

Теория самоорганизованной критичности – наука о сложности

А.В. Подлазов

ФИЛОСОФСКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Получение значительных научных результатов стимулирует возникновение обобщений, выходящих далеко за рамки той области, где эти результаты были получены. Поэтому успехи фундаментальных наук всегда сопровождалась разработкой содержательных философских концепций. Причем философия – в своих наиболее удачных проявлениях – отражала не только увеличение объема объективных знаний о мире, но и совершенствование методов обращения с этими знаниями.

Прогресс естествознания уместно измерять становлением областей, которые вносили существенный вклад в философию науки, обусловленный открытием новых законов природы. И здесь принципиальна именно новизна, т.к. уточнение уже известного не создает предпосылок для выхода из плоскости сложившихся представлений. Роль "генератора философии" в разное время играли геометрия, небесная механика, математический анализ, термодинамика, электродинамика, теория относительности, квантовая механика, математическая логика и другие разделы математики и физики.

Однако эра экстенсивного развития науки, видимо, близится к концу. На первые, как с онтологической, так и с гносеологической точки зрения, роли выходят междисциплинарные исследования. Они ориентированы на синтез знаний из различных областей и распространение естественнонаучных подходов на науки о человеке и обществе и иные предметы, не имеющие собственного теоретического аппарата. Поэтому не удивительно, что на протяжении нескольких последних десятилетий одним из основных источников новых взглядов на устройство мира стала *синергетика*, усилия которой изначально направлены на выявление универсальных механизмов устройства и функционирования систем различной природы [1,2]. Синергетику называют также *наукой о сложности*, поскольку существование таких универсальных механизмов служит залогом познаваемости сложных систем. Чтобы быть реализуемым, сложное должно быть устроено просто, а простые схемы немногочисленны и потому универсальны.

Под *сложностью* системы обычно понимают ее принципиальную несводимость к простой сумме своих частей. Как следует из этого определения, сложность неразрывно связана с нелинейностью. В самом деле, к линейной системе применим принцип суперпозиции и ее можно разложить на независимые составляющие, из описания которых легко собирается исходная система. Этим обстоятельством обусловлено еще одно имя синергетики – *нелинейная динамика*, или – шире – *нелинейная наука*.

Вехами развития любой научной дисциплины являются ее *парадигмы* – исходные концептуальные схемы, модели постановки проблем и их решения. К настоящему моменту в синергетике сформировалось три парадигмы¹ [3].

Первая из них – *парадигма самоорганизации*. В системах, находящихся вдали от положения равновесия, происходят процессы самоорганизации, приводящие к выделению из множества описывающих систему величин небольшого числа *параметров порядка* – ведущих переменных, к которым подстраиваются все прочие [1,4]. Наибольшее внимание при построении этой парадигмы было уделено *структурам* – состояниям, возникающим в результате согласованного поведения большого числа частиц. В пространственно распределенных системах при наличии диссипации самоорганизация может приводить к потере устойчивости однородного равновесного состояния. В результате образуются

¹ Вопреки бытующему среди философов науки мнению, возникновение новой парадигмы, как правило, не перечеркивает старые парадигмы, а дополняет и развивает их, позволяя расширить пределы их применимости или взглянуть на соответствующую область знания под иным углом зрения.

стационарные структуры, которые И.Р. Пригожин предложил именовать *диссипативными* [4], либо развиваются периодические или непериодические колебания, которые, следуя Р.В. Хохлову, называют *автоволновыми процессами* [5]. Отдельный класс структур, возникающих в системах с сильными положительными обратными связями, составляют процессы, развивающиеся *в режиме с обострением*, активно изучаемые в научной школе С.П. Курдюмова [6].

Вторая парадигма синергетики – *парадигма динамического хаоса*. Это явление представляет собой сложное непериодическое поведение, наблюдаемое в детерминированных системах (т.е. в таких, где будущее однозначно определяется прошлым и настоящим и нет случайных факторов). Основным результатом на этом этапе стало установление факта существования пределов предсказуемости, связанных с наличием *горизонта прогноза* – конечного времени, через которое динамический прогноз поведения системы становится невозможен. Были также введены такие фундаментальные понятия как *странный аттрактор* и *разбегание траекторий*, описаны универсальные сценарии перехода от регулярного движения к хаотическому при изменении внешнего параметра. Хотя основы этой парадигмы были заложены Э. Лоренцем, Д. Рюэлем и Ф. Такенсом более 30 лет назад [7], работы в этом направлении активно продолжаются и по сей день [3].

Третья парадигма синергетики – *парадигма сложности*, – лежит на стыке двух предыдущих – в каком-то смысле они взяли представление о сложности "в вилку". Если первая и вторая парадигмы связаны, соответственно, с порядком и хаосом, то третью обычно обозначают словосочетанием «жизнь на кромке хаоса» [8] (хотя, возможно, более точной является высказанная С.П. Обуховым мысль о скольжении вдоль этой кромки [9]).

ЖИЗНЬ НА КРОМКЕ ХАОСА

Знакомство с парадигмой сложности мы начнем с ключевых свойств систем, находящихся на кромке хаоса, с круга базовых понятий и математических образов, которыми оперирует данная парадигма.

Первое из таких понятий – *масштабная инвариантность*, означающая отсутствие у событий или объектов собственных характерных размеров, длительностей, энергий и т.п.

Масштабно инвариантные системы устроены одинаково на всех уровнях организации, т.е. в них нет масштаба, который отвечал бы за "самые важные процессы". Наличие таких масштабов, будучи признаком простоты системы, служит обычным условием для применения традиционных методов математического моделирования. Отметим, что характерные масштабы отчасти присущи и процессам, отвечающим парадигмам самоорганизации и хаоса².

Наиболее известным примером масштабно инвариантных свойств является *фликкер-шум*, выражающийся в степенном виде спектра мощности на низких частотах

$$S(f) \sim f^{-\beta},$$

где $\beta \sim 1$. Такая форма распределения энергии по частоте, свойственная практически всем сложным системам как естественного, так и искусственного происхождения, говорит о возможности в них гигантских флуктуаций, поскольку значительная часть энергии системы связана с очень медленными процессами³.

² Хаотические системы имеют странные аттракторы, геометрия которых фрактальна, т.е. масштабно инвариантна. Вместе с тем, динамика таких систем описывается вполне определенными характерными временами, которые определяют скорость разбегания близких траекторий. Обратная картина наблюдается для систем, развивающихся в режиме с обострением: масштабно инвариантная динамика сочетается с наличием т.н. фундаментальной длины, определяющей пространственную локализацию процесса.

³ Пользуясь метеорологической аналогией, можно сказать, что системах с фликкер-шумом нельзя предсказывать погоду, отвлекаясь от изменения климата. А долговременный прогноз невозможен в принципе,

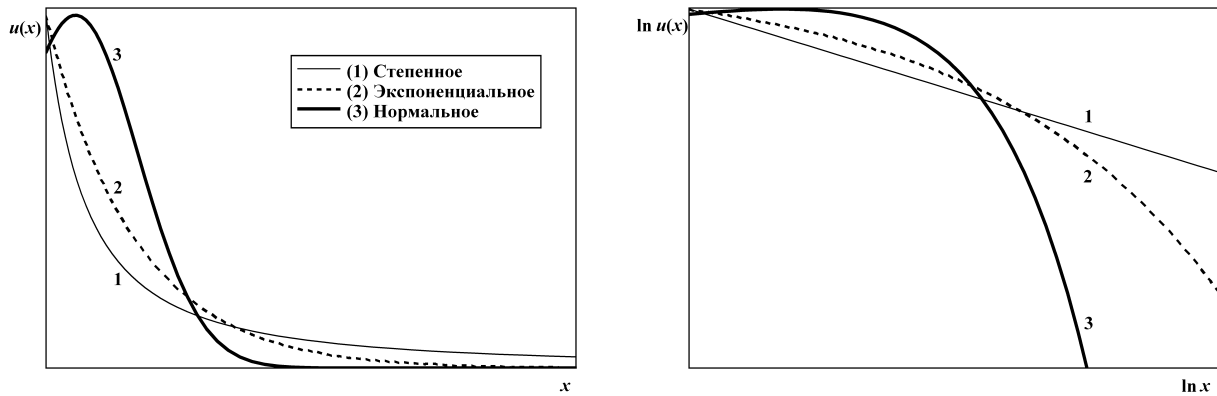


Рис. 1. Типичный вид плотностей вероятности различных распределений

Графики позволяют сравнить скорость спада плотности на хвостах степенного, экспоненциального и нормального распределений.

В двойном логарифмическом масштабе (справа) график плотности степенного распределения имеет линейный вид, что свидетельствует об отсутствии характерных размеров для описываемой им величины.

Спектральное представление обычно применяется при анализе линейных систем, где компоненты спектра взаимно независимы, благодаря чему им легко удастся придать простой физической смысл. При этом описание системы сводится к рассмотрению элементов ее динамики, которые трактуются как самостоятельные объекты – гармоники, фононы, волны, ноты и т.п. Схожая ситуация имеет место и при наличии слабых нелинейностей, которые, обеспечивая перетекание энергии между различными частями спектра, привносят в систему механизмы взаимодействия его компонент. Однако масштабно инвариантный вид спектра мощности демонстрирует уже сильную нелинейность системы, когда невозможно выделить в спектре отдельные компоненты и предложить для них какую-то физическую интерпретацию. Таким образом, динамика систем, где наблюдается фликкер-шум, не может быть разложена на отдельные составляющие, что и означает сложность системы.

В общем случае статистическим выражением масштабной инвариантности служат *степенные распределения вероятностей*. Для величин, описывающих поведение масштабно инвариантных систем, плотности вероятности в *промежуточной асимптотике* даются степенными зависимостями

$$u(x) \sim x^{-(1+\alpha)} \tag{1}$$

с $\alpha \sim 1$. Для реальных систем область промежуточной асимптотики, простирающаяся на несколько или даже на много порядков изменения аргумента, всегда ограничена с обеих сторон по причине конечности размеров как самих систем, так и образующих их элементов. Однако, если отвлечься от конечности размеров рассматриваемой системы, то можно считать, что формула (1) выполнена просто для достаточно больших x .

Главным – и очевидным – отличием степенных распределений от нестепенных (экспоненциального, нормального и т.п.) является скорость убывания функции $u(x)$ с ростом аргумента (см. рис. 1). Основные свойства случайной величины определяются моментами распределения

$$\mu_k = \int x^k \cdot u(x) dx, \tag{2}$$

на которые кардинальным образом влияет асимптотическое поведение плотности вероятности при $x \rightarrow \infty$. Если $u(x)$ спадает быстрее любой степени x , то все моменты

т.к. сколько бы ни накапливалась информация о поведении системы, всегда найдутся важные процессы, которые начинают сказываться на временах, соизмеримых со временем наблюдения.

распределения конечны, в то время как для распределений вида (1) интеграл (2) расходится при $k \geq \alpha$. По этой причине степенные распределения называют распределениями с *тяжелыми хвостами*.

В случае нестепенной статистики крупные события, приходящиеся на *хвост распределения* (область больших x), можно считать практически невероятными, коль скоро они все равно слишком редки, чтобы ощутимо сказываться на моментах. А значит, хвост распределения можно "отрезать", не принимая такие события в расчет. В случае же степенных распределений редкие крупные события происходят недостаточно редко, чтобы их вероятностью можно было пренебречь.

Возможность в системе гигантских, из ряда вон выходящих, событий указывает на ее *склонность к катастрофам*, что есть вторая отличительная черта систем, находящихся на кромке хаоса. Со статистической точки зрения, катастрофичность суть следствие масштабной инвариантности. Поэтому она свойственна явлениям, относящимся к ведению двух первых парадигм синергетики, ровно в той степени, в какой эти явления обладают масштабно инвариантными свойствами⁴. И хотя отдельные катастрофические события и ситуации могут быть успешно описаны в рамках парадигм самоорганизации и хаоса, эти парадигмы не дают инструментов для анализа катастрофичности как явления⁵.

Как и фликкер-шум, катастрофичность служит наглядным свидетельством сложности, поскольку возможность любого рода редукции системы всегда так или иначе связана с характерными масштабами и нестепенными распределениями.

Рассмотрим многокомпонентную систему, которая представима в виде набора независимых подсистем. Каждая из них вносит самостоятельный вклад в происходящие в системе события. Их величина есть сумма большого числа независимых слагаемых и, в соответствии с центральной предельной теоремой, нормально распределена. Статистика элементарных объектов также нестепенная. Скажем, распределение Больцмана, описывающее энергию независимых подсистем, имеет экспоненциальный вид. Таково же и распределение интервалов между последовательными событиями пуассоновского потока, который соответствует случаю, когда разложение системы на независимые составляющие осуществляется во времени.

Приведенные примеры показывают, как возможность сведения системы к сумме ее частей исключает масштабную инвариантность, а вместе с ней – и катастрофическую статистику. Однако важно отметить, что катастрофическое поведение – это не только статистика, но и динамика. В системе, склонной к катастрофам, малые причины могут приводить к большим следствиям, что предполагает ее существенную неравновесность. Ведь для систем, находящихся вблизи положения равновесия, реакция на возмущение линейно зависит от его величины и, чтобы получить гигантский отклик, необходим такой же стимул.

Развитие катастрофических событий возможно лишь при согласованном поведении различных частей системы, т.е. при наличии у нее *целостных свойств*. Целостность суть третий отличительный признак явлений и процессов, лежащих в русле парадигмы сложности, который в значительной мере и определяет это русло.

Если понимать под целостным поведением способность системы долго "помнить" свое прошлое, а ее частей – "чувствовать" друг друга на большом расстоянии, то можно

⁴ При развитии в режиме с обострением характеристики системы достигают бесконечности за конечное время в результате неограниченного увеличения темпов роста, возможность чего обусловлена отсутствием выделенных временных масштабов. Такой взрывной рост можно рассматривать как единичное катастрофическое событие. Точки странных аттракторов, относящиеся к различным участкам траектории, могут располагаться сколь угодно близко в пространстве. Тем самым пространственная масштабная инвариантность хаотических систем выливается в катастрофическую неустойчивость траектории по отношению к возмущениям.

⁵ Катастрофа является таковой лишь в сравнении с массой заурядных событий. Поэтому для успешного рассмотрения катастрофичности необходимо иметь возможность с единых позиций описывать события, величина которых лежит в диапазоне многих порядков. Однако развитие в режиме с обострением или образование структур – слишком регулярные процессы, чтобы допускать неожиданные события, а хаотические системы, напротив, слишком богаты событиями, чтобы на этом фоне могло случаться что-то экстраординарное.

утверждать, что ни одна из сложных систем, описываемых парадигмами самоорганизации и хаоса, не является целостной⁶. В статистическом смысле целостные свойства обычно связаны со степенными временными и пространственными корреляциями. Их называют *дальними* в противовес быстро убывающим корреляционным зависимостям, подразумевающим наличие характерных времен и длин, на которых утрачивается информация о предшествующих событиях и о происходящем рядом.

Таким образом, сложность не влечет целостности. Верно и обратное. Известен целый ряд примеров возникновения масштабной инвариантности и катастрофического поведения в простых системах, которые изначально являются целостными⁷. При этом собственно целостность, будучи введенной в правила моделей искусственно, оказывается вынесенной за скобки. Но если она каким-то образом уже есть, то получить все остальные признаки систем, находящихся на кромке хаоса, не составляет труда. Поэтому интерес представляет природа целостности, возможные пути ее возникновения, которое мыслимо лишь за счет процессов самоорганизации в сложных системах.

Иными словами, внимание третьей парадигмы синергетики сосредоточено на сочетании сложности и целостности. Сложные целостные системы не просто несводимы к сумме своих частей, но и обладают, как мы увидим далее, нетривиальными свойствами, которых части просто не имели.

В завершение темы необходимо отметить следующий важный момент. Понятие целостности, вообще говоря, не представляет собой предмета синергетического рассмотрения в отсутствие еще одного важного качества сложных систем. Речь идет о *грубости свойств*, которая заключается в устойчивости качественных особенностей системы по отношению к мелким модификациям ее устройства. Если незначительным изменением параметров целостность удастся разрушить, это означает, что она есть результат не самоорганизации, а организации, т.е. не проявление сложности системы, а следствие искусных манипуляций с ней⁸.

ПРИРОДА ЦЕЛОСТНОСТИ

Все признаки пребывания на кромке хаоса наблюдаются в *критической точке* (*точке бифуркации*), где происходит изменение числа или типа состояний равновесия системы [16]. По этой причине находящиеся в критической точке системы масштабно инвариантны, чувствительны к слабым воздействиям, обладают целостными свойствами.

Однако обычные критические феномены, примером которых могут служить *непрерывные фазовые переходы* [17], не являются грубыми. Они имеют место только при специальном значении управляющего параметра и поэтому не могут претендовать на роль универсальных механизмов сложного поведения.

Ситуация изменилась в конце 1980-х годов, когда П. Баком, Ч. Тангом и К. Вайзенфельдом было введено представление о *самоорганизованной критичности* [18,19,20,21]. Выяснилось, что критическое состояние может не только создаваться

⁶ Любые возмущения диссипативных структур или профиля, растущего в режиме с обострением, быстро исчезают под воздействием диффузии. А в хаотических системах происходит быстрое забывание начальных данных благодаря разбеганию траекторий.

⁷ Линейный мультипликативный процесс [10,11] и шоковые модели с когерентным шумом [12,13] построены на возможности воздействия на систему в целом. А линейные модели конкурентного роста [14] и ветвящийся процесс с зависимыми частицами [15] используют информацию об интегральных характеристиках системы. Все указанные системы просты – состояние первой из них характеризуется всего одним числом, а элементы трех остальных непосредственно друг с другом не взаимодействуют.

⁸ Стакан как целостная система обладает способностью удерживать в себе много больше воды, чем пристанет к поверхности осколков, на которые его можно разбить, или песчинок, из которых было сварено пошедшее на его изготовление стекло. В этом смысле он несводим к сумме своих частей. Однако, что случится с означенным нетривиальным свойством стакана, если просто перевернуть его или проделать в дне дырочку?

искусственно, но и возникать самопроизвольно в результате действия механизма, который, как и следует ожидать при изучении сложности, оказался прост и универсален.

"Песочная" парадигма

Базовой моделью теории самоорганизованной критичности является *куча песка*.

Рассмотрим уголок с песком, изображенный на рис. 2. Будем предполагать сцепление между песчинками достаточно большим. При этом возможно лишь поверхностное перемещение песка, причем инерцией его движения можно пренебречь. Тогда состояние системы вполне определяется наклоном поверхности⁹. В тех местах, где *локальный наклон* оказывается больше порога устойчивости, происходит осыпание, приводящее к соскальзыванию песчинок вниз по склону на соседние участки поверхности.

Если средний наклон поверхности z невелик, то песок неподвижен. Если же наклон превышает некоторое значение z_c , возникает спонтанный ток песка J по поверхности, который непрерывно возрастает при увеличении z (см. врезку на рис. 2). То есть, налицо непрерывный фазовый переход, в котором *управляющим параметром* является наклон z , а *параметром порядка* – ток песка J .

Критическое значение наклона z_c разделяет *хаотическую* ($z < z_c$) и *упорядоченную* ($z > z_c$) фазы¹⁰. Обе эти фазы соответствуют некатастрофическому поведению, поскольку в них система устойчива к малым возмущениям. В хаотической фазе они еще быстро затухают во времени и пространстве, а в упорядоченной – уже не могут ощутимо повлиять на величину тока. И лишь в критической точке, где одна добавленная песчинка может вызывать лавину любого размера, возможны катастрофы.

Критическое состояние возникает, когда параметр порядка *едва* становится ненулевым, т.е. соответствуют моменту его отрыва от нуля. В случае обычных критических явлений такое состояние достигается путем тонкой подстройки. Однако, вместо того чтобы подбирать для управляющего параметра *a priori* неизвестное критическое значение, можно установить параметр порядка в $+0$, что заставит управляющий параметр *самостоятельно* отыскать критическую точку.

Иначе говоря, вместо того, чтобы крутить ручку прибора, можно начать сдвигать с нулевой отметки стрелку на его шкале, вынуждая ручку повернуться до нужного положения [22]. Такое управление параметром порядка обыкновенно достигается при помощи *разделения временных масштабов* [23], при котором время релаксации системы много меньше времени между последовательными возмущениями, т.е. когда события *едва* происходят.

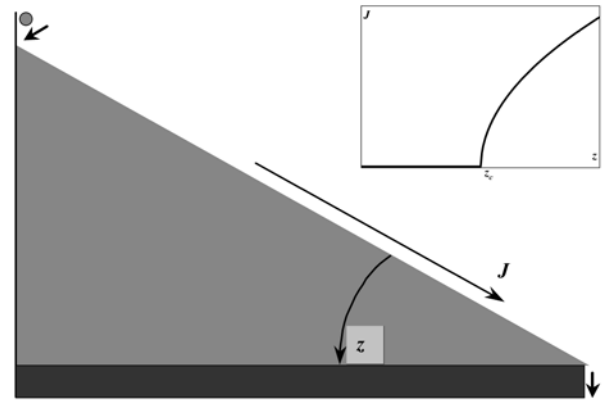


Рис. 2. Уголок с песком

Состояние песка определяется углом наклона поверхности z . При его изменении происходит непрерывный фазовый переход (зависимость параметра порядка от управляющего параметра приведена на врезке) от неподвижного состояния ($J = 0$) к состоянию непрерывного тока песка ($J > 0$).

При токе $J = +0$, соответствующем добавлению одной песчинки за один шаг, система самоорганизуется в состояние с критическим наклоном $z = z_c$.

⁹ Справедливости ради надо отметить, что такие свойства присущи, скорее, не песку, а снегу или рису, для которых невозможны оползни, когда съезжает поверхностный слой как целое. Однако, следуя традиции, мы закроем глаза на это непринципиальное несоответствие.

¹⁰ Нулевой ток песка, имеющий место при наклоне, меньшем критического, можно рассматривать как результат множества хаотически направленных микротоков, которые взаимно уравниваются. При переходе управляющего параметра через критическое значение хаос сменяется порядком, что выражается в появлении выделенного направления тока, в результате чего он становится значим на макроуровне.

Самоорганизации кучи песка в критическое состояние происходит при токе $J = +0$. Чтобы обеспечить такую величину параметра порядка, будем рассматривать динамику по шагам, добавляя песчинки по одной на вершину кучи (см. рис. 2) и дожидаясь завершения процесса релаксации. При этом ток песка через систему, очевидно, имеет минимально возможное значение – в среднем одна песчинка за один шаг рассмотрения.

Если наклон поверхности мал, то лавина, вызванная добавленной песчинкой, скорее всего, не достигнет края кучи и наклон увеличится. При очень большом наклоне состояние кучи является метастабильным, т.е. на любое возмущение она ответит глобальным событием, в результате которого большого количества песка покинет систему и наклон уменьшится. Равновесие между количеством песка, добавляемого в систему, и количеством песка, покидающего ее, достигается при критическом наклоне поверхности, когда возмущение может распространяться по куче сколь угодно далеко, не затухая и не разрастаясь.

Таким образом, имеет место *отрицательная обратная связь*, вынуждающая наклон принять со временем значение $z = z_c$ вне зависимости от начального профиля поверхности. При этом куча песка, состоящая из локально взаимодействующих песчинок, начинает вести себя как единое целое. То есть, в результате самоорганизации в критическое состояние система приобретает свойства, которых не было у ее элементов, демонстрируя сложное целостное поведение. При этом немаловажно, что самоорганизационная природа целостных свойств обеспечивает их грубость.

Модель кучи песка

Поведение рассмотренной системы может быть описано на языке клеточных автоматов. Простейшей моделью кучи песка служит автомат, предложенный Д. Дхаром и Р. Рамасвами [24].

Сопоставим куче двумерную гексагональную решетку размером $L \times L$, горизонтальные слои которой условно соответствуют линиям уровня поверхности. В ячейках решетки расположены целые числа, характеризующие *локальный наклон* поверхности кучи

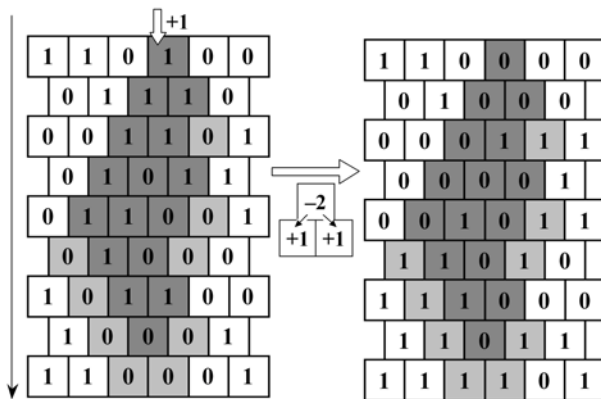


Рис. 3. Простейший клеточный автомат для кучи песка

Устойчивыми считаются ячейки с нулевым или единичным наклоном. При потере ячейкой устойчивости из нее изымаются две песчинки и передаются в пару нижележащих ячеек. Лавина инициируется добавлением одной песчинки в случайно выбранную ячейку верхнего слоя.

Слева приведено состояние системы до лавины осыпаний, справа – после. Заливкой показаны область лавины и ячейки на ее границе, которые, получив песчинку, сохранили устойчивость.

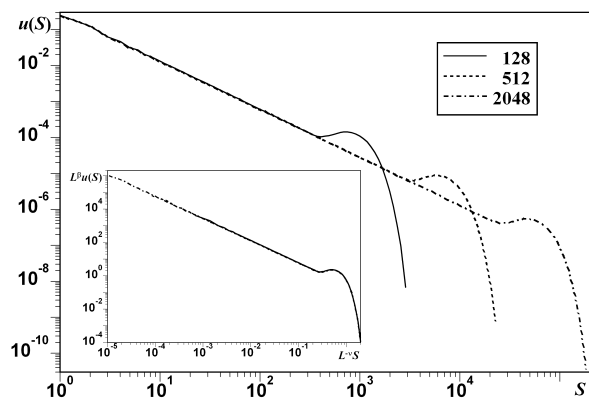


Рис. 4. Распределение лавин по площади при различных размерах решетки

Линейная часть графика, представляющая в двойных логарифмических координатах степенную зависимость, имеет угол наклона приблизительно $-1,33$.

Горб в правой части графиков соответствует тем лавинам, которые оборвались из-за достижения нижнего края решетки.

На врезке приведен конечно-размерный скейлинг распределений. Графики, полученные при различных L , совпадают при $\nu = 1,50$ и $\beta = 2,00$.

(см. рис. 3). Если число превышает единицу, ячейка объявляется неустойчивой и *осыпается*, что выражается в уменьшении на 2 стоящего в ней числа с одновременным увеличением на 1 значений в двух ячейках, примыкающих к данной снизу (рис. 3).

Шаг моделирования состоит из *возмущения* и *релаксации*. Возмущение устойчивого состояния производится путем увеличения на единицу значения в случайно выбранной ячейке верхнего слоя, что соответствует добавлению одной песчинки на вершину кучи. Если в результате возмущения ячейка теряет устойчивость, то она осыпается и начинается процесс релаксации. Осыпание ячейки приводит к увеличению наклона в нижележащих ячейках, что, в свою очередь, способно нарушить их устойчивость и т.д. по принципу цепной реакции. Таким образом, потеря устойчивости одной ячейкой может вызвать *лавину осыпаний* (рис. 3), продолжающуюся до тех пор, пока все ячейки вновь не обретут устойчивость.

После этого релаксационный процесс считается завершенным и начинается следующий шаг моделирования.

Нижний край решетки является открытым, так что при осыпании ячейки из нижнего слоя две песчинки покидают систему. Это обеспечивает существование стационарного состояния и возможность самоорганизации. Левый и правый края решетки ради простоты отождествлены, т.е. она свернута в вертикальный цилиндр (периодические граничные условия).

Лавины в данной модели распространяются строго сверху вниз, не затрагивая два раза один слой. Поэтому их вполне можно охарактеризовать всего двумя числами: площадью области S , где произошли осыпания, и длительностью T (числом затронутых лавиной слоев). Как показывает компьютерное моделирование, распределение лавин по площади и длительности имеет степенной вид с показателями, соответственно, $\alpha_S \approx 0,33$ (см. рис. 4) и $\alpha_T \approx 0,50$ [24].

Как видно из графиков, приведенных на рис. 4, степенной вид плотности вероятности нарушается при больших значениях аргумента. То есть, вместо формулы (1) следует использовать распределение

$$u(x) \sim x^{-(1+\alpha)} \cdot h(x/x_1), \quad (3)$$

где функция $h(y)$ приблизительно постоянна при $y \ll 1$ и быстро убывает при больших y . Параметр x_1 характеризует величину событий, крупных настолько, что они уже не описываются степенной статистикой. Ее нарушение при $x \sim x_1$ обусловлено конечностью размеров системы, из-за чего она и не может породить сколь угодно крупные события.

Для учета влияния размеров системы на форму распределение обычно применяется метод *конечноразмерного скейлинга* [25]. Он основан на предположении, что плотность вероятности дается формулой

$$u(x) = L^{-\beta} \cdot g(xL^{-\nu}), \quad (4)$$

где β и ν – *скейлинговые показатели*, L – размер системы, конечность которого и ограничивает область промежуточной асимптотики, а $g(y)$ – *скейлинговая функция*, общая для систем различного размера.

Вид формулы (4) обусловлен отсутствием у величины x собственных характерных значений. Поэтому ее характерные значения, определяемые размером системы, зависят от него масштабно инвариантным образом. Например, характерный размер крупного события есть

$$x_1 \sim L^\nu, \quad (5)$$

а среднее событие составляет, как легко видеть,

$$\bar{x} = \int x \cdot u(x) dx \sim L^{2\nu-\beta}. \quad (6)$$

Для эквивалентности формул (3) и (4) необходимо, чтобы в промежуточной асимптотике функция g имела степенной вид

$$g(y) \sim y^{-(1+\alpha)}.$$

С учетом этого формула (4) сводится к

$$u(x) = L^{-\beta} g(xL^{-\nu})^{-(1+\alpha)} \sim x^{-(1+\alpha)} L^{\nu(1+\alpha)-\beta}.$$

А поскольку в промежуточной асимптотике плотность вероятности не зависит от размера системы, показатели оказываются связанными следующим скейлинговым соотношением

$$\nu(1+\alpha) = \beta. \quad (7)$$

Если при построении графиков плотности вероятности, откладывать по оси абсцисс $x \cdot L^{-\nu}$, а по оси ординат – $u(x) \cdot L^{\beta}$, то графики, соответствующие системам различного размера, совпадут (см. врезку к рис. 4). Таким способом можно с хорошей точностью определить скейлинговые показатели, а через них по формуле (7) выразить и показатель α , для которого в случае распределения лавин по площади получается значение 0,33.

Использование конечно-размерного скейлинга помогает найти значения показателей модели и теоретически¹¹.

На каждом шаге в систему добавляется одна песчинка, поэтому в стационарном режиме в среднем одна песчинка будет ее и покидать. Чтобы пройти все L слоев решетки, каждой песчинке необходимо участвовать в L осыпаниях. Поэтому средняя площадь области лавины S , равная среднему количеству осыпаний, будет пропорциональна L

$$\bar{S} \sim L.$$

Откуда, в соответствии с формулами (6) и (7), приходим к следующему соотношению между показателями

$$\nu_S(1-\alpha_S) = 1. \quad (8)$$

Характерная длительность крупных лавин T_1 определяется, очевидно, числом имеющихся в решетке слоев

$$T_1 \sim L, \quad (9)$$

что дает

$$\nu_T = 1. \quad (10)$$

Чтобы объединить соотношения (8) и (10), осталось установить связь между площадью и длительностью лавин. Для этого надо вспомнить, что мы имеем дело с самоорганизованно критической системой.

На каждом слое t , который проходит лавина, она имеет некоторую ширину $w(t)$, определяемую как число осыпавшихся ячеек слоя. Среднее изменение ширины лавины от слоя к слою равно нулю. В самом деле, будь оно отрицательно, вероятность достижения лавиной слоя t экспоненциально бы убывала с его номером, а будь оно положительно, лавина бы с ненулевой вероятностью неограниченно распространялась. Поскольку в первом случае количество песка в системе возрастает, а во втором – убывает, возникает отрицательная

¹¹ Данная модель была полностью теоретически исследована еще ее авторами [24]. Однако их решение опирается на ряд нетривиальных математических результатов, которые, в действительности, являются излишними и только маскируют суть явления.

обратная связь, подстраивающая систему в критическое состояние. В нем при прохождении лавины по слоям ее ширина изменяется лишь диффузионным образом (как координата частицы, совершающей несмещенные случайные блуждания).

Таким образом, типичная ширина лавины, достигшей слоя t ,

$$w(t) \sim \sqrt{t}.$$

Интегрируя эту формулу, находим типичную площадь лавины, достигшей слоя T ,

$$S(T) \sim \int_0^T w(t) dt \sim T^{3/2}. \quad (11)$$

Подстановка в полученную зависимость выражения (9) дает

$$S_1 \sim T_1^{3/2} \sim L^{3/2},$$

т.е. $\nu_S = 3/2$, откуда с учетом соотношения (8) определяется показатель распределения $\alpha_S = 1/3$.

С другой стороны, формула (11) в сочетании с уравнением сохранения вероятности

$$u_S(S) dS = u_T(T) dT$$

приводит нас к соотношению между показателями распределений

$$\alpha_T / \alpha_S = 3/2 \quad (12)$$

и значению $\alpha_T = 1/2$ в полном согласии с результатами моделирования.

Следствием степенных распределений, описывающих систему, естественно, является ее склонность к катастрофам. В этом смысле очень наглядной является экономическая интерпретация модели [21].

Каждая ячейка рассматривается как экономический агент – производитель определенного вида продукции, для создания двух единиц которой он использует по единице продукции каждого из двух нижележащих агентов. Число в ячейке определяет количество единиц продукции, запрошенной смежниками сверху. Как только накапливается более одного запроса, агент, в свою очередь, посылает по запросу смежникам снизу, чтобы произвести свою продукцию и удовлетворить запросы верхних смежников¹².

Слой решетки при этом можно трактовать как различные уровни экономики: (внизу – сырьевые и добывающие отрасли, в середине – перерабатывающие, наверху – производители готовой продукции), а добавление единичек в верхний слой – как запрос на единицу товара от конечного потребителя.

Отклик такой модели экономики на элементарное воздействие не имеет собственного характерного размера, и поэтому в ней возможны гигантские события без отчетливых причин, которые можно интерпретировать как кризисы или бумы. И хотя ничто не мешает экономистам *a posteriori* указать на ту конкретную песчинку, которая сорвала лавину (что обычно и делается при анализе кризисных явлений), причина лавины вовсе не в песчинке, а целостном критическом поведении системы, склонной к катастрофическому поведению.

¹² При таких правилах между получением запроса и его удовлетворением может проходить, вообще говоря, произвольное время. Чтобы избежать этого, агентам достаточно иметь склады готовой продукции единичной емкости. Тогда все запросы будут удовлетворяться немедленно, что, однако, никак не скажется на динамике их распространения.

МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

Для исследования критических систем часто применяется прием, называемый *масштабным преобразованием*, или *перенормировкой*. Перенормировка заключается в огрублении пространственного разрешения, в результате чего несколько элементов исходной системы объединяются в единый блок, который на новом масштабе уже рассматривается как самостоятельный элемент. [17]

Однако свойства критических системы одинаковы на всех масштабах, поэтому критическое состояние будет неподвижной точкой масштабного преобразования. В этом смысле оно является альтернативой приведенного выше динамического подхода, использующей вместо времени итерации перенормировки.

Рассмотрим иерархическую систему, фрагмент которой изображен на рис. 5 [26,27,28]. Система разбита на уровни, которые можно интерпретировать как степени детализации описания (чем ниже уровень, тем детальнее) или как различные стадии развития системы. Каждый элемент уровня $i > 0$ состоит из трех элементов предыдущего уровня $i-1$. Элементы системы могут быть *исправны* или *дефектны*.

Пусть на нижнем уровне $i = 0$ состояние элементов полностью случайно и концентрация дефектных есть p_0 .

Элементы нижележащих уровней, тройками объединяющиеся в элемент следующего уровня, передают ему свое состояние в соответствии с его *восприимчивостью к дефектам*, под которой понимается минимальное число дефектных составляющих, необходимых, чтобы и он стал дефектным. Так, элемент с восприимчивостью k будет дефектным, если дефектны не менее k его составляющих. Таким образом, возможны три типа элементов: с $k = 1; 2; 3$, т.е. становящиеся дефектными, соответственно, если дефектна хотя бы одна составляющая, если дефектны не менее двух составляющих и если дефекты все три составляющие.

Обозначим доли элементов типа k в системе через s_k . При этом, очевидно,

$$s_1 + s_2 + s_3 = 1. \quad (13)$$

Основной вопрос, который может быть задан относительно описанной системы: каково ее состояние на верхних уровнях (вплоть до последнего, содержащего единственный элемент, который суть сама система) при заданных концентрациях дефектов на самом нижнем уровне p_0 и долях элементов различной восприимчивости s_k ?

Изменение концентрации дефектных элементов p при подъеме на один уровень дается отображением

$$p \rightarrow F(p) = s_1 \cdot (1 - (1 - p)^3) + s_2 \cdot (p^3 + 3p^2(1 - p)) + s_3 \cdot p^3. \quad (14)$$

Найдем его неподвижные точки как корни уравнения $p = F(p)$, переписав последнее с учетом равенства (13) в виде

$$p \cdot (1 - p) \cdot 3(s_1 + ps_2) = p \cdot (1 - p) \cdot (1 + p).$$

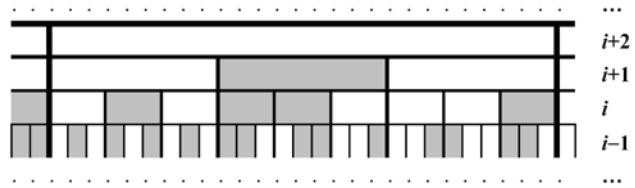


Рис. 5. Фрагмент иерархической системы

Каждый элемент i -го уровня состоит из трех элементов $(i-1)$ -ого уровня.

Элементы системы могут быть исправны или дефектны (показаны заливкой). Состояние каждого элемента определяется состоянием образующих его элементов предыдущего уровня, а также его собственной восприимчивостью к дефектам.

Рисунок соответствует ситуации $s_2 = 1, s_1 = s_3 = 0$, т.е. все элементы имеют одинаковую восприимчивость и становятся дефектными, когда дефектно не менее двух из трех образующих их элементов.

Отображение (14) всегда имеет две тривиальных неподвижных точки $p = 0$ и $p = 1$, соответствующих бездефектному и полностью дефектному состояниям, и критическую

$$p_c = \frac{1 - 3s_1}{3s_2 - 1}, \quad (15)$$

которая, чтобы иметь физический смысл, должна удовлетворять очевидному неравенству

$$0 < p_c < 1. \quad (16)$$

Устойчивость неподвижных точек отображения (14) определяется величиной

$$|F'(p)| = 3 \cdot (s_1 \cdot (1 - p)^2 + s_2 \cdot 2p(1 - p) + s_3 \cdot p^2).$$

Если она меньше единицы, то неподвижная точка устойчива, если больше – неустойчива, а равенство

$$|F'(p)| = 1 \quad (17)$$

соответствует бифуркации, которая происходит, когда встречаются две неподвижных точки отображения. В случае отображения (14) тривиальные неподвижные точки ограничивают диапазон физически осмысленных значений (16) критической неподвижной точки (15). Следовательно, изменение устойчивости этих неподвижных точек совпадает с ее появлением или исчезновением в интервале (16).

Для неподвижных точек $p = 0$ и $p = 1$ уравнение (17) дает, соответственно, многообразия $s_1 = 1/3$ и $s_3 = 1/3$, которые делят пространство параметров системы на четыре области, внутри которых устойчивость неподвижных точек отображения (14) и их взаимное расположение неизменны. То есть, чтобы определить устойчивость и положение точки p_c , нет необходимости проводить громоздкие выкладки, а достаточно рассмотреть по одному удобному примеру из уже известных областей пространства параметров. На рис. 6 изображены графики отображения (14) для таких удобных случаев [26,27,28].

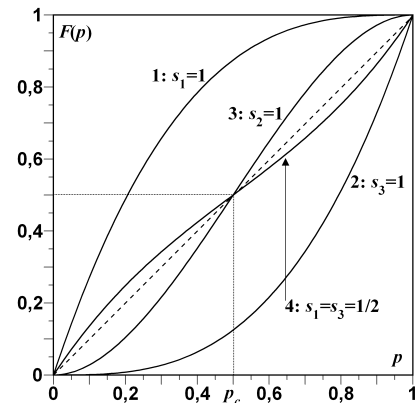


Рис. 6. Изменение концентрации дефектных элементов при подъеме на следующий уровень

1. При $s_1 = 1$ и $s_3 = s_2 = 0$ для возникновения дефектного элемента достаточно, чтобы хотя бы одна из его составляющих была дефектной. Соответственно, единственная устойчивая неподвижная точка отображения $p = 1$, и любая ненулевая концентрация дефектов на нижнем уровне приводит к дефектности всей системы.

2. При $s_3 = 1$ и $s_2 = s_1 = 0$ для возникновения дефектного элемента необходимо, чтобы все его составляющие были дефектными. Соответственно, единственная устойчивая неподвижная точка отображения $p = 0$, и любая ненулевая концентрация исправных элементов на нижнем уровне гарантирует исправность всей системы.

3. Если $s_2 = 1$ и $s_1 = s_3 = 0$, дефектный элемент возникает, если более половины из его составляющих дефектны. При этом оба крайних значения $p = 0$ и $p = 1$ устойчивы и состояние системы в целом определяется концентрацией дефектов на нижнем уровне. Если $p_0 < p_c = 1/2$, то система будет исправна (что сводится к варианту 2), а если $p_0 > p_c$ – дефектна

Графики приведены для четырех случаев, разбираемых в тексте.

Точка $p = 0$ устойчива в случаях 2 и 3, точка $p = 1$ – в случаях 1 и 3. Критическая неподвижная точка $p_c = 1/2$ существует в случаях 3 и 4, причем она неустойчива в случае 3 и устойчива в случае 4.

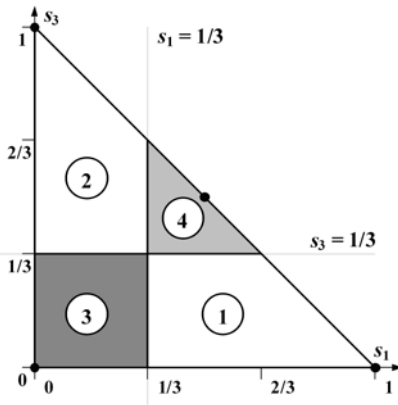


Рис. 7. Фазовая диаграмма для иерархической системы в проекции на оси s_1 – s_3

В случае $s_1 < 1/3$ (области 2 и 3) устойчиво бездефектное состояние $p = 0$. В случае $s_3 < 1/3$ (области 1 и 3) устойчиво полностью дефектное состояние $p = 1$.

При одновременном выполнении этих условий (область 3) между устойчивыми неподвижными точками $p = 0$ и $p = 1$ отображения (14) лежит его неустойчивая неподвижная точка p_c , что соответствует обычному критическому поведению. Если же оба условия нарушаются (область 4), то между двумя неустойчивыми состояниями оказывается устойчивое, что соответствует самоорганизованной критичности.

Жирными точечками отмечены случаи, использовавшиеся для определения взаимного расположения и устойчивости неподвижных точек отображения. Его графики для этих случаев приведены на рис. 6.

(вариант 1). И лишь в случае $p_0 = p_c$ критическая концентрация дефектов будет сохраняться от уровня к уровню.

4. Если $s_2 = 0$ и $s_1 = s_3 = 1/2$, то система представляет собой смесь в равных долях элементов двух разных типов: одни ведут себя по правилу 1, усиливая дефекты, а другие – по правилу 2, подавляя их. При этом критическая точка устойчива, и вероятность дефектности системы в целом p_c не зависит от концентрации дефектов на нижнем уровне, коль скоро $p_0 \neq 0;1$.

На рис. 7 приведена фазовая диаграмма для рассматриваемой системы. Пространство параметров распадается на четыре области (фазы): две, в которых одна тривиальная неподвижная точка устойчива, вторая – неустойчива, а критической точки нет вовсе, и две, в которых критическая точка есть (на рис. 7 залиты оттенками серого).

Свойства систем, рассмотренных в примерах 1 и 2, где нет критической точки, вполне предсказуемы и, следовательно, эти системы не таят никакой опасности. Однако в критическом состоянии система может с ненулевой вероятностью оказаться как исправной, так и дефектной. При этом единичные изменения на нижнем уровне могут приводить к катастрофам – переключению состояния элементов высоких уровней или даже системы в целом.

И если в примере 3 критическое состояние возникает лишь при специальном значении $p_0 = p_c$, то в примере 4 – уже при любом $p_0 \neq 0;1$. Вариант 3, таким образом, соответствует обычному критическому поведению, когда для появления у системы целостных свойств требуется специальная подстройка, а вариант 4 – самоорганизованной критичности, возникающей за счет действия отрицательной обратной связи, которая уменьшает отклонение p_i от p_c при подъеме по уровням.

РАСШИРЕННЫЕ ВЫВОДЫ

В далеких от равновесия нелинейных системах возможно возникновение сложных целостных свойств посредством самоорганизации в критическое состояние. Идеи теории самоорганизованной критичности, являющейся ядром парадигмы сложности, уже нашли приложение в астрофизике, сейсмологии, экономике, географии, физике пленок и поверхностей, теории управления риском и ряде других областей [21,28].

Анализ многочисленных самоорганизованно критических моделей показывает, что все они построены по одной и той же схеме, основанной на динамическом равновесии двух противоположенных процессов. Первый – это некий естественный путь развития элементов системы (увеличение локального наклона кучи), в то время как второй направлен на отбраковку – с возвращением к началу пути – тех из них, кто продвинулся по нему слишком далеко (осыпание неустойчивых ячеек). Существенно, что отбраковка излишне успешных элементов способствует развитию их соседей благодаря наличию взаимодействия между элементами (передача песчинок). Чтобы это взаимодействие могло охватить всю систему,

скорость отбраковки должна быть много больше скорости развития (разделение временных масштабов релаксации и возмущения). Тогда равновесие процессов развития и отбраковки достигается в критической точке, где события едва происходят и система приобретает целостные свойства.

Именно исключительная простота механизмов, лежащих в основе целостности, делает окружающий мир таким, каким он есть – полным сложных систем.

Одной из наиболее интригующих областей, где теория самоорганизованной критичности позволила добиться прорыва в понимании, является биологическая эволюция. Эволюционному процессу в полной мере присущи фликкер-шум, степенная статистика и катастрофические события [21,28]. Поэтому разумным представляется предположение о его самоорганизованно критической природе.

Объектом эволюции является *вид*, обладающий некоторым генотипом и нетривиальным образом зависящей от него *приспособленностью* к условиям окружающей среды. Приспособленность видов непостоянна и непрерывно меняется в результате двух различных процессов.

Во-первых, генотип подвержен мутациям, что позволяет видам увеличивать свою приспособленность (поскольку неблагоприятные мутации отсекаются естественным отбором). При этом эволюционирующий вид можно сравнить с путешественником, идущему по *сильно изрезанному ландшафту приспособленности* с целью забраться как можно выше (см. рис. 8).

Во-вторых, виды в экосистеме взаимосвязаны (между их представителями всегда существуют конкуренция, симбиоз, отношения хищник-жертва и иные формы взаимодействия). Поэтому изменения, происходящие с одним видом, будут сказываться на приспособленности других. В результате сам ландшафт приспособленности, по которому перемещается вид, оказывается подвержен изменениям.

Течение эволюции существенным образом зависит от соотношения скоростей этих процессов, т.е. от того насколько сильно взаимодействие между видами.

Если виды слабо связаны между собой, то изменение приспособленности происходит преимущественно за счет мутаций. При этом каждый вид достаточно быстро добирается до локального максимума приспособленности, где и "застревает", не имея возможности достичь более благоприятных состояний (рис. 8б). Как говорил (если верить Ф. Ницше) Заратустра, «в горах кратчайший путь – с вершины на вершину, но для этого нужны длинные ноги». Вид оказывается изолирован от более высоких локальных максимумов приспособленностями долинами ландшафта, которые невозможно перепрыгнуть при помощи единичных мутаций и спускаться в которые не позволяет естественный отбор. Таким образом, в медленно меняющемся ландшафте быстро достигается состояние, в котором эволюция не идет.

Если же виды связаны *сильно*, то раньше, чем вид добирается до локального максимума приспособленности, этот максимум успевает исчезнуть – ландшафт слишком

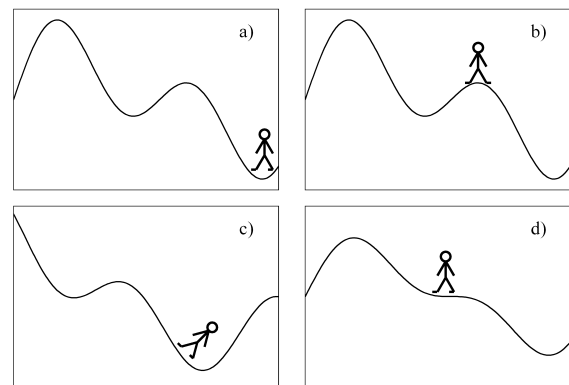


Рис. 8. Путешествие вида по ландшафту приспособленности

Путник представляет вид, который движется по градиенту ландшафта, стремясь улучшить свою приспособленность (а).

В случае, если ландшафт меняется медленно, эволюция вида прекращается после того, как он попадает в локальный максимум приспособленности (б). А в случае быстрых изменений ландшафта эволюция оказывается бурной, но безрезультатной, поскольку виды просто не могут угнаться за локальными максимумами (в).

И лишь при сбалансированных скоростях мутационных изменений и изменений ландшафта вид имеет возможность преодолевать локальные минимумы, продвигаясь ко все более высокой приспособленности (г).

быстро "плывет" под ногами (рис. 8в). При этом виды находятся в положении Алисы в Зазеркалье, когда «приходится бежать со всех ног, чтобы только остаться на том же месте» (т.н. эффект Черной Королевы). Иными словами, экосистема оказывается в состоянии, где все прошлые успехи немедленно забываются и эволюция отдельного вида, направленная на адаптацию к постоянно меняющемуся окружению, оказывается тщетной.

П. Бак, обсуждая тему биологической эволюции в книге "Как работает природа. Теория самоорганизованной критичности" [21], пишет: «Обе этих крайности плохи для коллективного благополучия системы. В первом случае виды будут заморожены на низких максимумах ландшафта приспособленности, откуда им некуда идти... Во втором случае эволюция оказывается бесполезной из-за постоянно меняющейся окружающей обстановки. Только успеешь приспособиться к имеющемуся ландшафту, как он уже изменился. Настоящей эволюции нет в обоих этих случаях. И остается только одна альтернатива: экосистема должна быть помещена точно в критическую точку, которая разделяет эти две крайности, т.е. в точку фазового перехода между ними. Здесь виды могут извлекать пользу из изменения окружающей обстановки, которое позволяет им эволюционировать ко все большей и большей приспособленности, используя медленно изменяющееся окружение как камни для перехода реки. При этом достигнутый прогресс не будет уничтожаться слишком быстро меняющейся обстановкой».

Иными словами, необходимая для возможности эволюции целостность экосистемы предполагает наличие критической точки, где эволюционный процесс едва идет, не препятствуя приспособлению видов, но и не лишая их его плодов (рис. 8г).

Все эти рассуждения могли бы показаться спекулятивными, однако модель биологической эволюции, демонстрирующая описанный непрерывный фазовый переход, реально существует [29], равно как и самоорганизованно критические модели эволюции [21,30,31,32].

В этой связи представляются уместными попытки исследователей распространить идеи теории самоорганизованной критичности на те предметы, о которых пока известно очень мало. Например, П. Баком была высказана гипотеза о критической природе функционирования мозга. Сигналы в мозге должны едва распространяться, чтобы он был в состоянии отыскать адекватный отклик на стимул, для которого не предусмотрена рефлекторная реакция. В противном случае возмущение либо быстро затухнет, не достигнув, скорее всего, той части коры, где хранится необходимая информация, либо вызовет взрыв активности нейронов, сходный с эпилептическим приступом. [21]

Можно предположить, что самоорганизация мозга в критическое состояние основывается на усилении связей с соседями тех нейронов, которые часто активируются, с одной стороны, и "выводе" в рефлекторные дуги тех групп нейронов, которые активируются слишком часто, с другой. Эта пара процессов вполне укладывается в общую схему устройства самоорганизованно критических систем.

Как бы то ни было, нет никаких сомнений в дальнейшем расширении сферы применения теории самоорганизованной критичности. Будут создаваться новые модели и совершенствоваться методы их теоретического исследования. Однако никакие успехи роста "вширь", не отменяют необходимости развиваться "вглубь". Здесь пока сделано очень мало, и поле для исследований практически необъятно, что не может не внушать оптимизма.

Укажем лишь одно возможное направление исследований. Оно связано с прогнозом динамики систем в критическом состоянии. Эта задача имеет исключительно важное прикладное значение в силу присущей целостным системам склонности к катастрофам. Вместе с тем, ее перспективы в плане изучения природы сложного никак не меньше. Эта задача перекликается с теорией русел и джокеров, в которой ставятся фундаментальные вопросы, касающиеся различной предсказуемости поведения динамических систем в разные моменты времени [3]. Модели, демонстрирующие возникновение джокеров, обладают некоторыми свойствами, присущими границе хаоса. Поэтому теория русел и джокеров, хотя и разработанная хуже, чем теория самоорганизованной критичности, имеет не меньшие

основания претендовать на ведущие роли в структуре третьей парадигмы синергетики. И, как знать, не выяснится ли со временем, что эти весьма несхожие на первый взгляд явления есть лишь две стороны одной медали?

Литература

1. Хакен Г. Синергетика. – М.: Мир, 1980.
2. Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Основания синергетики. Режимы с обострением, самоорганизация, темпомиры. – СПб.: Алетейя, 2002. – 414 с.
3. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики/ Изд. 2-е, исправл. и доп. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 360 с.
4. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. – М.: Мир, 1979. – 512 с.
5. Зыков В.С. Моделирование волновых процессов в возбудимых средах. – М.: Наука, 1984. – 166 с.
6. Режимы с обострением. Эволюция идеи: Законы коэволюции сложных структур/ Сер. "Кибернетика: неограниченные возможности и возможные ограничения". – М.: Наука, 1998. – 255 с.
7. Странные аттракторы. М.: Мир, 1981.
8. Waldrop M.M. Complexity: The emerging science at the edge of order and chaos. – Touchstone, New York, 1993.
9. Obukhov S.P. Self-organized criticality: Goldstone modes and their interactions// Phys. Rev. Lett. 1990. V.65, N12, p.1395-1398.
10. Sornette D., Cont R. Convergent multiplicative processes repelled from zero: Power laws and truncated power laws// J. Phys. I (France). 1997. V.7, p.431-444. <http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9609074>
11. Sornette D. Linear stochastic dynamics with nonlinear fractal properties// Physica A. 1998. V.250, N1-4, p.295-314. <http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9709101>
12. Newman M.E.J., Sneppen K. Avalanches, scaling and coherent noise// Phys. Rev. E. 1996. V.54, N6, p.6226-6231. <http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9606066>
13. Sneppen K., Newman M.E.J. Coherent noise, scale invariance and intermittency in large systems// Physica D. 1997. V.110, N3-4, p.209-222. <http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9611229>
14. Подлазов А.В. Распределение конкурентов, масштабная инвариантность состояния и модели линейного роста// Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т.10, №1-2, с.20-43.
15. Подлазов А.В. Ветвящийся процесс с зависимыми частицами как модель катастрофического поведения// Математическое моделирование. 2002, Т.14, №9, с.53-58.
16. Малинецкий Г.Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику/ Сер. "Кибернетика: неограниченные возможности и возможные ограничения". – М.: Наука, 1997. – 255 с.
17. Ма Ш. Современная теория критических явлений. – М.: Мир, 1980. – 298 с.
18. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality: An explanation of 1/f-noise// Phys. Rev. Lett. 1987. V.59, P.381-384.
19. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality// Phys. Rev. A. 1988. V.38, N1, p.364-374.
20. Бак П., Чен К. Самоорганизованная критичность// В мире науки. 1991. №3, с.16-24.
21. Bak P. How nature works: The science of self-organized criticality. Springer-Verlag, New York, Inc. 1996.
22. Sornette D., Johansen A., Dornic I. Mapping self-organized criticality onto criticality. J. Phys. I (France). 1995. V.5, p.325.
23. Clar S., Drossel B., Schwabl F. Forest fires and other examples of self-organized criticality// J. Phys.: Cond. Mat. 1996. V.8, p.6803.
24. Dhar D., Ramaswamy R. Exactly solved model of self-organized critical phenomena// Phys. Rev. Lett. 1989. V.63, N16, p.1659-1662.
25. Kadanoff L.P., Nagel S.R., Wu L., Zhou S. Scaling and universality in avalanches// Phys. Rev. A. 1989. V.39, N12, p.6524-6537.
26. Shnirman M.G., Blanter E.M. Mixed hierarchical model of seismicity: Scaling and prediction// Phys. Earth Planet. Inter. 1999. V.111, p.295-303.
27. Shnirman M.G., Blanter E.M. Scale invariance and invariant scaling in a mixed hierarchical system// Phys. Rev. E. 1999. V.60, N5, p.5111-5120.
28. Владимиров В.А., Воробьев Ю.Л., Малинецкий Г.Г., Подлазов А.В. и др. Управление риском. Риск, устойчивое развитие, синергетика. – М.: Наука, 2000 – 432 с. <http://www.keldysh.ru/papers/2003/source/book/gmalin/risk.htm>
29. Bak P., Flyvbjerg H., Laurrup B. Coevolution in a rugged fitness landscape// Phys. Rev. A. 1992. V.46, N10, P.6724-6730.
30. Bak P., Sneppen K. Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution// Phys. Rev. Lett. 1993. V.71, N24, P.4083-4086.
31. Solé R.V., Manrubia S.C. Criticality and unpredictability in macroevolution// Phys. Rev. E. 1997. V.55, N4, p.4500-4507.
32. Solé R.V., Manrubia S.C. Extinction and self-organized criticality in a model of large-scale evolution// Phys. Rev. E. 1996. V.54, N1, P.R42-R45.