. Моделирование пространственной динамики аграрных обществ. // Безопасность Евразии (статья принята к печати)
20. *Кортаев А.В., Малков А.С., Халтурина Д.А.* Математическое моделирование исторических макропроцессов: демография, экономика и войны. – М.: Едиториал-УРСС, 2005 (монография в печати)