

Восстановление параметров моделей клеточных автоматов

И.В. Кузнецов, И.М. Ротвайн, Н.М. Колесникова, И.В. Ломовской

ВВЕДЕНИЕ

За последние десятилетия в естественнонаучных дисциплинах произошел качественный скачок – была осознана стохастичность многих сложных процессов и начато изучение больших нелинейных систем. Теория катастроф, теория хаоса, теория сложности (complexity), синергетика являются разными языками, описывающими поведение нелинейных динамических систем, их свойство резким скачком переходить в другое состояние и используют понятия критических переходов, самоорганизации, иерархичности, фрактальности и т.д. Геофизика и метеорология, обладая длинными рядами наблюдательных данных, не только существенно влияли на развитие этого мировоззрения [1-4], но активно разрабатывали и применяли на практике научные идеи и принципы прогноза катастроф, определения риска и возможных ущербов, стратегий принятия решений [5-10].

Пружинно-блочные модели разломов [11] и модели типа кучи песка на основе клеточных автоматов [1] широко используются для изучения сейсмических процессов. Оба типа моделей обладают рядом общих свойств [12], в том числе и самоорганизованно критическими свойствами. Гипотеза о невозможности прогноза в самоорганизованно критических системах была перенесена на сейсмические процессы и породила сомнения в возможности прогноза сильных землетрясений. Эта гипотеза до сих пор не подтверждена, но и не опровергнута.

В данной статье рассматривается обратная задача для клеточных автоматов, то есть обсуждается возможность восстановления управляющих параметров модели (клеточного автомата) на основе предъявленного каталога событий, сгенерированного данной моделью. Восстановленные значения используются для дальнейшего прогноза событий в каталоге.

Появившиеся в последнее десятилетие разнообразные виды самоорганизованно критических моделей (пружинно-блочные модели, куча песка, иерархические модели, модели с обратным каскадом и т.д.) и многочисленные исследования их поведения на первый взгляд кажутся "игрой в бисер", весьма далекой от исходных для этих моделей процессов (сейсмичность, магнитное поле Земли, солнечная активность), реальный механизм которых в точности неизвестен.

На самом деле с помощью этих моделей накапливается "критическая масса" понимания динамики систем в самоорганизованно критическом состоянии и уже начали появляться работы по применению закономерностей моделей к реальности [13,14].

Излагаемые здесь алгоритмы восстановления пока не являются решением обратной задачи для прогноза в широком классе моделей и, тем более, для прогноза реальной сейсмичности. Но мы надеемся, что они в сочетании с изложенными в статье новыми закономерностями поведения рассматриваемых ниже моделей позволят:

- по поведению системы определить ее класс и специфичность;
- развить новый подход к проблеме прогноза в нелинейных диссипативных системах, сочетающий достаточно грубую, статистическую оценку управляющих параметров с функционалами, характерными для подготовки критического перехода в системах данного класса.

МОДЕЛИ

Рассматривается решетка (матрица), состоящая из $N \times L$ ячеек. Пусть $h_i(t)$ – энергия ячейки i в момент t . Каждая ячейка i накапливает энергию с постоянной скоростью v_i до тех пор, пока $h_i(t)$ не достигнет порогового значения $H = 1$. С этого момента начинается *быстрый* процесс:

- для всех ячеек подток энергии прекращается;
- энергия ячейки i уменьшается на величину S_i , где $0 < S_i \leq h_i$ (ячейка *рвется*): $h_i \rightarrow h_i - S_i$, при этом часть энергии $Q_i < S_i$ перераспределяется среди окружающих ячеек, а остаток $S_i - Q_i$ диссипирует.

После перераспределения энергия в некоторых ячейках может достичь порога или превысить его. Тогда эти ячейки в свою очередь рвутся и перераспределение продолжается до тех пор, пока энергия всех ячеек решетки не станет ниже пороговой. После этого быстрый процесс заканчивается и возобновляется подток энергии со скоростями $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{N \times M}\}$.

Таким образом, моделирование делится на фоновый процесс, в котором все его характеристики зависят от времени (аналог накопления напряжений в земной коре за счет движения плит) и быстрый процесс образования кластера (аналог развития очага землетрясения). В сейсродинамике эти два процесса отличаются по времени не менее чем на $10 \div 12$ порядков, поэтому будем считать, что быстрый процесс происходит мгновенно в момент времени t .

В зависимости от того, как определяются величины S_i и Q_i , можно выделить три различных варианта модели, которые в дальнейшем будут обозначаться как A_0 , A_1 и B :

A_0 : $S_i = h_i$, где $h_i \geq 1$ – энергия ячейки i перед ее разрывом; $h_i \rightarrow 0$ и $Q_i = 1 - D$. Другими словами, рвущаяся ячейка i сбрасывает свою энергию до нуля, распределяя среди окружающих ячеек энергию $1 - D$, не зависящую от h_i , а остаток энергии $h_i - (1 - D)$ диссипирует.

A_1 : $S_i = 1$; $h_i \rightarrow h_i - 1$ и $Q_i = 1 - D$. То есть в модели A_1 все ячейки теряют при разрыве фиксированное количество энергии, не зависящее от их энергии перед разрывом. Величина диссипации при этом составляет D .

B : $S_i = h_i$; $h_i \rightarrow 0$ и $Q_i = h_i(1 - D)$. То есть ячейка i после разрыва имеет нулевую энергию (так же, как и в A_0), но окружающие ее ячейки получают дополнительную энергию, пропорциональную h_i . Остаток энергии $h_i D$, который диссипирует, также зависит от h_i . В дальнейшем параметр D будем называть *коэффициентом диссипации*.

Кроме того, порванной в данном быстром процессе ячейке i можно разрешить получать энергию от окружающих ее ячеек, рвущихся после нее в том же быстром процессе – тип модели Y , а можно ввести запрет на получение порванной ячейкой энергии (тогда эта энергия диссипирует) – тип модели N .

В большинстве работ по исследованию моделей клеточных автоматов рассматривались модели типа Y , хотя модели N также представляют интерес, поскольку они отражают ситуацию, когда во время образования разрыва его разрушенные элементы не могут рваться повторно.

Введем понятие расстояния r между ячейками решетки.

Зафиксируем некоторую ячейку i , отмеченную на рис. 1 звездочкой. Четыре прилегающие к ней ячейки (две по горизонтали и две по вертикали) находятся на расстоянии $r = 1$ от нее, восемь ячеек – на расстоянии $r = 2$, $4a$ – на расстоянии $r = a$. Задав радиусом взаимодействия R , назовем соседом ячейки i любую ячейку, которая находится от нее на расстоянии $r \leq R$ (см. рис. 1).

В момент разрыва ячейки i энергия Q_i распределяется между соседями так, что каждый сосед получает дополнительную энергию, равную $Q_i C_r$, где C_r – доля, приходящаяся на одного соседа, находящегося на расстоянии r от ячейки i . Величины C_r соотносятся между собой следующим образом:

$$4C_1 : 8C_2 : 12C_3 : \dots n_r C_r : \dots n_R C_R = 1 : 1/2^\lambda : 1/3^\lambda : \dots 1/r^\lambda : \dots 1/R^\lambda,$$

где n_r – число ячеек на расстоянии r от ячейки i ($n_r = 4r$), а $\lambda \geq 0$ – фактор взаимодействия. Доли C_r удовлетворяют уравнению

$$\sum_{r=1}^R C_r n_r = 1.$$

У ячеек, расположенных на границе решетки, энергия, которая должна быть передана отсутствующим соседям в быстром процессе, диссипирует. Очевидно, что имеют место *краевые эффекты*, то есть граничные и центральные ячейки решетки оказываются в разных условиях, что сказывается на поведении модели. Краевые эффекты могут быть исключены использованием решеток на торе, противоположные края которых отождествлены.

Среди вышеперечисленных вариантов модели A_1Y и A_0N (и только они) являются *абелевыми* моделями. Это означает, что состояние системы $h = \{h_1, h_2, \dots, h_{N \times L}\}$ после окончания каждого быстрого процесса не зависит от порядка просмотра ячеек при перераспределении энергии [15]. Проиллюстрируем это на простейшем примере одномерной модели из трех ячеек с номерами 1, 2 и 3 при $R = 1$ и $D = 0.2$ для тора, который в этом случае превращается в кольцо.

Рассмотрим модель A_1Y с исходным состоянием $h_1 = 1.0$, $h_2 = 0.7$, $h_3 = 0.6$ (1.0, 0.7, 0.6). После обрыва ячейки 1 каждый из соседей получит от нее квант энергии $K = (1-D)/2 = 0.4$ и система переходит в состояние (0.0, 0.7+0.4=1.1, 0.6+0.4=1.0). Ячейки 2, 3 должны порваться. Возможны два следующих варианта:

- первой рвется ячейка 2, тогда ячейки 1 и 3 получают по тому же кванту $K = 0.4$ и система переходит в состояние (0.4, 0.1, 1.4), после чего рвется ячейка 3 и быстрый процесс заканчивается состоянием (0.8, 0.5, 0.4);
- первой рвется ячейка 3, тогда система через состояние (0.4, 1.5, 0.0) приходит в то же конечное состояние, что и в предыдущем варианте.

Теперь рассмотрим модель BY при тех же исходных условиях. После обрыва ячейки 1 каждый из соседей получит от нее энергию $h_1(1-D)/2 = 0.4$ система переходит в состояние (0.0, 1.1, 1.0). Как и ранее, ячейки 2 и 3 должны порваться,

- если первой рвется ячейка 2, то ячейки 1, 3 получают от нее энергию $h_2(1-D)/2 = 0.44$ и система переходит в (0.44, 0.0, 1.44); далее рвется ячейка 3, раздавая соседям по 0.576 (состояние (1.016, 0.576, 0.0)), затем – снова ячейка 1 (раздавая соседям по 0.4064), и система приходит к конечному состоянию (0.0, 0.9824, 0.4064);
- если первой рвется ячейка 3, раздавая по 0.4 соседям, то система переходит в (0.4, 1.5, 0.0); далее – рвется ячейка 2 (0.6) (1.0, 0.0, 0.6), ячейка 1 (0.4) (0.0, 0.4, 1.0) и, наконец, после обрыва ячейки 3 (0.4) система приходит в конечное состояние (0.4, 0.8, 0.0).

По аналогии с землетрясением введем понятие события. Пусть ячейки i_1, i_2, \dots, i_k порвались в течение одного и того же быстрого процесса, произошедшего в момент t . Тогда подмножество этих ячеек образует *кластер*, если у каждой ячейки из этого подмножества есть хотя бы один сосед из того же подмножества на расстоянии $r = 1$ от

нее, и на этом расстоянии нет ячеек, порвавшихся в том же быстром процессе, но не входящих в указанное подмножество.

Результатом моделирования является каталог событий, содержащий описания кластеров: время возникновения, линейные размеры по каждой из осей решетки, координаты геометрического центра, число разорванных ячеек n_{br} , составляющих кластер, и магнитуду $M = \lg(n_{br})$. Кроме того, запись может содержать координаты первой порванной ячейки данного кластера.

Поведение различных типов моделей А и В изучено в работах [15-17]. Оно определяется начальным состоянием ячеек $\{h^0_1, h^0_2, \dots, h^0_{N \times M}\}$, параметрами взаимодействия λ и R , правилом сброса энергии S , коэффициентом диссипации D и скоростями подтока энергии в систему $\{v_1, v_2, \dots, v_{N \times M}\}$. На рис. 2 приведен пример функции распределения числа кластеров по их размеру в логарифмических масштабах для торовой модели A_1Y и при случайном равномерном распределении скоростей (в интервале $0,05 \div 1$). В геофизике такое представление землетрясений было введено Гутенбергом и Рихтером и называется графиком повторяемости. На рис. 4 представлен фрагмент временного ряда суммарного энергетического уровня всех ячеек системы $Eh(t)$ для этой модели на фоне размера образующихся кластеров.

ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Пусть известен вид модели, ее размер, параметры λ и R , общие для всех ячеек, и дан модельный каталог. Попытаемся по части каталога $[T_1; T_2]$, предоставленной для обучения, оценить оставшиеся параметры модели.

Точнее задача ставится так: необходимо определить спектр возможных значений D , $v_1, v_2, \dots, v_{N \times M}$ и $h^1_1, h^1_2, \dots, h^1_{N \times M}$ (состояния системы в T_1), при которых модель выдает такой же каталог событий за период $[T_1; T_2]$, что и исходный. Эти величины будут использованы при прогнозе в каталоге больших кластеров (сильных событий) начиная с момента T_2 .

Вначале рассмотрим абелеву модель вида A_1Y и ее модельный каталог, содержащий дополнительную информацию о событиях – перечень всех ячеек, входящих в каждый из кластеров.

Фаза 1. Попытка восстановления D. Если данная ячейка i является первой в двух кластерах, а t_1 и t_2 обозначают моменты перед образованием этих кластеров, то, зная число ячеек, добавивших энергию данной ячейке i за интервал времени $\Delta T = t_2 - t_1$ и их расстояние до i , легко выписать уравнение

$$h_i(t_2) = h_i(t_1) + v_i \Delta T + (1 - D)(k_1 C_1 + k_2 C_2 + \dots + k_R C_R) - B, \quad (1)$$

где $h_i(t_1)$ – энергия ячейки перед образованием первого кластера; $h_i(t_2)$ – перед образованием второго; k_1, k_2, \dots, k_R – число порванных за этот интервал соседей ячейки i , находящихся от нее на расстоянии $1, 2, \dots, R$, а B – число разрывов ячейки i за ΔT . Поскольку $h_i(t_2) = h_i(t_1) = 1$, то

$$v_i \Delta T = B - (1 - D)(k_1 C_1 + k_2 C_2 + \dots + k_R C_R). \quad (2)$$

Если для ячейки i найден другой аналогичный период $\Delta T'$, то появляется дополнительное уравнение вида (2). При $\Delta T \neq \Delta T'$ системы этих уравнений определяют значения D и v_i , так как k_1, k_2, \dots, k_R , C_1, C_2, \dots, C_R и B известны. После восстановления D для определения значений всего набора $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ достаточно иметь по одному уравнению вида (2) для всех оставшихся ячеек модели.

Для простоты изложения предположим, что $R = 1$, то есть при разрыве ячейки энергия распространяется среди 4-х ее соседей и при этом каждый из них получает квант энергии $K = (1-D)/4$. Тогда

$$h_i(t_2) = h_i(t_1) + v_i \Delta T + k_1 K - B, \quad (3)$$

$$K = (B' \Delta T - B \Delta T') / (k_1' \Delta T - k_1 \Delta T'), \quad (4)$$

$$v_i = (B - k_1 K) / \Delta T, \quad (5)$$

при условии $k_1' \Delta T - k_1 \Delta T' \neq 0$. Заметим, что при $v_1 = v_2 = \dots = v_{N^*}$ это условие не выполняется, т.к. система ведет себя циклическим образом с периодом $\omega = D/v$ [15,17].

Если $D(K)$ и часть компонент вектора V восстановлены, то переходим к фазе 2, в ином случае используется фаза 3б.

Фаза 2. Оценка величин V . Пусть в предыдущей фазе после определения D величина v_i не восстановлена, то есть данная ячейка никогда не была первой в двух кластерах периода обучения. Предположим, что ячейка i рвалась в двух кластерах, а t_1 и t_2 , как и раньше, обозначают моменты времени перед образованием этих кластеров. Зная, сколько ячеек в быстром процессе добавили энергии ячейке i до ее обрыва в первом кластере (n_1), и сколько во втором (n_2), можно утверждать, что $h_i(t_1) \in [1 - n_1 K; 1]$, $h_i(t_2) \in [1 - n_2 K; 1]$.

Оценка v_i минимальна, если $h_i(t_1)$ максимально ($h_i(t_1) = 1$), а $h_i(t_2)$ минимально ($h_i(t_2) = 1 - n_2 K$). Если $h_i(t_1) = 1 - n_1 K$ (минимально), а $h_i(t_2) = 1$ (максимально), то оценка v_i максимальна. Из (3) следует $v_i = (h_i(t_2) - h_i(t_1)) / \Delta T + (B - k_1 K) / \Delta T$. Введя обозначение $U = (B - k_1 K) / \Delta T$ и подставив оценки h_i , получим

$$\underline{v}_i = (U - n_2 K / \Delta T) \leq v_i \leq (U + n_1 K / \Delta T) = \bar{v}_i \quad (6)$$

Заметим, что $v_i = U$ является оценкой скорости для случая, когда данная ячейка являлась первой в обоих кластерах, то есть при $n_1 = n_2 = 0$.

Очевидно, что оптимальная оценка при данном K будет получена, когда n_1 и n_2 малы, а ΔT велико. Переходим к финальному восстановлению (фаза 3а).

Фаза 3а. Определение спектра возможных значений для $h_1(T_2)$, $h_2(T_2), \dots, h_{N \times M}(T_2)$ и $v_1, v_2, \dots, v_{N \times M}$. Используя полученную величину $D(K)$ и значения компонент V (либо точные, либо их верхние и нижние оценки), проведем моделирование с момента T_1 . При этом используются интервальные оценки возможных состояний ячеек при вхождении в их первый после T_1 кластер. Как и в фазе 2, разброс этих состояний для каждой ячейки определяется соответствующей величиной n_1 для этих кластеров.

В случае расхождений с исходным каталогом оценки состояний и скоростей соответствующим образом корректируются, сужая разброс их возможных величин.

Эта процедура проста по сути, но ее тщательное описание занимает много места, поэтому поясним ее на примере восстановления скорости и состояния для одной лишь ячейки. Пусть некоторая ячейка i рвалась не первой в моменты 1.0, 1.6, 2.3, 3.0 в 4-х последовательных кластерах и в каждом из этих кластеров получала в быстром процессе до обрыва i квант энергии от одной из соседних ячеек. Кроме того, после обрыва в каждый из интервалов времени между кластерами она получала дополнительно по 3 кванта от своих соседей. Пусть квант $K = 0.1$ ($D = 0.6$), тогда перед входом в каждый из

этих кластеров состояние i было между 0.9 и 1.0, а после обрыва – между 0.0 и 0.1. Согласно (6) оценка скорости v_i дает при $k_1 = 12$, $B = 3$, $\Delta T = 2.0$ и $n_1 = n_2 = 1$

$$U = (B - k_1 K) / \Delta T = (3 - 1.2) / 2 = 0.9;$$

$$v_i = 0.9 - 0.05 \leq v_i \leq \dots 0.9 + 0.005 = \bar{v}_i.$$

Задавшись максимальной величиной $\bar{v}_i = 0.95$, проведем моделирование и, дойдя до четвертого кластера, убедимся, что эта оценка завышена:

($t = 1.0$) перед входом в первый кластер $h_i \in [0.9; 1.0]$, перед обрывом ячейки i в этом кластере $h_i \in [1.0; 1.1]$, после обрыва – $h_i \in [0.0; 0.1]$;

($t = 1.6$) перед входом во второй кластер – $h_i \in [0.87 = 0.0 + 0.3 + 0.95 \cdot 0.6; 0.97 = 0.1 + 0.3 + 0.95 \cdot 0.6]$, перед обрывом $h_i \in [0.97; 1.07]$, но т.к. h_i не может быть менее 1.0, то $h_i \in [1.0; 1.07]$, после обрыва – $h_i \in [0.0; 0.07]$;

($t = 2.3$) перед входом в третий кластер $h_i \in [0.965 = 0.0 + 0.3 + 0.7 \cdot 0.95; 1.035 = 0.07 + 0.3 + 0.7 \cdot 0.95]$, но т.к. h_i не может быть больше 1.0, то $h_i \in [0.965; 1.0]$, перед обрывом – $h_i \in [1.065; 1.1]$, после обрыва $h_i \in [0.065; 0.1]$;

($t = 3.0$) перед входом в четвертый кластер $h_i \in [1.03 = 0.065 + 0.3 + 0.7 \cdot 0.95; 1.065 = 0.1 + 0.3 + 0.7 \cdot 0.95]$, что невозможно, т.к. h_i не может быть больше 1.0.

Возвращаемся назад, берем в качестве испытуемой скорости величину $(\bar{v}_i - \underline{v}_i) / 2$ и снова начинаем моделирование. Итерациями, используя метод деления пополам, сперва находим оценку для \bar{v}_i с заданной точностью и соответствующий интервал возможных состояний ячейки при выходе из последнего кластера, а затем – и для \underline{v}_i . В данном примере $\bar{v}_i = 0.92851$ при и $\underline{v}_i = 0.85$.

Такого вида моделирование при найденных противоречиях всегда однозначно определяет направление изменения границ для v_i . Если D задано неверно (см. фазу 3б), то также однозначно определяет направление изменений границ для D . Процедуры моделирования проводятся для всех ячеек одновременно до тех пор, пока не будут определены (с заданной точностью) верхние и нижние оценки всех компонент вектора V и получены соответствующие интервальные оценки состояния каждой из ячеек на момент T_2 , которые затем могут быть пересчитаны на момент T_1 ($h^1_1, h^1_2, \dots, h^1_{N \times M}$). Можно доказать, что процесс всегда сходится, а полученный спектр значений, и только он, составляет решение поставленной задачи при определенном D .

Фаза 3б. Оценка спектра значений при неопределенном D . Пусть априори задано минимально и максимально допустимое значение D (например, $\underline{D} = 0.001$, $\bar{D} = 0.9$). Сперва выбирается и осуществляется процедура 3а, которая либо дает решение, либо сообщает о противоречии в выборе D и направлении изменения его величины. Как и ранее, используются метод деления пополам. После определения \bar{D} с заданной точностью вычисляется \underline{D} . В результате снова, как и в 3а, получается спектр возможных решений, но, за счет границ для D , более широкий. Можно доказать, что все эти величины, и только они, составляют спектр решений поставленной задачи.

Прогноз. Если D определено интервально, то выбирается $D^* = (\bar{D} - \underline{D}) / 2$ и проводится процедура 3а. Для каждой ячейки i вычисляется $v^*_i = (\bar{v}_i - \underline{v}_i) / 2$ и для полученного набора V^* определяются наборы $\underline{h}(T_2)$ и $\bar{h}(T_2)$. Исходными данными для дальнейшего прогноза являются D^* и векторы V^* и $h^* = (\bar{h}(T_2) - \underline{h}(T_2)) / 2$.

Начиная с момента T_2 поведение системы моделируется обычным образом и каждый полученный кластер сравнивается с исходным каталогом. При обнаружении в

момент T_2^* расхождения в составе кластера или во времени его образования (>0.001) фиксируется ошибка и мы возвращаемся к обучению, но уже на периоде $[T_1; T_2^*]$.

Если для первичного обучения дан достаточно длинный каталог (в среднем около $10 \div 15$ событий на каждую ячейку), то в дальнейшем ошибки единичны. Так для модели 80×80 при $R = 1$, $D = 0.01$ и случайном равномерном распределении скоростей ($0.053 \div 1.0$) пропускались начальные 50 000 событий (фаза установки) и для обучения брались очередные 50 000. При дальнейшем прогнозе для следующих 100 000 событий было обнаружено всего 0.15% ошибок от числа прогнозируемых кластеров, из них половина пришлось на первые 20 000 событий после обучения.

Изложенная выше процедура восстановления требует слишком подробной информации о структуре кластеров. Тем не менее эксперименты с ней показали, что не все ячейки системы равноправны: при заданной диссипации скорости для множества ячеек, являющихся первыми в своих кластерах, необходимо восстанавливать достаточно точно, в то время как для других ячеек эти требования тем ниже, чем больше минимальное число квантов, полученных данной ячейкой в быстром процессе до ее обрыва.

Для иллюстрации снова рассмотрим модель из трех элементов. Пусть $D = 0.2$ ($K = 0.4$) и $v_1 = v_2 = v_3 = 1.0$, а исходное состояние – $(h_1 = 0.8, h_2 = 0.4, h_3 = 0.0)$. Тогда через 0.2 условного времени система придет в состояние $(1.0, 0.6, 0.2)$ и в быстром процессе образуется кластер из всех трех ячеек: $(1.0, 0.6, 0.2) \rightarrow (0.0, 1.0, 0.6) \rightarrow (0.4, 0.0, 1.0) \rightarrow (0.8, 0.4, 0.0)$, после чего, спустя время 0.2 снова образуется тот же кластер. Предположим, что при обучении задан кусок каталога, состоящий из этих 4-х кластеров, а $D = 0.2$ нам известно. Так как ячейка 1 является первой для этих кластеров, то легко вычисляется, что $v_1 = 1$. Очевидно, что скорости v_2 и v_3 не могут быть меньше 1.0. Взяв исходное состояние системы $(0.8, 0.4, 0.0)$ и промоделировав эту систему для двух наборов скоростей $(1.0, 1.5, 1.0)$ и $(1.0, 1.0, 2.0)$, нетрудно убедиться, что $v_2 \in [1.0; 1.5]$, а $v_3 \in [1.0; 2.0]$.

Аналогичные процедуры восстановления применялись и для моделей A_0Y . Из-за сброса ячейки после обрыва в 0 алгоритм становится проще. С другой стороны, из-за неабелевости этого типа модели, при обучении необходимо дополнительно следить за правильностью порядка обрывов ячеек внутри каждого кластера. Соответственно, при прогнозе кластер считается успешно предсказанным, если правильно спрогнозировано не только время его появления и набор входящих в него ячеек, но и их порядок. При обучении и прогнозе использовались примерно те же по величине куски каталога, что и для A_1 . Результаты прогноза представлены в табл. 1, где вместо случайного разброса скоростей V приводится разброс их обратной величины DT .

Таблица 1. Некоторые результаты прогноза поведения модели A_0Y

Разброс DT	Коэффициент диссипации D	Число ошибок прогноза в % к общему числу прогнозируемых кластеров	Число ячеек, допускающих неточную (интервальную) оценку исходных DT в % к числу всех ячеек
Тор			
Все $DT_i = 10$	0.1	0.0	89
Решетка с границами			
Все $DT_i = 10$	0.1	0.3	32.2
10 ± 5	0.3	1.2	0.63
16.8 ± 11.8	0.15	2.6	21.5
10 ± 3	0.1	3.6	43.1
10 ± 2	0.15	3.8	21.2
10 ± 0.2	0.15	4.3	29.3

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕДУРЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ И ПРОГНОЗ

В общем случае перечень всех ячеек, входящих в каждый из кластеров, как и их порядок, не задан, и точная конфигурация кластеров неизвестна. При восстановлении D и вектора V возникает проблема определения разорванных соседей данной ячейки и приходится прибегать к различным статистическим процедурам, используя для обучения достаточно длинный каталог. Для A_0N в работе [18], где использовались каталоги, не содержащие ни перечня ячеек кластера, ни информации о координатах первой ячейки в кластере, вводилась процедура выбора компактных кластеров.

При составлении уравнений нас интересуют моменты t_i^1 и t_i^2 последовательных разрывов некоторой ячейки i . Необходимо избегать частых ситуаций, в которых, из-за возможной неточности в восстановлении исходного кластера, можно либо пропустить очередной момент разрыва, либо, наоборот, ошибочно решить, что данный кластер содержит интересующую нас ячейку. С этой целью для каждой ячейки i вычисляется среднее время повторяемости $\langle \Delta t_i \rangle$ между ее разрывами и его дисперсия σ_i следующим способом.

Для каждого кластера, возникшего в момент t , определяется его максимальный размер $Z = n \times m$ по заданным в каталоге линейным размерам n, m кластера. Будем считать, что в прямоугольнике $n \times m$, покрывающем данный кластер, все ячейки разорваны. Назовем такой способ определения нового кластера "восстановлением из исходного кластера". Исходный кластер считается *хорошим* для ячейки i , если:

- Он заполнен, то есть $n_b/Z \geq \theta$, где θ – некоторый порог. Всюду ниже $\theta = 0.65$;
- Его центр достаточно близок к положению ячейки i (определение близости здесь опущено, поскольку оно требует достаточно длинного описания и не существенно для дальнейшего).
- Все ячейки данного восстановленного кластера не имеют соседей из других восстановленных кластеров в момент t_i^2 , то есть ячейки других восстановленных кластеров в момент t_i^2 не добавляют энергию ячейкам данного восстановленного кластера.

Для ячейки i отбираются пары хороших для нее, последовательных по времени кластеров и определяется время $t_i^2 - t_i^1$ между возникновением кластеров, входящих в эти пары. По этим величинам и делается оценка $\langle \Delta t \rangle$ и σ_i .

Для составления соответствующих уравнений вида (1), (2) выбирается ячейка i , являющаяся центром решетки и для нее рассматриваются лишь интервалы времени, ограниченные хорошими для i кластерами при условии, что $\langle \Delta t_i \rangle - 2\sigma_i \leq t_i^2 - t_i^1 \leq \langle \Delta t_i \rangle + 2\sigma_i$, где t_i^1 и t_i^2 – моменты возникновения этих кластеров.

Для каждой последовательной пары отобранных интервалов времени и соответствующих восстановленных кластеров составляются и решаются для ξ уравнения вида (1), (2) в предположении, что в конечных кластерах ячейка i разорвалась первой, то есть без учета влияния кластерных соседей. Далее уравнение (2) остается прежним, в (1) добавляется воздействие на i одного из кластерных соседей конечного кластера первой пары и снова находится решение для ξ . И т.д., до тех пор пока все варианты воздействий не будут перебраны. После этого в уравнение (2) добавляется воздействие на i одного из кластерных соседей конечного кластера второй пары и снова ведется перебор по первой паре.

После того, как все соответствующие интервалы времени для i просмотрены, из спектра полученных оценок для ξ составляется гистограмма с шагом 0.01. Если максимум гистограммы превышает остальные значения на 30%, то соответствующее ему значение принимается за оценку ξ .

В противном случае берется соседняя с i ячейка и процедура повторяется, пополняя выборку ξ . И так до тех пор, пока не реализуется указанный принцип 30% для максимума гистограммы. Благодаря тому, что выбранная для обучения часть модельного каталога велика и содержит небольшие кластеры, процесс перебора достаточно быстро сходится. При оценке вектора значений V поступаем аналогично.

Этот способ восстановления параметров модели и соответствующий алгоритм прогноза был использован для прогноза в моделях A_0N с размерностью 100×40 и содержащим порядка 500 000 событий, из которых первая половина использовалась для обучения. Успешно прогнозируются около 85% сильных событий каталога с общим временем тревоги порядка 1%. Кроме того, применение этого алгоритма к блоковой модели [19] простого линейного разлома размером 201×4 дает прогноз 78% сильных событий с общим временем тревоги около 6%, хотя в этих моделях задействован иной механизм образования событий и подток энергии в элементы системы нелинеен.

Можно использовать и другую методику, когда по заданной для обучения части каталога для каждого кластера генерируется его случайная реализация. Другими словами, вместо одного каталога порождается множество, каждый из которых содержит свой перечень ячеек кластера. Для каждого такого каталога проводится процедура оценки D , описанная выше, после чего в качестве оценки D берутся наиболее вероятные величины. Далее, как и ранее, в каждом из каталогов определяются векторы V^* и h^* , после чего, используя наиболее вероятные из этих оценок, переходим к прогнозу сильных событий в оставшейся после обучения части каталога. Очевидно, что при этом перебор вариантов достаточно велик, если нет дополнительных сведений о системе.

ПОВЕДЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕАБЕЛЕВЫХ МОДЕЛЕЙ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ

Назовем $h(t) = \{h_1(t), h_2(t), \dots, h_{N \times L}(t)\}$ траекторией энергии системы. Траектория ведет себя периодически, если, начиная с момента времени t_0 , $h_j(t+\omega) = h_j(t)$ для любой ячейки решетки, где ω – период цикла. В работе [17] было доказано, что поведение траектории энергии в модели A_0Y для решетки на торе является периодическим, если скорости подтока энергии в разные ячейки решетки одинаковы, то есть $DT_i = DT_j = DT$ для любых i и j , где $DT_i = 1/V_i$. При этом период цикла определяется соотношением $\omega = D \cdot DT$ и не зависит от размерности системы.

Там же с помощью численных экспериментов показано, что при одинаковых скоростях подтока и независимо от типа решетки периодическое поведение траектории энергии системы наблюдается и в модели A_0N ; при этом $\omega = C \cdot DT \cdot (D + (1-D)/2)$, где C – некоторый натуральный коэффициент пропорциональности.

Далее, в работе [20] для A_0Y , при допущении $DT_i \neq DT_j$ доказана следующая теорема.

В модели A_0Y на торе при $D < D_{cr}$ всегда найдется такой момент времени t_p , начиная с которого траектория энергии системы становится периодической. При этом

$$D_{cr} = 1 / (4 \max DT / \min DT - 1),$$

где $\max DT$ и $\min DT$ – минимальное и максимальное DT по всей системе. Длительность периода определяется как $\omega = D \cdot \max DT$, а число событий, возникающих в течение периода цикла, не превосходит числа ячеек решетки, в которых $DT = \max DT$.

Заметим, что этот результат не зависит ни от порядка счета, ни от размерности системы, ни от распределения скоростей, или DT по системе. Все эти факторы могут

сказаться на распределении размеров получаемых кластеров, но не на периодичности системы.

При $D \geq D_{cr}$ траектория энергии системы может оставаться периодичной или квазипериодичной, пока значение D не превысит некоторого порога $D_{cr} + \delta$, где значение δ мало.

Многочисленные численные эксперименты показывают, что такое же D_{cr} существует и в моделях A_0Y на решетке с границами, но, в отличие от предыдущего случая, система ведет себя квазипериодично только в некотором интервале диссипаций $D_{cr} - \delta < D_{cr} < D_{cr} + \delta$.

На рис. 4 приведено поведение модели A_0Y на решетке 100×100 с границами при с разбросе DT 10 ± 4 и разных диссипациях.

Под квазипериодичностью здесь понимается поведение, при котором траектория энергии системы не является периодичной, но некоторые события (кластеры) достаточно часто повторяются периодически. Заметим, что периодичность сильных событий делает задачу их прогноза достаточно тривиальной.

Назовем событие сильным, если его число порванных ячеек n_{br} в кластере больше некоторого порога N_0 , или если магнитуа события $M = \lg n_{br}$, больше порога M_0 , выбранного, как нижняя граница 33% верхнего квантиля по всем событиям каталога. Рассмотрим все возможные последовательности сильных событий k_1, k_2, \dots, k_n с эпицентром в некоторой ячейке. Если

$$t(k_2) - t(k_1) = t(k_3) - t(k_2) = \dots = t(k_n) - t(k_{n-1}),$$

то скажем, что событие с данным эпицентром повторяется с числом повторов $n-1$ в интервале времени $\Delta T = t(k_n) - t(k_1)$. Возьмем только периоды, где число повторов не менее, чем n_s раз (далее $n_s = 10$) и введем меру периодичности системы $\mu = N_{cl}/N_{str}$, где N_{cl} – суммарное число повторов сильных событий за весь период моделирования по всей решетке, а N_{str} – общее число всех сильных событий в системе за этот период. На рис. 5 показана зависимость μ от величины $D - D_{cr}$ для модели A_0Y с решеткой 100×100 .

Анализ графиков повторяемости для этой модели представлен на рис. 6, где на вертикальной оси отложена величина $\Delta_u = (\max DT - \min DT) / DT_{av}$ со средним $DT_{av} = 10$. Из рис. 5 и рис. 6 видно, что в окрестности D_{cr} система склонна к периодичности сильных событий и поэтому графики повторяемости здесь будут плохими из-за нарушений линейности в правой части.

Интересно, что и для модели BY на решетке наблюдается аналог D_{cr} и соответствующие типы поведения модели. Здесь D_{cr} меньше соответствующих величин модели A_0 . Формула для D_{cr} в модели B нами пока не получена и изучение модели продолжается.

Наконец, введем понятие заполняемости системы. Начиная с момента, когда каждая ячейка системы порвалась не менее 5 раз, будем подсчитывать число ячеек системы, занятых эпицентрами кластеров каждый раз через число событий, равное размерности системы. Когда эта величина повторится некоторое число раз (примем его за 50), зафиксируем ее как характеристику заполняемости системы N_{1-st} . На рис. 7 и рис. 8 наряду с N_{1-st} приведены также размер максимального кластера системы ($\text{Max } n_{br}$), полученного за это время и величину наклона графика повторяемости b . Видно, что эти величины зависят от D_{cr} , что также объясняется периодичностью. Заметим, что заполняемость системы помогает оценить ошибку описанного выше прогноза, т.к. она определяется качеством восстановления, а качество определяется числом новых эпицентров.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Рассмотренные модели относятся к группе самоорганизованно критических абелевых моделей. Предложенные методики восстановления и алгоритмы прогноза могут быть существенно улучшены. Тем не менее, хорошие результаты прогноза (как по времени, так и по пространству) дают надежду на расширение сферы применения данного подхода после его модификации к более широкому классу самоорганизованно критических моделей и к реальной сейсмичности.

Сформулировано, в каких вариантах модели A_0 и при каких ее параметрах, поведение модели становится периодическим. Доказана теорема о периодичности траектории энергии системы в модели с обратным сбросом и решеткой на торе при $D < D_{cr}$. Показано, что в случае модели с A_0Y на решетке с границами можно выделить области параметров D и Δ_u , в которых наблюдается периодичность возникновения сильных событий. В случае непериодического поведения траектории энергии и слабой периодичности сильных событий в системе существует достаточно широкий диапазон параметров модели, при котором график повторяемости соответствует закону Гутенберга–Рихтера. Границы этой области и угол наклона графика зависят от коэффициента диссипации D и уровня периодичности, который, в свою очередь, определяется величинами D и Δ_u , где Δ_u характеризует разброс скоростей в системе.

Литература

1. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow. // J. Atmos. Sci. 1963. V.20, P.130-141.
2. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality: An explanation of 1/f noise // Phys. Rev. Lett. 1987. V.59, P.381-384.
3. Keilis-Borok V.I. The lithosphere of the Earth as non linear system with implications for earthquake prediction. // Reviews of Geophysics. 1990. V.28, N1, Feb., P.19-34.
4. Turcotte D.L. Chaos, fractals, nonlinear phenomena on Earth sciences. // U.S. National Report to IUGG 1991-1994. Rev. of Geophys. supplement. AGU. 1995. P.341-343.
5. Cornell C.A. Engineering seismic risk analysis// Bull. Seism. Soc. Amer. 1968. V.58. P.1583-1609.
6. Molchan G.M., Vilcovich G.V., Keilis-Borok V.I. Seismicity and principal seismic effects // Geoph. J. Roy. Astron. Soc. 1970. V.21. P.323-335.
7. Канторович Л.В., Кейлис-Борок В.И., Молчан Г.М. Сейсмический риск и принципы сейсмического районирования. // Вычислительные и статистические методы интерпретации сейсмических данных. М.: Наука, 1973, С.3-20. (Вычисл. сейсмология; Вып.6).
8. Молчан Г.М. Оптимальные стратегии в прогнозе землетрясений. // Современные методы интерпретации сейсмологических данных. М: Наука, 1991. С.3-18 (Вычисл. сейсмология; Вып. 24)
9. Долгосрочный прогноз землетрясений. // Под ред. М.А. Садовского. – М.: Наука. 1986. – 128 с.
10. Keilis-Borok V.I. (ed). Intermediate-term earthquake prediction: models, algorithms, worldwide tests // Phys. Earth Planet. Inter. 1990. Spec. Iss. 61, N1/2.
11. Burridge R., Knopoff L. Model and theoretical seismicity // Bull. Seismol. Soc. Amer. 1967. V.57. P.341-371
12. Olami Z., Feder H.J.S., Christensen K. Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automation modeling earthquakes // Phys. Rev. Lett. 1992. V.68. P.1244-1247.
13. Наркунская Г.С., Шнирман М.Г. Иерархическая модель дефектообразования и сейсмичность. // Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1989. С.56-62. (Вычисл. Сейсмология; Вып. 22).
14. Shebalin P., Zaliapin I., Keilis-Borok V. Premonitory raise of the earthquakes' correlation range: Lesser Antilles// Phys. Earth and Planet. Inter. 2000. V.122, N3-4, p.241-249.
15. Gabrielov A., Newman W.I., Knopoff L. Lattice models of failure: Sensitivity to the local dynamics // Phys. Rev. E. 1994. V.50, N1, p.188-197.
16. Gabrielov A. Abelian avalanches and Tutte polynomials // Physica A. 1993. V.195. P.253-274.
17. Колесникова Н.М., Ротвайн И.М., Кузнецов И.В. Динамика поведения некоторых моделей клеточных автоматов // Проблемы динамики литосферы и сейсмичности (Выч. Сейсмология, Вып. 32). М.: ГЕОС, 2001. С. 212-224.

18. Кузнецов И.В. Прогноз сильных событий в моделях клеточных автоматов на основе решения обратной задачи // Проблемы динамики и сейсмичности Земли. М.: ГЕОС, 2000. С. 212-220. (Вычислительная сейсмология. Вып.31).

19. Соловьев А.А., Рундквист Д.В. Моделирование сейсмичности дугообразной зоны субдукции // ДАН. 1998. Т.362. №2. С. 256-260.

20. Ротвайн И.М., Колесникова Н.М., Ломовской И.В., Кузнецов И.В. Поведение одной модели sand pile: периодичность и ее влияние на график повторяемости // Вычислительная Сейсмология; Вып. 33, М.: ГЕОС, 2002. В печати.

Рисунки

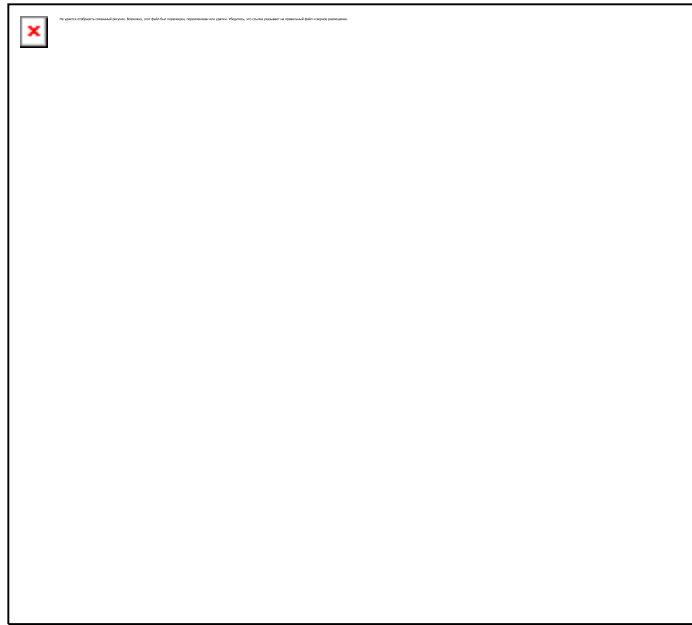


Рис. 1. Расстояние r до ячейки *

Расстояния указаны для ячеек с $r \leq 3$.

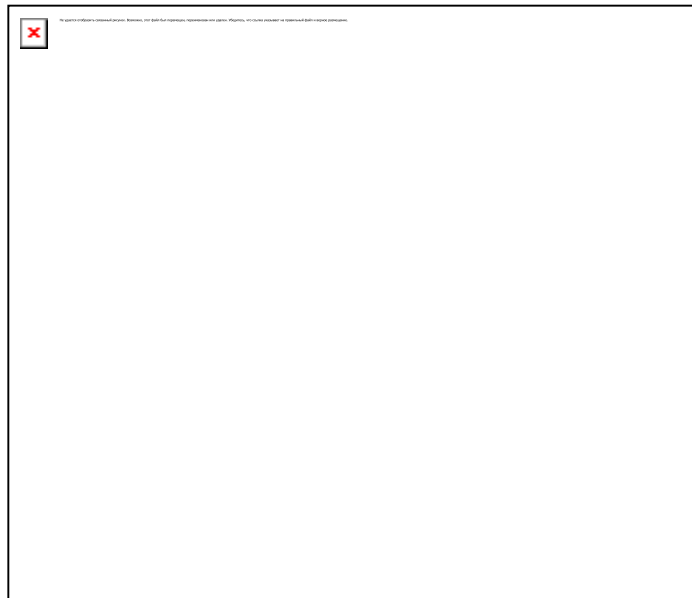


Рис. 2. График повторяемости для кластеров в модели A_1Y

Тор размера 80×80 , $R = 3$ и $D = 0.01$.

При отброшенной левой точки угол наклона графика $b = 0.87$.

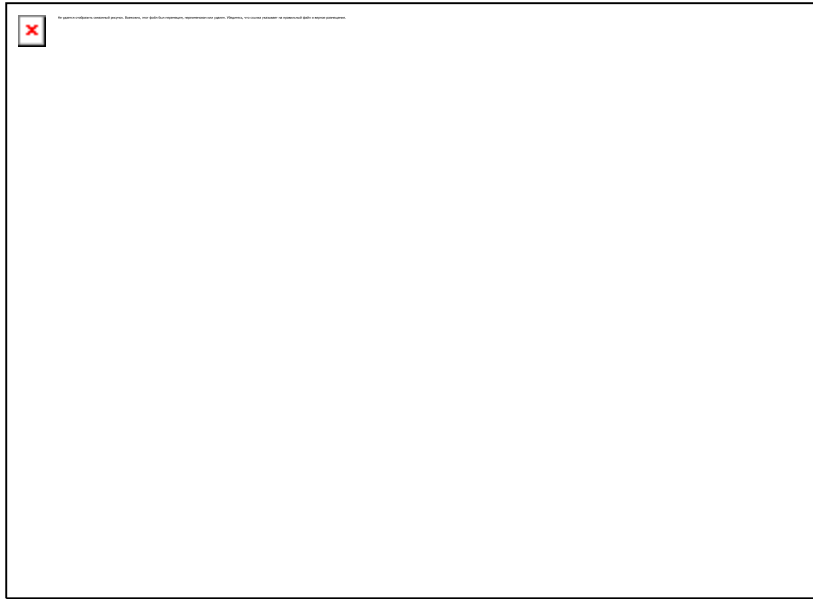


Рис. 3. Пример поведения модели A_1Y

Вверху – фрагмент временного ряда суммарного энергетического уровня (траектории) модели.
Внизу – размеры образующихся при этом кластеров.
Тор размера 80×80 , $R = 3$, $D = 0.01$.

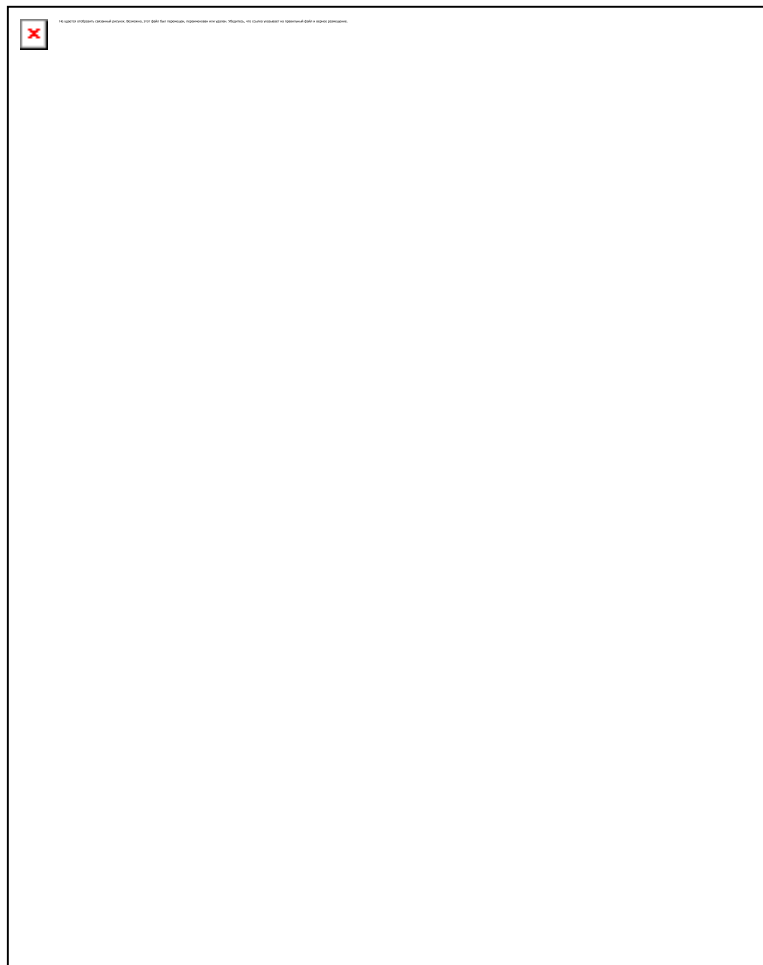


Рис. 4 Зависимость поведения модели A_0Y на решетке с границами от диссипации

а) $D=0.1 < D_{cr}$; б) $D=0.158 = D_{cr}$; в) $D=0.2 > D_c$.

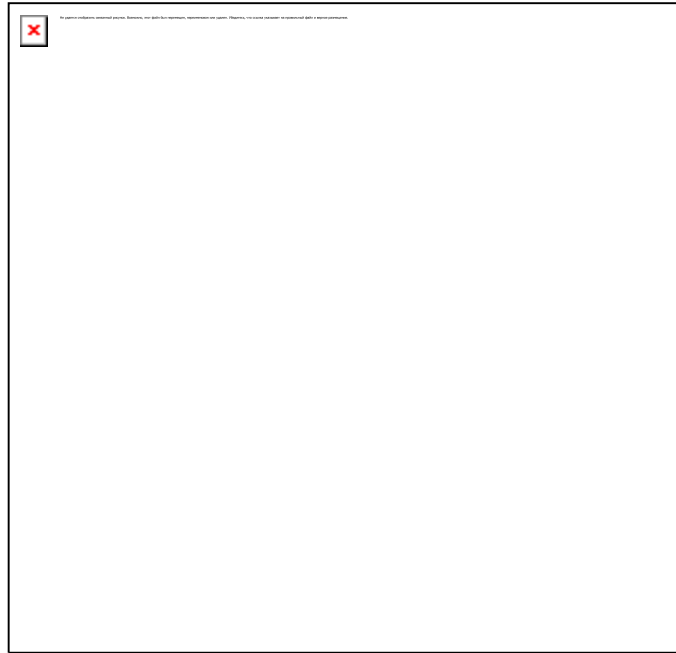


Рис. 5. Зависимость величины μ (периодичность сильных событий) от величины $D-D_{cr}$

Модель A_0Y на решетке с границами.

1 – $DT 10 \pm 2$; 2 – $DT 10 \pm 4$; 3 – $DT 10 \pm 7$. Пунктирная линия соответствует значению $D=D_{cr}$.

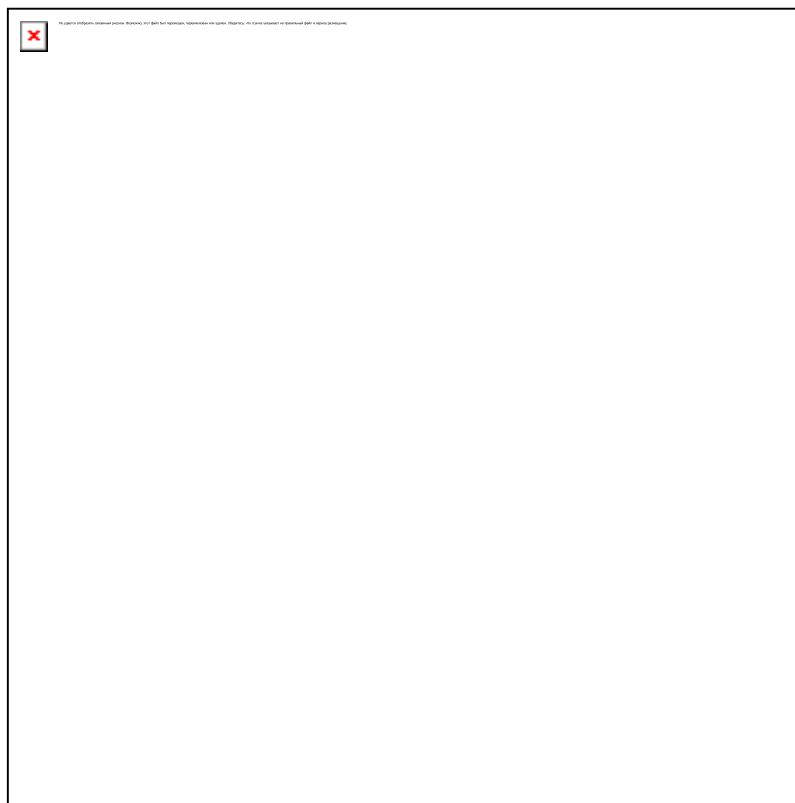


Рис. 6. Область существования графика повторяемости, соответствующего закону Гутенберга–Рихтера

Модель A_0Y на решетке с границами.

1) график соответствует закону Гутенберга–Рихтера, 2) график не соответствует закону Гутенберга–Рихтера, 3) окрестность D_{cr} , график не соответствует закону Гутенберга–Рихтера.

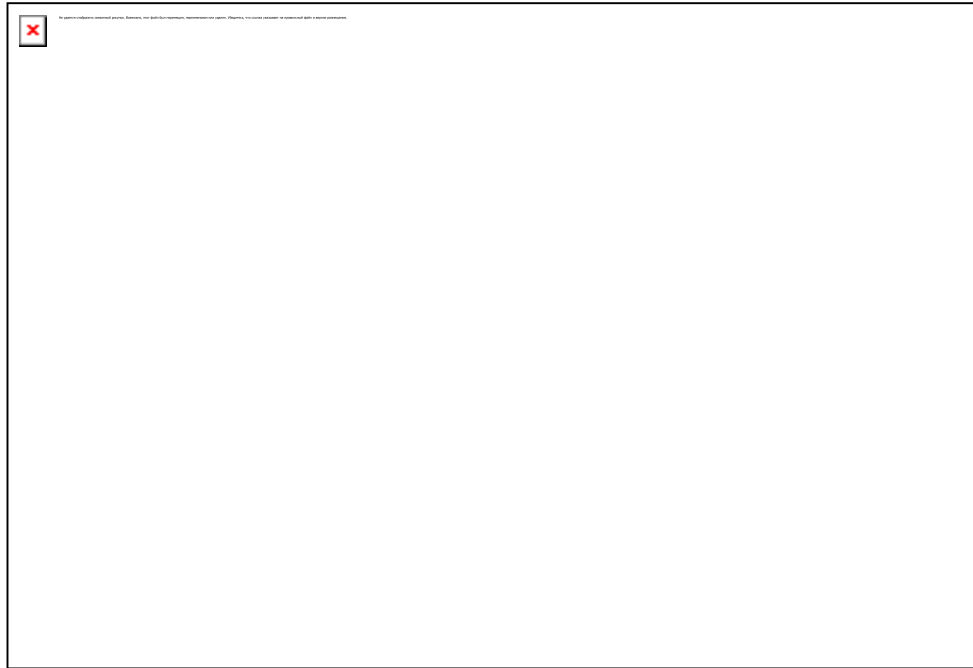


Рис. 7. Зависимость заполняемость системы (N_{1-st})

Размер максимального кластера (Max Nbr) и качество графика повторяемости (b) для модели A_0Y на решетке с границами.

Модель 50×50 , $DT 10 \pm 3$.

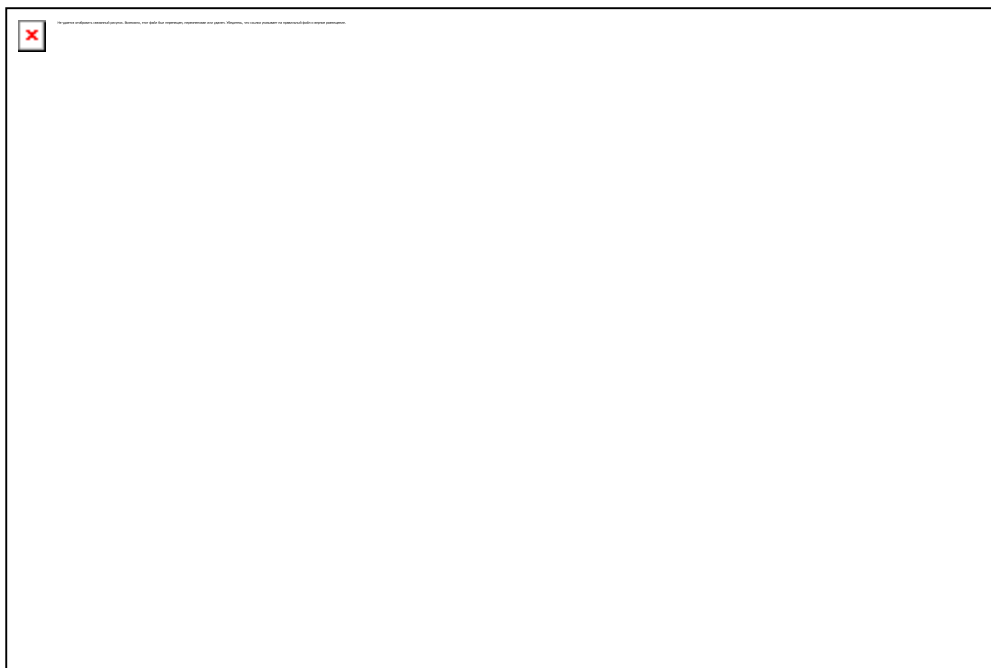


Рис. 8. Зависимость заполняемость системы (N_{1-st})

Размер максимального кластера (Max n_{br}) и качество графика повторяемости (b) для модели BY на решетке с границами.

Модель 50×50 , $DT 10 \pm 3$.