

## СПЕКТР СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ АВТОМОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСТОЧНИКОМ<sup>1</sup>

С. П. Курдюмов\*, Е. С. Куркина\*\*

\*125047 Москва, Миусская пл. 4, ИПМ РАН

\*\*119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, ВМК,

e-mail: elena.kurkina@cs.msu.su

Переработанный вариант 07.04.2004 г. Поступила в редакцию 08.10.2003.

Рассматриваются автомодельные решения нелинейного уравнения теплопроводности с объемным источником тепла и плотностью, зависящей от радиуса по степенному закону в плоской, цилиндрической и сферической геометрии. Автомодельные решения развиваются в режиме с обострением и представляют собой нестационарные диссипативные структуры. Исследуется спектр собственных функций автомодельной задачи в зависимости от значения параметров. Проводится бифуркационный анализ автомодельных решений, который позволяет установить число собственных функций, области их существования по параметру, а также их эволюцию с изменением параметра. Изучается устойчивость автомодельных решений. Показано, что она зависит от значений параметров, от номера собственной функции и от его четности. Найдены новые структурно устойчивые автомодельные решения.

### ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена изучению автомодельных решений уравнения нелинейной теплопроводности с объемным источником тепла и плотностью, зависящей от радиуса по степенному закону. Она продолжает цикл работ, в которых исследуются свойства автомодельных решений, развивающихся в режиме с обострением (см. [1]-[4]). Режимом с обострением называется процесс, в котором в одной точке или некоторой области пространства, или во всем пространстве температура обращается в бесконечность за конечное время  $t_f$ , называемое временем обострения.

Интерес к режимам с обострением возник в середине 70-х годов прошлого века в связи с изучением нестационарных процессов происходящих в высокотемпературной плазме (см. [5], [6]). Было открыто, что процесс горения в среде с нелинейной теплопроводностью может сопровождаться образованием нестационарных диссипативных структур и явлением локализации. При этом в ограниченной области пространства (на фундаментальной длине  $L_T$ ) происходит интенсивный нагрев в режиме с обострением, в то время как вне этой области температура либо строго равна нулю, либо ограничена. Поскольку структуры локализованы, в среде могут существовать одновременно несколько структур, если их фундаментальные длины не

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проекты № 04-06-80254, № 02-01-00844.

перекрываются. Таким образом, локализация является внутренней причиной распада среды на структуры – нестационарные локализованные процессы горения.

Режимы с обострением имеют место не только в плазме, но и в других системах (см. [7]-[13]). Динамика свертывания крови [9], взрыв научно технического прогресса, быстрое увеличение потребления земных ресурсов и т. д. хорошо ложатся на кривую, описываемую режимом с обострением (см. [12]). Одним из наиболее важных и интересных приложений режимов является социология [8]. Понятно, что режимы с обострением являются идеализацией реальных процессов (упрощенной моделью), и не учитывают факторы, которые ограничивают рост исследуемой функции вблизи момента обострения. Однако, модель позволяет понять и изучить существенные, наиболее значимые черты исследуемой системы, которые проявляются длительное время, вплоть до момента обострения.

Рассмотрим процесс горения среды инициированный заданием отдельных возмущений температуры в разных областях пространства. С помощью вычислительных экспериментов было установлено, что если фундаментальные длины этих областей не пересекаются, то процесс горения идет в виде отдельных структур, каждая из которых существует в течение своего времени обострения, зависящего от максимума распределения температуры (см. [14]). Если фундаментальные длины пересекаются, то идет перестройка профиля распределения температуры и процесс вырождается в горение одной структуры, обычно, имеющей в начальный момент времени наибольший максимум. Было замечено, что конфигурации, обладающие большей симметрией, дольше сохраняют свою структуру. И, наконец, существуют особые сложные неоднородные распределения температуры со многими максимумами, которые, развиваясь в режиме с обострением, сохраняют свою структуру почти все время  $t_f$  и только перед самым моментом обострения разваливаются, вырождаясь в простые структуры с одним максимумом [15]-[17]. Было установлено, что они описываются автомодельными решениями. Автомодельные решения определяют все типы структур или волн, которые могут возникнуть в данной нелинейной среде.

Автомодельная задача для нелинейного уравнения теплопроводности представляет собой краевую задачу на собственные значения и собственные функции (СФ). Эта задача изучалась много лет разными авторами, и накоплен большой материал по свойствам автомодельных решений (см. [2], [3]). В частности было установлено, что LS-режиме она может иметь неединственное решение (см. [15], [17] - [19]), но

структурно устойчивым автомодельным решением является только первая СФ, имеющая один центральный максимум.

В настоящей работе проведен бифуркационный анализ СФ автомодельной задачи с помощью численных алгоритмов продолжения по параметру, позволивший получить ряд новых результатов. Определено число одномерных СФ при заданных значениях параметров. Показано, что спектр сферически-симметричных и цилиндрически-симметричных СФ может качественно отличаться от спектра автомодельных решений в одномерном случае наличием СФ, имеющих нулевую область в центре симметрии и отсутствием некоторых СФ с нечетным номером.

В настоящей работе в широком диапазоне изменения параметров проведено численное исследование устойчивости автомодельных решений в LS-режиме. Кроме первой СФ, найдено еще одно структурно устойчивое решение – вторая СФ с нулевой областью в центре симметрии (структура в виде сферического или цилиндрического слоя). Установлено, что метастабильная устойчивость сложных СФ зависит от значения параметров и от четности их номера. Найдены области высокой метастабильной устойчивости старших СФ, при которой они сохраняют свою структуру при росте в несколько сот раз. В численных расчетах были также выявлены особенности вырождения старших СФ вблизи момента обострения. Показано, что при значениях параметров близких к S-режиму, они распадаются на отдельные простые структуры, причем в процессе распада наблюдаются СФ с меньшим номером, как промежуточные асимптотики.

## 1. ПОСТАНОВКА И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА АВТОМОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

### 1.1. Постановка автомодельной задачи

Рассматривается процесс горения в среде с объемным источником тепла и коэффициентом теплопроводности, зависящими от температуры по степенному закону в плоской ( $\nu = 0$ ), цилиндрической ( $\nu = 1$ ) и сферической ( $\nu = 2$ ) геометрии. Распределение температуры  $T(r, t)$  в пространстве удовлетворяет уравнению:

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^\nu \chi_0 T^\beta \frac{\partial T}{\partial r} \right) + q_0 \rho T^\beta, \quad (1)$$

где  $E = c_V T$ ,  $c_V, \chi_0, q_0 > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\beta > 1$  – заданные параметры.

Предполагается, что при  $\nu = 1$  и  $\nu = 2$  плотность зависит от радиуса по степенному закону:

$$\rho = Ar^{-k}, \quad 0 \leq k < 2. \quad (2)$$

При  $k = 0$  плотность постоянна. Если  $0 < k < 2$ , она обращается в бесконечность при  $r = 0$ , однако эта особенность интегрируема, так что масса вещества в центральной области остается ограниченной и в цилиндрической и сферической геометрии.

Уравнение (1) разделим на произведение  $A \cdot c_V$  и полученные коэффициенты  $\chi = \chi_0 / A c_V$ ,  $q = q_0 / A c_V$  положим равными единице, что эквивалентно преобразованию масштабов:  $\tilde{r} = (q/\chi)^{1/(k-2)} r$ ,  $\tilde{t} = qt$ .

Горение инициируется заданием некоторого начального ограниченного распределения температуры  $T(r, 0) = T_0(r) \leq M < \infty$ . Задача рассматривается как в ограниченной области при  $r \leq r_f$ , так и во всем пространстве ( $0 \leq r < \infty$ ). В первом случае на фронте волны горения ставятся условия непрерывности температуры и теплового потока по нулевому фону:

$$r^H T^y \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_f} = 0, \quad T \Big|_{r=r_f} = 0, \quad (3)$$

и требуется определить закон движения фронта  $r_f(t)$ .

Граничные условия на бесконечности имеют вид

$$r^H T^y \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad T \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (4)$$

В работе исследуются автомодельные решения уравнения (1) вида

$$T(r, t) = g(t) \Theta(\xi), \quad \xi = \frac{r}{\psi(t)}, \quad (5)$$

Подстановка представления (6) в уравнение (1) однозначно определяет вид функций  $g(t)$ ,  $\psi(t)$ :

$$g(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^m, \quad \psi(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n, \quad (6)$$

где  $m = -\frac{1}{\sigma - 1} < 0$ ,  $n = \frac{\beta - \sigma - 1}{(\sigma - 1)(-k + 2)}$ ,

и вид автомодельного уравнения относительно функции  $\Theta(\xi)$ :

$$\frac{1}{\xi^H} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^H \Theta^y \frac{d\Theta}{d\xi} \right) = -\frac{m}{\tau} \xi^{-k} \Theta + \frac{n}{\tau} \xi^{-k+1} \frac{d\Theta}{d\xi} - \xi^{-k} \Theta^\sigma, \quad (7)$$

где  $\tau$  – произвольный параметр обобщенного разделения переменных (5).

В соответствии с условиями (3) и (4) будем искать решения автомодельного уравнения (7), удовлетворяющие следующим граничным условиям, либо на фронте при  $\xi = \xi_f$ :

$$\xi^n \Theta^y \frac{d\Theta}{d\xi} \Big|_{\xi = \xi_f} = 0, \quad \Theta \Big|_{\xi = \xi_f} = 0, \quad (8)$$

либо на бесконечности при  $\xi \rightarrow \infty$ :

$$o^\nu \Theta^y \frac{d\Theta}{do} \Big|_{o \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \Theta \Big|_{o \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (9)$$

Мы будем исследовать ограниченные автомодельные решения, которые в начале координат удовлетворяют условиям:

$$\xi^n \Theta^y \frac{d\Theta}{d\xi} \Big|_{\xi = 0} = 0, \quad \Theta \Big|_{\xi = 0} < \infty. \quad (10)$$

В [20] в случае  $\nu = 1, 2$  показано существование автомодельных решений на интервале  $[\xi_f, \infty)$ , то есть имеющих нулевую область в центре и на фронте слева удовлетворяющих условиям (8).

Задача состоит в том, чтобы найти все решения автомодельного уравнения (7), удовлетворяющие крайевым условиям (8), (10), или (9), (10), или (8), (9), и исследовать их в зависимости от значения параметров  $\sigma$ ,  $\beta$ ,  $\nu$  и  $k$ . В общем случае нетривиальные решения автомодельной задачи на отрезке произвольной длины могут существовать не при любых значениях  $\tau$ , а только при некоторых. Таким образом, поставленная задача является задачей на собственные значения  $\tau$  и собственные функции  $\Theta(\xi, \tau)$ .

В работе проводится также исследование устойчивости рассматриваемых автомодельных решений (5), (6) уравнения с частными производными (1).

## 1.2. Пространственно-однородные решения

Автомодельное уравнение (7) представляет собой неавтономное (за исключением случая  $\nu = 0$ ,  $\kappa = 0$ ,  $\beta = \sigma + 1$ ) уравнение второго порядка. Заменой

$$y = \Theta^{y+1}, \quad w = dy/d\xi$$

оно сводится к системе двух уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\xi} &= w, \\ \frac{dw}{d\xi} &= -\frac{\nu}{\xi} w + \xi^{-k} \left( \frac{n}{\tau} \xi y^{-\frac{y}{y+1}} w + (\sigma + 1) \left( -\frac{m}{\tau} y^{\frac{1}{y+1}} - y^{\frac{\epsilon}{y+1}} \right) \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение (7) имеет два частных пространственно-однородных решения:

$$\Theta_0(\xi) \equiv 0 \quad (12)$$

и гомотермическое решение

$$\Theta_H = ((\epsilon - 1)\tau)^{-1/(\epsilon - 1)}. \quad (13)$$

Эти два решения являются стационарными точками в фазовом пространстве системы (13). Граничное условие (9) означает, что траектория, описывающая собственную функцию, при  $\xi \rightarrow \infty$  стремится к стационарной точке  $(0,0)$ , а граничное условие (8) означает выход траектории в ту же точку за конечное время  $\xi_f$ : Отметим, что стационарная точка (12) является особой точкой автомодельного уравнения, так как она обращает в ноль коэффициент теплопроводности, стоящий перед старшей производной. В этой точки мы имеем вырожденное уравнение, а при приближении к ней уравнение с малым параметром при старшей производной. Именно этот факт приводит к возможности достижения стационарной точки за конечное время.

Уравнение с частными производными (1) имеет два соответствующих пространственно-однородных решения: нулевое ( $T(r,t) \equiv 0$ ) и гомотермическое:

$$T_H(t) = T_0 \left( 1 - \frac{t}{\tau_f} \right)^{-1/(\epsilon - 1)}, \quad \tau_f = T_0^{1-\epsilon} (\epsilon - 1)^{-1}. \quad (14)$$

Гомотермическое решение развивается в режиме с обострением при  $\beta > 1$ , так что  $T_H(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \tau_f$ . При однородных начальных данных  $T_0(r) = T_0 = \text{const} > 0$  время обострения  $\tau_f$  задается формулой (14).

### 1.3. Три типа автомодельных решений и их некоторые свойства

Если собственные значения  $\tau$  и собственные функции  $\Theta(\xi, \tau)$  автомодельной задачи найдены, то распределение температуры в каждый момент времени задается формулами (5), (6). Отметим некоторые свойства автомодельных решений, которые следуют непосредственно из анализа функций  $g(t)$ ,  $\psi(t)$  и уравнения (7). Так как  $\beta > 1$ , то при положительном  $\tau$  они существуют конечное время  $t_f = \tau$  и развиваются в

режиме с обострением; а  $\tau$  имеет смысл времени обострения. При отрицательном  $\tau$  автомодельное решение существует для любого  $t > 0$  и описывает затухающий режим. В работе рассматриваются автомодельные решения, развивающиеся в режиме с обострением, то есть исследуется спектр СФ, отвечающих положительным  $\tau$ . Если исследуемая задача имеет решение при некотором значении  $\tau = \tau_1 > 0$ , то она имеет решение и при любом другом значении  $\tau = \tau_2 > 0$ . Эти решения связаны преобразованием подобия [18]:

$$\Theta(\xi, \tau_2) = (\tau_2 / \tau_1)^m \Theta((\tau_2 / \tau_1)^{-n} \xi, \tau_1). \quad (15)$$

Если существует решение автомодельной задачи на некотором отрезке пространства  $0 \leq o \leq o_f^1$  при  $\tau = \tau_1$ , то решение существует и на любом другом отрезке  $0 \leq o \leq o_f^2$ , причем  $(\tau_1 / \tau_2)^n = \xi_f^2 / \xi_f^1$ .

Из свойства подобия следует, что собственные функции, отвечающие разным собственным значениям, являются одним и тем же автомодельным решением, взятым в разные моменты времени. Это позволяет не рассматривать все возможные значения  $\tau > 0$ , а выбрать удобное, например  $\tau = (\sigma - 1)^{-1}$  (тогда  $\Theta_H = 1$  (14)), и найти ему соответствующий спектр функций  $\Theta(\xi, \tau)$ .

Анализируя поведение решений при  $\xi \rightarrow \xi_f$  и  $\xi \rightarrow \infty$ , а также интегрируя уравнение (7) с учетом граничных условий (см. [17], [18]), находим локально необходимые и глобально необходимые условия существования автомодельных решений. Из этого анализа следует, что может существовать три типа автомодельных режимов с обострением: HS, S и LS (см. [14]).

При  $1 < \beta < \sigma + 1$  реализуется HS-режим. Исследования показали, что автомодельная задача в этом случае имеет единственную собственную функцию, монотонно убывающую на отрезке  $[0, o_f]$  с максимумом в центре симметрии ( $\Theta(0) > \Theta_H$ ). Автомодельное решение представляет собой тепловую волну, амплитуда и фронт которой увеличиваются в режиме с обострением.

При  $\beta = \sigma + 1$  имеет место S-режим. Автомодельное решение представляет собой нестационарную диссипативную структуру, локализованную на фундаментальной длине  $L_T$ . Внутри области локализации температура растет в режиме с обострением, а вне ее остается равной нулю. В одномерном случае при постоянной плотности в [14] было получено аналитическое решение автомодельной задачи:

$$T(r,t) = T_0 g(t) \Theta_S(r), \quad \Theta_S(r) = \left[ \Theta_0 \cos^2 \left( \frac{p \cdot r}{L_T} \right) \right]^{\frac{1}{y}}, \quad 0 \leq r \leq 0.5 * L_T, \quad (16)$$

$$\Theta_0 = \frac{2(y+1)}{(y+2)}, \quad L_T = \frac{2p}{y} \sqrt{\frac{\chi}{q}(y+1)}.$$

Автомодельное уравнение (7) в этом случае является автономным, поэтому решение (16) инвариантно относительно сдвига по оси  $r$ . Его можно рассматривать как периодическое с периодом  $L_T$ . В сферической и цилиндрической геометрии автомодельное уравнение (7) не является автономным при  $\beta = \sigma + 1$ . Исследования показали, что при  $\nu = 1$  и  $\nu = 2$  и рассматриваемых плотностях существует единственная СФ автомодельной задачи  $\Theta_{S\nu}(r)$  на отрезке  $[0, r_f]$  ( $\Theta(0) > \Theta_H$ ). При  $k = 0$  оно качественно имеет такой же вид как и в одномерном случае (16), только с увеличением размерности пространства фундаментальная длина и амплитуда решения увеличиваются (см. сплошную линию на фиг. 1 для  $\sigma = 2, \nu = 0, 1, 2$ ). Приближенное решение автомодельной задачи при  $\nu > 0, k = 0$  будем искать в виде (16) со своей амплитудой  $\Theta_\nu$  и фундаментальной длиной  $L_{T\nu}$ . Для нахождения  $\Theta_\nu$  и  $L_{T\nu}$  подставим вид (16) в (7), и проинтегрируем полученное уравнение на отрезке  $[0, r_f]$ . Затем приравнивая правую и левую часть уравнения в точке  $r = r_f = 0.5L_{T\nu}$ , окончательно получим:

$$L_{T\nu} = \frac{2p}{y} \sqrt{\frac{\chi}{q} \left( y + 1 + 4\sigma\nu / (\pi^2 - 4) \right)}, \quad \Theta_\nu = \left( \frac{2 \left( y + 1 + 4\sigma\nu / (\pi^2 - 4) \right)}{\sigma + 2} \right)^{1/\sigma}. \quad (17)$$

На фиг. 1 приближенное решение (16), (17) изображено штриховой линией.

Случай  $k > 0$  будет рассмотрен ниже. А теперь исследуем свойства решений автомодельной задачи, существующих на полубесконечном интервале.

Автомодельное решение в LS-режиме представляет собой нестационарную диссипативную структуру; все точки которой движутся к центру симметрии, полуширина области горения сокращается, и температура при  $t = \tau$  обращается в бесконечность только в одной точке – центре симметрии. Автомодельные решения не имеют конечного фронта справа и могут существовать на полубесконечном интервале  $[0, \infty)$  или  $[\xi_f, \infty)$  при

$$\begin{aligned} \beta > \sigma + 1, & \quad \text{если } \nu = 0 \text{ или } \nu = 1 \\ \sigma + 1 < \beta < (\sigma + 1)(-k + 3), & \quad \text{если } \nu = 2 \end{aligned} \quad (18)$$

Нетрудно показать, что существует асимптотическое разложение автомодельного решения при  $\xi \rightarrow \infty$  (см. [17], [18]). Главный член асимптотики имеет вид:

$$\Theta(o) \approx C\xi^{-p}, \quad p = \frac{(-k+2)}{v-y-1} > 0. \quad (19)$$

Если подставить (19) в выражение для автомодельного решения (3), то получится, что главный член асимптотического разложения температуры не зависит от времени:

$$T(r, t) \rightarrow Cr^{-p}. \quad (20)$$

Это обстоятельство указывает на локализацию горения: температура увеличивается в режиме с обострением в сокращающейся области вблизи центра симметрии, в то время как вне этой области она стремится к предельному, постоянному по времени распределению температуры (20). Хотя автомодельное решение в LS-режиме существует на полубесконечном интервале, описываемый им режим, реализуется только в ограниченной области. С помощью теорем сравнения доказана строгая локализация процессов горения в этом случае и «обрезание бесконечного хвоста» у автомодельного решения [21].

Ограничение интервала существования решения при  $v = 2$  (18) вытекает из требования равенства нулю потока на бесконечности и вида асимптотики.

Уточним условие (10) в центре симметрии. Пусть решение автомодельной задачи существует и отлично от нуля при  $\xi = 0$ . Тогда, асимптотическое разложение автомодельного решения при  $\xi \rightarrow 0$  имеет вид:

$$\Theta(\xi) \approx C_0 + C_1\xi^{2-k} + \dots, \quad C_0 \neq \Theta_H. \quad (21)$$

Из (21) следует, что производная автомодельного решения при  $\xi = 0$  может принимать значения от нуля до бесконечности в зависимости от параметров:

$$\begin{aligned} \Theta'_\xi(0) &= 0 \quad \text{при } 0 \leq k < 1, \quad v = 0, 1, 2; \\ \Theta'_\xi(0) &= C_1 < \infty \quad \text{при } k = 1, \quad v = 1, 2; \\ \Theta'_\xi(\xi) &\rightarrow \infty \quad \text{при } \xi \rightarrow 0 \quad \text{если } 1 < k < 2, \quad v = 1, 2. \end{aligned} \quad (22)$$

Отметим важный факт, что наряду с LS-режимом с обострением может существовать автомодельное решение, описывающее затухающий режим и существующее в целом (обычный HS-режим) при (см. [17], [18]):

$$\beta > \sigma + 1 + \frac{k+2}{k+1+v}. \quad (23)$$

#### 1.4. Влияние распределения плотности

В автомодельном уравнении (7) сделаем замену переменных:

$$z = \frac{2}{2-k} \xi^{(2-k)/2}, \quad 0 \leq k < 2, \quad (24)$$

переводящую полупрямую  $0 \leq \xi < \infty$  в полупрямую  $0 \leq z < \infty$ . Тогда уравнение (7) для среды с распределенной плотностью ( $\rho = \xi^{-k}$ ) перейдет в автомодельное уравнение для однородной среды [18]:

$$\frac{1}{z^\mu} \frac{d}{dz} \left( z^\mu \Theta^\nu \frac{d\Theta}{dz} \right) = -\frac{m}{\phi} \Theta + \frac{n}{\phi} z \frac{d\Theta}{dz} - \Theta^\epsilon, \quad (25)$$

где показатель размерности  $\mu$  зависит от геометрии области:

$$\mu = 1 \text{ при } \nu=1, \quad \mu = (4-k)/(2-k) \text{ при } \nu=2. \quad (26)$$

В случае цилиндрической геометрии ( $\nu = 1$ ) преобразование (25) не меняет вида уравнения (7). Значит решения автомодельной задачи  $\Theta(\xi)$  при  $k \neq 0$  получаются из решений  $\Theta(z)$  при  $k = 0$  преобразованием растяжения (24). В S-режиме ( $\beta = \sigma + 1$ ), зная фундаментальную длину  $L_{T1}^0$  при  $k = 0$  (17), находим значение фундаментальной длины  $L_{T1}^k$  при любом показателе плотности  $k$ :

$$L_{Tv}^k = 2 \left( 0.25(2-k)L_{Tv}^0 \right)^{2/(k-2)}, \quad k < 2. \quad (27)$$

При  $k \rightarrow 2$  фундаментальная длина стремится к нулю (так, при  $k = 1.9$ ,  $\sigma = 2$ ,  $L_{T1}^k \approx 6 \cdot 10^{-17}$ ), и собственная функция прижимается к оси ординат.

Из сравнения уравнений (7) и (25) следует, что в сферической геометрии увеличение показателя  $k$  эквивалентно увеличению размерности пространства  $\mu$ , и при  $k \rightarrow 2$  величина  $\mu \rightarrow \infty$ . Исследования показали, что в S-режиме амплитуда СФ  $\Theta(z)$  и ее фундаментальная длина растут с увеличением  $\mu$ . Формула (17) дает хорошую оценку области локализации при небольших значениях  $\mu$  ( $\mu = \nu < 20$ ), и правильно отражает стремление фундаментальной длины  $L_{T\mu}$  и амплитуды  $\Theta_\mu$  СФ в бесконечность при  $\mu \rightarrow \infty$ . Тем не менее сжатие по закону (27) является преобладающим, и в исходной переменной  $\xi$  фундаментальная длина  $L_{T2}^k$  стремится к нулю при  $k \rightarrow 2$ .

### 1.5. Численные методы построения автомоделных решений

В настоящей работе решения автомоделных задач на отрезке (7), (8), (10) и на полупрямой (7), (9), (10) и на интервале  $[\xi_f, \infty)$  (7), (8), (9) строились методом стрельбы. Все расчеты проводились с использованием библиотеки программ и среды MATLAB 6.5. Уравнение (7) сводилось к системе двух уравнений первого порядка (11), для которой задача Коши решалась методом (*ode15s*) для жестких систем с автоматическим выбором шага, с заданной относительной (*rtol*) и абсолютной (*atol*) точностью. В большинстве случаев для  $\nu = 1$  и  $\nu = 2$  брались  $rtol = 10^{-10}$ , а  $atol = 10^{-12}$ . В случае сферической геометрии и плотности с  $1 < \kappa < 2$  сначала уравнение (7) подстановкой (24) сводилось к уравнению (25), а затем – к системе (12), тогда в начале координат производная автомоделного решения равна нулю.

Решение строилось от некоторой точки  $\xi = \xi_f$ , в которой задавались значения функции  $y(\xi_f)$  и ее производной  $w(\xi_f)$ , до некоторой точки  $\xi_0$  вблизи начала координат (для  $\nu = 0$  бралась  $\xi_0 = 0$ , для  $\nu = 1$  бралась  $\xi_0 = 10^{-5}$  и для  $\nu = 2$  бралась  $\xi_0 = 10^{-4}$ ). Функция  $y(\xi_f)$  задавалась близкой к нулю (обычно  $y(\xi_f) = 10^{-5}$ ). Для нахождения производной  $w(\xi_f)$  в задаче на отрезке использовалось разложение у фронта (считалось, что т.  $\xi_f$  близка к точке фронта). В задаче на полупрямой считалось, что в точке  $\xi_f$ , в которой функция  $y(\xi_f)$  мала, решение хорошо описывается асимптотикой (19), отсюда находилось значение  $w(\xi_f)$ . Значение  $\xi_f$  подбиралось так (методом дихотомии), чтобы в точке  $\xi_0$  производная  $w(\xi_0)$  была бы равна нулю с заданной точностью. Аналогично строилось решение на интервале  $[\xi_f, \infty)$ . В этом случае значение производной равной нулю пристреливалось не в начале координат, а в точке  $\xi_0$ , в которой функция  $y$  обращалась в ноль:  $y(\xi_0) = 0$ .

В работе исследовались численно бифуркации собственных функций в LS-режиме. Для этого автомоделное решение продолжалось по параметру  $\beta$  и отслеживались изменения его профиля и формы траектории в фазовом пространстве уравнения (11). В процессе движения по параметру задавался максимальный шаг, который автоматически уменьшался, если не было сходимости за заданное количество итераций. На основе двух предыдущих значений  $\xi_f(\beta_i)$  прогнозировалось значение  $\xi_f$  для следующего значения  $\beta$ .

Стратегия выбора шага по параметру и по переменной  $\xi_f$  в методе пристрелки, а также адекватное задание точности численного построения решения позволили

эффективно продолжить его по параметру и вплотную приблизиться к точкам бифуркации решения и тем самым исследовать их.

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ АВТОМОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ В LS-РЕЖИМЕ.

### 2.1. Связь собственных функций с решением линейной задачи

Первые численные расчеты автомодельной задачи при  $\beta > \sigma + 1$  были проведены более двадцати пяти лет назад в одномерном случае и постоянной плотности (см. [15]). Было установлено, что рассматриваемая задача может иметь несколько СФ  $\Theta_i(\xi)$ ,  $i=1,2,\dots,N$ , в зависимости от значений параметров  $\beta$  и  $\sigma$ . На фиг. 2 приведены графики семи СФ (сплошная линия) при  $\sigma = 2$ ,  $\beta = 3.3$ ,  $\nu = 0$ ,  $\kappa = 0$ , построенных численно описанным выше методом стрельбы. Первая СФ монотонно убывает. Следующие являются немонотонными, с числом локальных экстремумов, равным их номеру. Нечетные СФ имеют в начале координат локальный максимум, причем  $\Theta_{2l+1}(0) > \Theta_H$ , а четные СФ – локальный минимум, причем  $\Theta_{2l}(0) < \Theta_H$ . В области своей немонотонности, как видно из фиг. 2, СФ совершают колебания около гомотермического решения (в данном случае  $\Theta_H = 1$ ). Многочисленные расчеты показали, что поведение собственных функций при других значениях параметров в LS – режиме имеет аналогичный характер. Колебания эти во многих случаях малы и уменьшаются с ростом номера СФ. В области немонотонности автомодельные решения приближенно описываются функцией  $\Theta(\xi) \approx \Theta_H(1 + Au(\xi))$ , где  $A$  некоторая постоянная (для нечетных она положительная, для четных – отрицательная), а  $u(\xi)$  – решение линеаризованного около  $\Theta_H$  уравнения (7) с условием  $u(0) = 1$ :

$$\frac{1}{\xi^n} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^n \frac{du}{d\xi} \right) - \frac{\sigma - \gamma - 1}{-k + 2} \xi^{-k+1} \frac{du}{d\xi} + (\sigma - 1) \xi^{-k} u = 0. \quad (28)$$

Каждая СФ описывается решением линейной задачи со своей амплитудой  $A_i$ , причем старшая СФ  $\Theta_N$  в наибольшей области (по сравнению с областями для младших СФ) совпадает с решением линейного уравнения (см. на фиг. 2 штриховую линию). Остальные СФ «передают» только одно, два и т. д. колебаний решения линейного уравнения в соответствии с их номером. В [15] было высказано предположение, что число СФ совпадает с числом нулей решения линейного уравнения (28), так что последняя СФ описывается линейным приближением во всей своей области

немонотонности. Однако, исследования, проведенные в настоящей работе, показали, что число СФ на единицу меньше предполагаемого.

Уравнение (28) заменой  $z = \xi^{2-k}(\varepsilon - y - 1)/(2-k)^2$  сводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению:

$$zu'' + (b-z)u' + au = 0, \quad b = (3-k)/(2-k), \quad a = (\varepsilon - 1)/(\varepsilon - y - 1), \quad (29)$$

решением которого является вырожденная гипергеометрическая функция:

$$u(z) = CM(-a, b, z), \quad C = \text{const},$$

которая представляет собой многочлен степени  $n$ , удовлетворяющий условию  $u'(0) = 0$  и имеющий ровно  $n$  нулей на полуоси  $0 < z < \infty$ . Если  $a$  – нецелое число, то  $n = [a] + 1$ , если  $a$  – целое, то  $n = [a]$ , где  $[ ]$  – означает целую часть числа.

## 2.2 Бифуркационный анализ автомодельных решений в плоском случае

С целью выяснения числа собственных функций автомодельной задачи в LS – режиме, а также исследования характера их зависимости от параметра был проведен бифуркационный анализ решений. Первые десять собственных функций были продолжены по параметру  $\beta$  при фиксированном параметре  $\sigma$  ( $\sigma = 2$ ). Результаты расчетов отражены на двух бифуркационных диаграммах на фиг. 3. На фиг. 3а показана зависимость от параметра  $\delta(\beta)$  – отклонения от гомотермического решения значения СФ  $y = \Theta^{\sigma+1}$  в точке  $\xi = 0$  ( $\delta(\beta) = y_j(0) - 1$ ,  $j = 1, \dots, 10$ ). На второй диаграмме показана зависимость от  $\beta$  значения автомодельной переменной  $\xi_{jf}(\beta)$ , в которой  $y_j(\xi) = 10^{-5}$ . Проведенный анализ показал, что собственная функция  $y_j$  с номером  $j = 2, 3, 4, \dots$  существует в интервале

$$\sigma + 1 < \beta < \beta_j, \quad \text{где } \beta_j = \sigma + 1 + \sigma/(j-1). \quad (30)$$

Значения  $\beta = \sigma + 1$  и  $\beta = \beta_j$  являются точками бифуркации, в которых прекращает свое существование СФ  $y_j$ . Первая СФ существует при любом значении  $\beta > \sigma + 1$ . Из (30) следует, что при

$$\beta > \beta_2 = 2\sigma + 1 \quad (31)$$

автомодельная задача в LS режиме может иметь только одну собственную функцию. Чем больше номер СФ, тем уже интервал по параметру  $\beta$ , в котором она существует. Число собственных функций  $N$ , которое имеет автомодельная задача при данных  $\beta$  и  $\sigma$  определяется формулой:

$$\begin{cases} N = [a], & \text{если } a - \text{нецелое,} \\ N = a - 1, & \text{если } a - \text{целое.} \end{cases} \quad a = (\beta - 1)/(\beta - \sigma - 1), \quad (32)$$

Последовательность точек бифуркации, определяющих правую границу области существования собственных функций, является бесконечной последовательностью, сходящейся к точке  $\beta_\infty = \sigma + 1$ , которая является общей левой границей интервалов существования всех собственных функций в LS-режиме. Исследования показали, что при приближении к правой границе интервала существования, амплитуда отклонения от гомотермического решения СФ  $y_j$  уменьшается и стремится к нулю при  $\beta \rightarrow \beta_j$  (фиг. 3а), а значение  $\xi_{ff}(\beta)$ , где функция  $y_j = 10^{-5}$ , стремится к бесконечности (фиг. 3б). При  $\beta \rightarrow \beta_j$  СФ  $y_j$  все сильнее и сильнее приближается к гомотермическому решению, и в точке бифуркации сливается с пространственно-однородным решением.

Рассмотрим поведение СФ при приближении к точке бифуркации  $\beta = \sigma + 1$ , в которой имеет место S-режим. Как было сказано выше, автомодельная задача при  $\beta = \sigma + 1$  имеет решение (16), которое в силу автономности автомодельного уравнения можно рассматривать, как периодическое. Представим его в виде функций  $y_{sj}^{(1)}$ , имеющих максимум при  $\xi = 0$ , определенных на отрезках  $0 \leq \xi \leq \xi_{ff} = j \times 0.5L_T$  и имеющих  $j$  полупериодов; и аналогичных функций  $y_{sj}^{(2)}$ , сдвинутых на полпериода, то есть равных нулю в точке  $\xi = 0$ . Исследования показали, что при  $\beta \rightarrow \sigma + 1$  амплитуда отклонений максимумов и минимумов СФ от гомотермического решения увеличивается: минимумы стремятся к нулю, а максимумы – к амплитуде СФ  $\Theta_S$  (16). В S-режиме автомодельная задача определена на отрезке, а в LS – режиме на полубесконечной прямой. Расчеты показали, что при  $\beta \rightarrow \sigma + 1$  «хвост» собственной функции  $y_j(\xi)$  в точках  $\xi > \xi_{ff}$  приближается к нулю, в то время как внутри отрезка  $[0, \xi_{ff}]$  СФ приближается к автомодельному решению  $\Theta_S$  в S-режиме. Причем четные собственные функции  $y_{2j}$  приближаются к автомодельному решению  $y_{sj}^{(2)}$ , а нечетные СФ к решению  $y_{sj}^{(1)}$ , и в точке бифуркации  $\beta = \sigma + 1$  сливаются с этими решениями внутри отрезков  $[0, \xi_{ff}]$ , а вне отрезков «хвост» СФ сливается с нулевым стационарным решением и исчезает (см. фиг. 3).

### 2.3. Бифуркационный анализ автомодельных решений в случае цилиндрической и сферической геометрии

Автомодельная задача при  $\beta > \sigma + 1$  в сферической и цилиндрической геометрии и распределенной плотности имеет спектр решений, число которых зависит от параметров  $\beta$ ,  $\sigma$ ,  $\nu$  и  $k$ . Старшие собственные функции, имеющие несколько экстремумов, в области своей немонотонности также как в одномерном случае совершают колебания около гомотермического решения и описываются приближенно линейризованным уравнением (28). Если эти колебания невелики, то линейное приближение дает хорошие результаты (см. фиг. 4, на котором представлены двенадцать СФ (сплошная линия) и линейное приближение (штриховая линия) для  $\beta = 3.05$ ,  $\sigma = 2$ ,  $\nu = 1$ ,  $k = 0$ ).

Кроме собственных функций существующих на полубесконечной прямой и удовлетворяющих условию (9) в центре симметрии (назовем их обычными), автомодельная задача при  $\nu = 1$  и  $\nu = 2$  имеет решения, определенные на интервале  $[\xi_f, \infty)$ , то есть имеющие фронт слева (8) (см. вторую, четвертую и шестую СФ на фиг. 4 и на фиг. 5 для  $\sigma = 2$ ,  $\nu = 2$ ,  $k = 1$ ). Существование СФ с нулевыми участками в центре при  $\xi \in [0, \xi_f]$  было впервые установлено в [20].

Продолжим автомодельные решения в сферической и цилиндрической геометрии по параметру  $\beta$ , и проведем их бифуркационный анализ, как это было сделано для случая  $\nu = 0$ ,  $k = 0$ . Большая часть расчетов проводилась для  $k = 0$  и  $k = 1$  и нескольких значений  $\sigma$ . Было показано, что все обычные СФ  $y_j(\xi)$  кроме первой, существуют в интервале:

$$\beta_j^*(\nu, k) < \beta < \beta_j, \quad j = 2, 3, \dots, \quad (33)$$

где  $\sigma + 1 < \beta_{0j} \leq \beta_j^*$ , а  $\beta_j = \sigma + 1 + \sigma/(j-1)$ .

Первая СФ так же как в одномерном случае существует при всех  $\beta > \sigma + 1$ , вырождаясь при  $\beta = \sigma + 1$  в единственную СФ в S-режиме, определенную на отрезке  $[0, 0.5L_T]$ . При приближении к правой границе области своего существования старшие СФ совершают колебания со все меньшей и меньшей амплитудой около гомотермического решения, а значения точки  $\xi_{fj}$ , в которой функция равна  $10^{-5}$  при этом увеличиваются, и при  $\beta = \beta_j - 0$  СФ сливаются с гомотермическим решением (см. бифуркационные диаграммы на фиг. 6 для первых пяти СФ при  $\sigma = 2$ ,  $\nu = 1$ ,  $k = 0$ ,

обозначения те же, что и на фиг. 3). Правая граница области существования СФ с номером  $j$  не зависит ни от геометрии области, ни от показателя плотности  $\kappa$  и определяется формулой (33). Однако в сферической геометрии и распределенной плотности часть СФ из интервала (33) должна быть исключена из-за требования стремления потока к нулю на бесконечности (18). При  $\kappa \rightarrow 2$  и  $\nu = 2$  область существования решений в  $LS$ –режиме стремится к нулю.

Рассмотрим теперь, что происходит с автомоделным решением при уменьшении параметра  $\beta$ . Здесь эволюция четных СФ, имеющих в начале координат минимум, и нечетных СФ, имеющих максимум при  $\xi = 0$ , различается. При уменьшении  $\beta$  абсолютный минимум четной СФ, который находится в точке  $\xi = 0$  уменьшается и при некотором значении  $\beta_{2j}^*$  достигает нуля  $\Theta_{2j}(0) = 0$ . (см. фиг. 6 и фиг. 7 для  $\sigma = 2, \nu = 1, \kappa = 0$ ). При дальнейшем уменьшении параметра  $\beta$  четная СФ отодвигается от начала координат, превращаясь в СФ с нулевой температурой в центре симметрии (назовем ее структурой с «дыркой») На фиг. 6 эти точки бифуркации обозначены ромбиками. Первой (при большем значении  $\beta$ ) вырождается в структуру с дыркой вторая СФ, затем четвертая и т.д. Фиг. 7а и 7б демонстрируют превращение обычных СФ  $y_2$  и  $y_4$  в структуры с дыркой при уменьшении параметра  $\beta$ . Чем ближе  $\beta$  к  $\sigma + 1$  тем больше собственных функций с дыркой уже образовалось и тем дальше младшие СФ отодвинулись от центра (см. фиг. 5а и 5б). При  $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$  все локальные минимумы четной СФ  $\Theta_{2j}$  с дыркой опускаются до нуля, и она приближается на бесконечности к одномерной СФ  $\Theta_{s,j}(\xi)$  (16) имеющей  $j$  периодов.

В случае распределенной плотности эволюция четной СФ происходит аналогичным образом; сначала она превращается в структуру с дыркой, затем отодвигается от центра. СФ преобразованного уравнении (25)  $\Theta_{2j}''(z)$  при  $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$  стремится к СФ S–режима при  $\nu = 0, \kappa = 0$ . Из анализа преобразования (24), следует, что в среде с распределенной плотностью структуры с дыркой растягиваются.

Теперь рассмотрим эволюцию старших нечетных СФ  $\Theta_{2j+1}(\xi)$  с изменением параметра  $\beta$ . При уменьшении  $\beta$  амплитуда колебаний около гомотермического решения увеличивается и абсолютный минимум СФ, который находится в точке  $\tilde{\xi}_{2j+1}$ , ближе всех других минимумов к началу координат, стремится к нулю. При этом одна

часть СФ  $\Theta_{2j+1}(\xi)$ , расположенная на отрезке  $[0, \tilde{\xi}_{2j+1}]$  приближается к первой СФ  $\Theta_1(\xi)$ , а другая часть, расположенная на отрезке  $[\tilde{\xi}_{2j+1}, \infty)$  стремится слиться со структурой с дыркой  $\Theta_{2j}(\xi)$ , которая образовалась раньше и к этому значению параметра отодвинулась от центра на расстояние  $\xi_{f2j} \cong \tilde{\xi}_{2j+1}$ . В точке бифуркации  $\beta_{2j+1}^*$  (на фиг. 6 они отмечены кружками) нечетная СФ  $\Theta_{2j+1}(\xi)$  прекращает свое существование, распавшись на первую СФ  $\Theta_1(\xi)$  и четную  $\Theta_{2j}(\xi)$  структуру с дыркой (см. фиг. 7в и 7г). Сначала распадается третья СФ, затем пятая и т.д., чем ближе  $\beta$  к  $\sigma + 1$ , тем больше распавшихся нечетных СФ. Чтобы определить число СФ при данных  $\beta$ ,  $\sigma$ ,  $\nu$  и  $k$ , надо из числа СФ для одномерного случая (32) вычесть число распавшихся нечетных СФ. Это число в свою очередь зависит от геометрии области и от плотности при  $\nu = 2$  (при  $\nu = 1$  от плотности не зависит). Например, для  $\sigma = 2$ ,  $\nu = 1$ ,  $k = 0$  при  $3.049 < \beta$  число СФ определяется формулой (32); при  $3.031 < \beta < 3.049$  их на единицу меньше, чем дает формула. В цилиндрической геометрии в случае распределенной плотности области существования СФ  $\Theta_j(\xi)$  такие же как при  $k = 0$ , а сами СФ получаются из СФ при  $k = 0$  преобразованием растяжения (24). В сферической геометрии структуры с дыркой образуются при большем значении  $\beta$  и нечетные СФ распадаются при большем  $\beta$  по сравнению со случаем  $\nu = 1$ . С увеличением показателя плотности  $k$  области существования обычных СФ сильно сужаются

$$\beta_j^*(k_2) > \beta_j^*(k_1), \text{ если } k_2 > k_1, \nu = 2$$

и в спектре все большую долю занимают структуры с дыркой. Если при  $\nu = 1$  структуры с дыркой появляются при  $\beta \rightarrow \sigma + 1$  (так при  $\sigma = 2$ , функция  $\Theta_2$  превращается в структуру с дыркой при  $\beta^* \approx 3.22$ ), то при  $\nu = 2$ ,  $k = 0$   $\beta^* \approx 3.38$ , а при  $\nu = 2$ ,  $k = 1$  структуры с дыркой существуют уже при  $\beta^* \approx 3.45$ .

Таким образом, спектр СФ в сферической и цилиндрической геометрии и распределенной плотности может существенно отличаться от спектра одномерных СФ наличием четных СФ с нулевой областью в центре и отсутствием в спектре некоторых нечетных СФ, начиная с третьей (см. фиг. 4).

### 3. УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Для исследования устойчивости автомодельных решений численно решалась задача Коши для уравнения (1). В качестве начального распределения температуры бралась либо сама СФ – резонансное возбуждение, либо «возмущенная» СФ. В центре симметрии в соответствии с условием (22) при  $k < 1$  ставилось условие Неймана, а на конце отрезка при  $\xi = \xi_f$  ставилось условие III рода – соотношение между температурой и потоком тепла, которое следует из асимптотического разложения (20). Задача решалась с использованием пакета МАТЛАВ 6.5 методом прямых, при котором уравнение с частными производными (1) сводилось к системе ОДУ большого порядка и затем интегрировалось методами для жестких систем. Использовались адаптивные сетки, содержащие от 300 до 2000 точек по пространственной переменной; система ОДУ решалась методами разного порядка аппроксимации (по времени) (от 1 до 5) и разной точности (от  $eps = 10^{-3}$  до  $eps = 10^{-10}$ ). Изменение точности интегрирования и числа точек пространственной сетки почти не оказывало влияния на численное решение задачи, что дало основание сделать вывод о достоверности, полученных численно результатов.

Известно, что автомодельные решения, развивающиеся в режиме с обострением неустойчивы по отношению к малым возмущениям. Малые изменения начального профиля приводят к малому изменению времени обострения  $t_f$ , что в свою очередь приводит к сколь угодно большому различию между решениями, начиная с некоторого момента времени близкого к  $t_f$ . Однако, эти решения могут обладать структурной устойчивостью, в смысле выхода на автомодельный режим [15], [17]. Для исследования структурной устойчивости СФ проводилась так называемая автомодельная обработка решения задачи Коши  $T(r, t)$  [17], [24]:

$$\bar{\Theta}(\xi, t) = g(t)^{-1} T(r \cdot \psi(t), t), \quad (34)$$

где функции  $g(t)$  и  $\psi(t)$  определены автомодельными зависимостями (5). Понятно, что автомодельные решения и гомотермическое решение являются стационарами представления (34). Структурно устойчивым решением называется устойчивый стационар автомодельной обработки (34). Для определения структурной устойчивости в численных расчетах в каждый момент времени температура  $T(r, t)$  в каждой точке отрезка  $r(t)$  делилась на максимум распределения температуры  $T_{\max}$ , а значение  $r(t)$  –

на координату максимума  $r_{\max}(t)$ . (Если максимум находился в начале координат, то значение  $r(t)$  делилось на координату полуширины  $r_{1/2}(t)$  или любую другую выделенную точку.) Если автомодельное решение обладает структурной устойчивостью, то полученный таким образом нормированный профиль решения не изменяется со временем. Более того, если в начальный момент времени взять произвольный профиль, то в случае структурной устойчивости автомодельного режима будет наблюдаться сходимость нормированных решений к автомодельному профилю.

Проведенные исследования показали, что в любой геометрии и любом распределении плотности первая СФ, имеющая один максимум в центре симметрии является структурно устойчивым автомодельным решением. В сферической и цилиндрической геометрии область ее притяжения ограничена некоторым радиусом  $R_c$ . Другим структурно устойчивым решением найденным впервые в работе является вторая собственная функция с нулевой областью в центре симметрии – структура с дыркой  $\Theta_2$ . Она описывает растущую в режиме с обострением и медленно смещающуюся (по сравнению со скоростью роста температуры) к центру симметрии тепловую структуру в виде сферического или цилиндрического слоя. Исследования показали, что структура с дыркой  $\Theta_2$  обладает довольно широкой областью притяжения. На фиг. 8 показана сходимость нормированных решений задачи Коши при нерезонансном начальном распределении к СФ  $\Theta_2$  при  $\beta = 3.05$ ,  $\sigma = 2$ ,  $\nu = 1$ ,  $k = 0$ .

Таким образом, рассматриваемая задача имеет либо одно структурно устойчивое автомодельное решение, первую СФ, либо два структурно устойчивых решения – первую и вторую СФ, если при данном наборе параметров вторая СФ имеет нулевую область в центре. Подробное исследование эволюции нерезонансных возмущений выходит за рамки настоящей работы. Отметим только, что при  $t \rightarrow t_f$  в расчетах всегда наблюдался выход на автомодельный режим, или на первую СФ для данных значений параметров, или на структуру с дыркой, или же на первую СФ для тех же значений  $\beta$  и  $\sigma$ , но для случая  $\nu = 0$ ,  $k = 0$ . Последний случай имел место, когда начальное возмущение в виде сферического или цилиндрического слоя ставилось достаточно далеко от центра или от второй СФ с дыркой. Тогда интенсивное горение в  $LS$  – режиме происходит во все более и более сокращающейся области, в которой эффекты, связанные с геометрией и неоднородностью среды, становятся несущественными, а медленное смещение к центру области горения по сравнению со

скоростью роста температуры не позволяет приблизиться к области притяжения первой или второй СФ (см. также [18]). Отметим, что в настоящей работе не рассматривались параметры, при которых наряду с LS-режимом существует обычный HS-режим (18), поэтому не возникал вопрос о сверхкритических начальных возмущениях [25].

Исследования, проведенные в настоящей работе и ранее, показали, что старшие немонотонные СФ не являются структурно устойчивыми автомодельными решениями. Горение среды, вызванное заданием начального профиля в соответствии со старшей СФ, только некоторое время следует автомодельному закону, затем один из максимумов начинает расти быстрее остальных, и процесс горения вырождается в горение одной структуры с одним максимумом. Однако, время следования автомодельному закону может быть в некоторых случаях очень велико, почти все время существования решения, что позволяет говорить о метастабильной устойчивости. Понятие метастабильной устойчивости широко используется в физике, адекватно описывая наблюдаемые явления. Например, возбужденные состояния атомов или ядер являются метастабильно устойчивыми. Решения, развивающиеся в режиме с обострением, существуют лишь конечное время и имеют свою специфику развития: сначала растут очень медленно, затем вблизи момента обострения растут очень быстро. Для них разумно по отношению к проблеме устойчивости все решения разделить на три класса: структурно устойчивые, метастабильно устойчивые и неустойчивые. К метастабильно устойчивым решениям отнесем все стационары автомодельного представления (34), которые не являются устойчивыми. В автомодельной системе координат (34) стационары являются особыми траекториями, к которым либо притягиваются другие траектории, либо отходят от них с нулевой скоростью, что является причиной метастабильной устойчивости решения не существующего в целом. Таким образом, гомотермическое решение и все старшие СФ в LS-режиме являются метастабильно устойчивыми решениями. Время метастабильной устойчивости определяется временем следования автомодельному закону с заданной точностью, которое мы будем оценивать численно по росту начального автомодельного профиля. Разные СФ обладают разной метастабильной устойчивостью. Проведенные расчеты выявили, что метастабильная устойчивость старших собственных функций зависит от параметров, от их номера и от четности номера. Нечетные СФ могут сохранять свою структуру при росте температуры в 10-20 раз, в то время как четные следуют автомодельному закону при росте температуры от нескольких раз до нескольких сотен раз. На фиг. 9 а,б,в представлена эволюция нормированных профилей

второй СФ в одномерном случае ( $k=0, \sigma=2$ ) при разных значениях  $\beta$ . Видно, что при больших значениях  $\beta$  рост температуры в центре сильно отстает от роста температуры в максимуме (рис. 9а); СФ  $\Theta_2$  в этом случае следует автомодельному закону при росте температуры в 3 – 5 раз. При уменьшении значения  $\beta$  устойчивость СФ увеличивается (фиг. 9 б, в). При  $\beta \rightarrow \sigma+1$  вторая СФ может обладать огромной метастабильной устойчивостью; на фиг. 9 в, показано, что при росте температуры в 3800 раз отклонение от автомодельного профиля составляет несколько процентов. В сферической и цилиндрической геометрии метастабильная устойчивость второй СФ при уменьшении значения  $\beta$  также повышается, и при бифуркационном значении параметра она превращается в структурно устойчивое автомодельное решение – структуру с дыркой. Старшие четные СФ (четвертая, шестая и т.д.) при уменьшении параметра  $\beta$  также становятся более устойчивыми и могут сохранять свою структуру при росте температуры в десятки и сотни раз. На фиг. 10а и 10б представлена эволюция четвертой и шестой СФ при  $\sigma=2, \beta=3.05, \nu=1, k=0$ . Автомодельная обработка показывает, что СФ  $\Theta_4$  сохраняет свою структуру при росте температуры примерно в 380 раз, а СФ  $\Theta_6$  - при росте температуры в 100 раз. При  $t \rightarrow t_f$  наблюдается выход на автомодельный режим, описываемый структурно устойчивой СФ  $\Theta_2$ . Отметим, что вырождение шестой СФ происходит поэтапно, сначала она становится близкой к  $\Theta_4$ , а затем выходит на автомодельный режим, описываемый СФ  $\Theta_2$ . Таким образом, хотя СФ  $\Theta_4$  не является структурно устойчивым решением, здесь она выступает как промежуточная асимптотика [22].

Рассмотрим эволюцию старших нечетных СФ. Расчеты показали, что они не обладают высокой метастабильной устойчивостью и при всех значениях параметров вырождаются в центральную первую СФ (см. фиг. 9г-е). Это происходит даже тогда, когда абсолютный максимум автомодельного распределения температуры, отстоящий от центра, превосходит локальный максимум, находящийся в центре (см. фиг. 9г, е). По-видимому, центральный максимум в нечетной СФ близок по форме к структурно устойчивой первой СФ, на которую и «сваливается» решение.

Проведенные в настоящей работе исследования обнаружили, что эволюция СФ в LS-режиме при больших значениях  $\beta$  и при близких к  $\sigma+1$  качественно различается. При больших значениях  $\beta$  у нечетных СФ наблюдается преимущественный рост

максимума, находящегося в центре симметрии, и «поглощения» им остальных максимумов, и затем выход на первую СФ при  $t \rightarrow t_f$  (фиг. 9г и 9е). При  $\beta$  близких к  $\sigma + 1$  нечетная СФ распадается на первую СФ и оставшуюся часть, которые горят независимо, каждая со своим моментом обострения (фиг. 9д и 10в, г); причем у первой СФ момент обострения меньше, чем у «отколовшейся» части (см. фиг. 9д). В сферической и цилиндрической геометрии, при  $\beta$  близких к  $\sigma + 1$  происходит распад нечетной СФ на первую и четную СФ. На фиг. 10в показано, как третья СФ расщепляется на две структурно устойчивые СФ – первую и вторую с дыркой, а на фиг. 10г представлены результаты расчетов эволюции пятой СФ, которая расщепляется на первую СФ и близкую к четвертой СФ.

Метастабильная устойчивость старших СФ особенно ярко проявляется по отношению к эволюции нерезонансных возмущений. В работе СФ подвергались деформации и ставились в качестве начальных данных. Расчеты показали, что при нерезонансных начальных данных перестройка профиля температуры начинается сразу, и процесс горения первоначально имевший несколько максимумов вырождается в горение в виде простой структуры с одним максимумом.

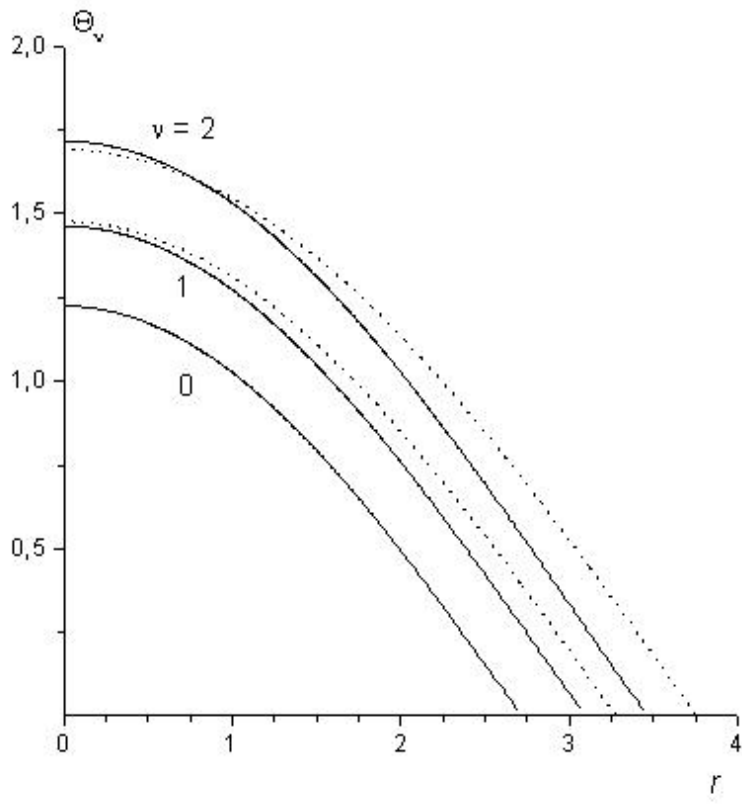
## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматриваемые собственные функции автомодельной задачи представляют собой нестационарные диссипативные структуры. Спектр автомодельных решений определяет весь конечный набор структур в нелинейной среде, способных развиваться согласованно с одним моментом обострения длительное время. Сложную структуру можно рассматривать как объединение простых. В [23], [24] были впервые сформулированы принципы объединения простых структур в сложные и условия существования сложной организации в нелинейной среде. Проблемы сосуществования структур, находящихся на разных этапах развития и согласование темпов роста является актуальнейшей задачей нашего времени [8]. Найденные в работе области высокой метастабильности старших СФ, при которых они сохраняют свою структуру при росте в сотни раз, позволяет говорить о коэволюции простых структур, объединенных в сложную, и открывает новые возможности приложений исследуемого уравнения нелинейной теплопроводности.

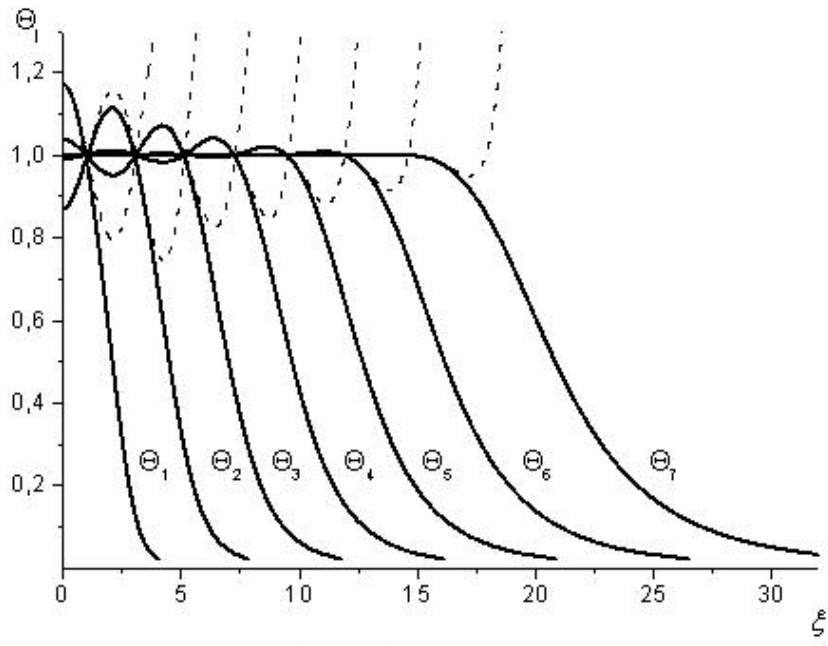
## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Режимы с обострением. Эволюция идеи. М.: Наука. 1998.
2. Galaktionov V. A., Vazquez J. L. The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations. //J. Discrete and continuous dynamical systems. 2002. V.8. № 2. P. 399-433.
3. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений //М.: Наука. 1987.
4. Galaktionov V. A., Guan L. V. A stability technique for evolution partial differential equations. A dynamical system approach: Boston-Bassel-Berlin: Birkhauser. 2004. V. 56
5. Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью //Письма в ЖЭТФ. 1977. Т.26. Вып.9. С. 620-624.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Заглязьминский Л. А. и др. Нелинейный эффект образования самоподдерживающегося высокотемпературного электропроводного слоя газа в нестационарных процессах магнитной гидродинамики // Док. АН СССР, 1967, Т.173, №4, 808-811.
7. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Потапов А.Б. Нестационарные структуры, динамический хаос, клеточные автоматы // Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур. М.: Наука, 1996. С. 95-164.
8. Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Основания синергетики. СПб.: Алетейя, 2002.
9. Лобанов А.И, Старожилова Т.К. Нестационарные структуры в модели свертывания крови, в кн. Новое в синергетике: Взгляд в третье тысячелетие. М.: Наука, 2002.С. 346-367.
10. Кириченко Н.А. Локализованные нестационарные структуры в задачах лазерной термохимии //Режимы с обострением. Эволюция идеи. М.: Наука, 1998. С. 217-230.
11. Белавин В.А., Курдюмов С.П. Режимы с обострением в демографической системе: Сценарий усиления нелинейности. //Ж. Вычисл. Матем. и Матем. Физ. 2000. Т. 40. №2. С.238-251.
12. Капица С.П. Феноменологическая теория роста населения Земли // Успехи физ. наук. 1996. Т.166, №1. С. 63-80.
13. . Капица С.П., Курдюмов С.П, Малинецкий Г.Г.. Синергетика и прогнозы будущего. М.: Эдиториал УРСС, 2001.

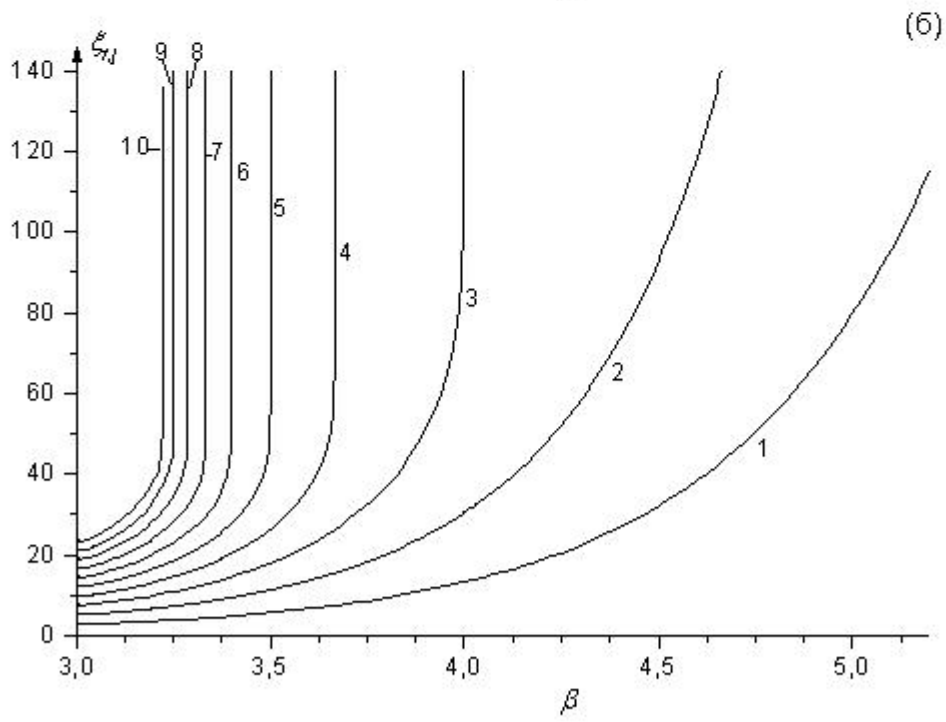
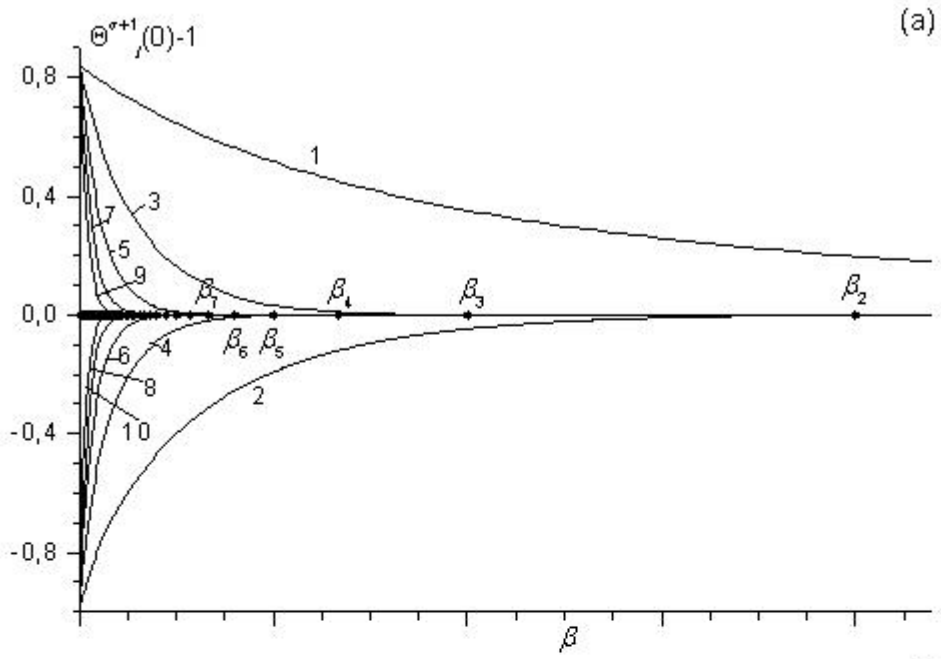
14. Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемным источником тепла // Док. АН СССР. 1976. Т. 227. №2. С. 321.
15. Самарский А.А., Еленин Г.Г., Змитренко Н.В., др. Горение нелинейной среды в виде сложных структур // Док. АН СССР. 1977. Т. 237. № 6. С. 1330-1333.
16. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Повещенко и др. Взаимодействие диссипативных тепловых структур в нелинейных средах // Док. АН СССР. 1980. Т.251. №4. С.836-840.
17. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А.А. Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1983. Т. 23. № 2. С. 380-390.
18. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г. Диссипативные структуры в средах с распределенными параметрами: Препринт № 16. М.: ИПМатем. АН СССР. 1979.
19. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г. Самарский А. А. Диссипативные структуры в неоднородной нелинейной горячей среде // Док. АН СССР. 1980. Т..251. №.3. С. 587-590.
20. Димова С. Н., Касичев М. С., Курдюмов С.П. Численный анализ собственных функций горения нелинейной среды в радиально-симметричном случае // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. № 11. С. 1683-1704.
21. Галактионов В. А. Доказательство локализации неограниченных решений нелинейного параболического уравнения  $u_t = (u^y u_x)_x + u^e$  //Дифференц. ур-ния, 1985. Т. 21. № 1. С. 15-23.
22. Barenblatt G. I. Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics. Cambridge Texts Appl. Math. Cambridge: Univ. press, 1996.
23. Курдюмов С. П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации: Препринт № 29. М.: ИПМ АН СССР. 1979.
24. Kurdumov S. P. Evolution and self-organization laws in complex systems //Int. J. Modern Phys. C1. 1990. P.299-327.
25. Еленин Г. Г., Плохотников К. Э. Об одном способе качественного исследования одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности с нелинейным источником тепла: Препринт № 91. М.: ИПМ АН СССР. 1977.



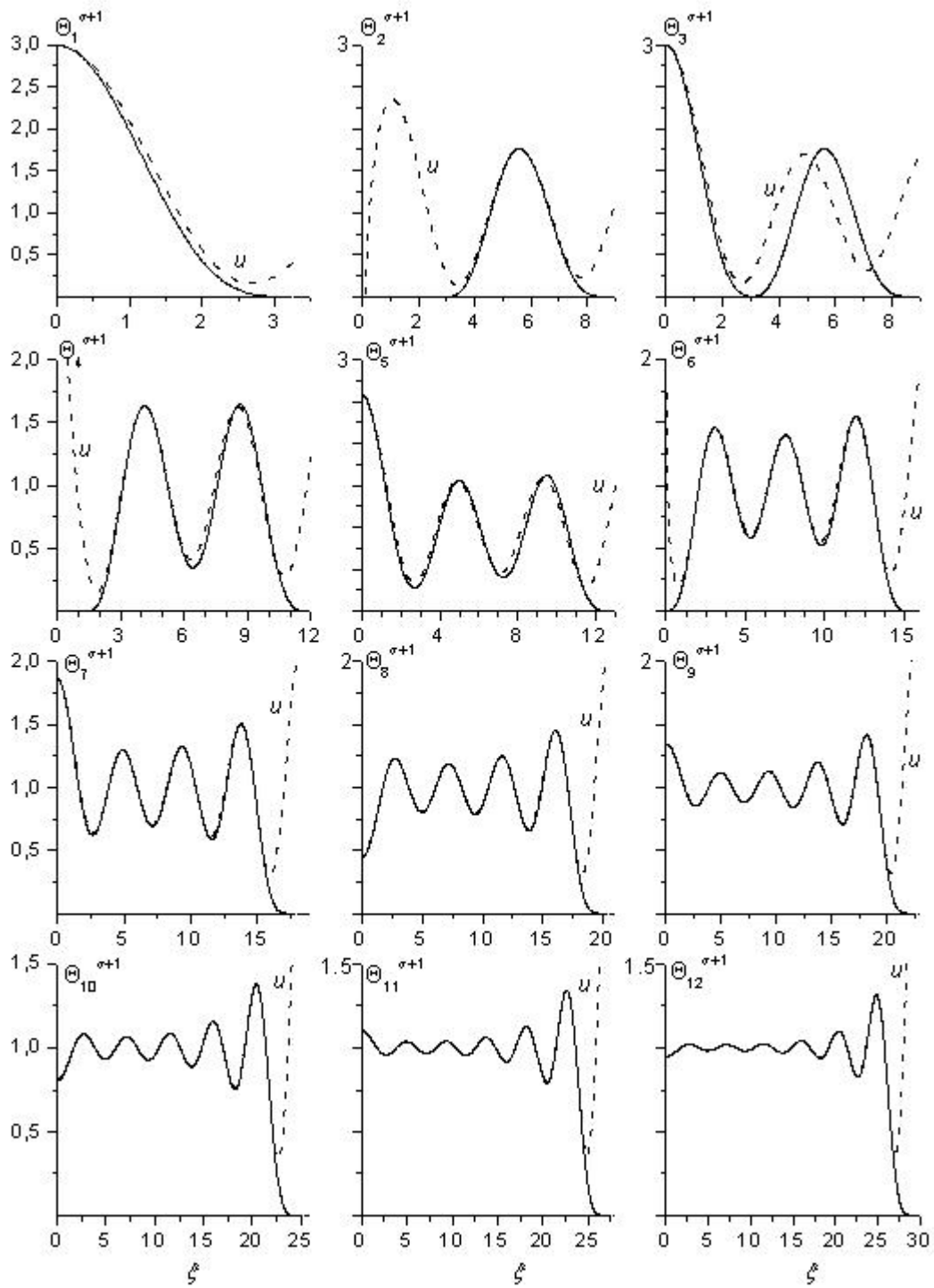
Фиг. 1



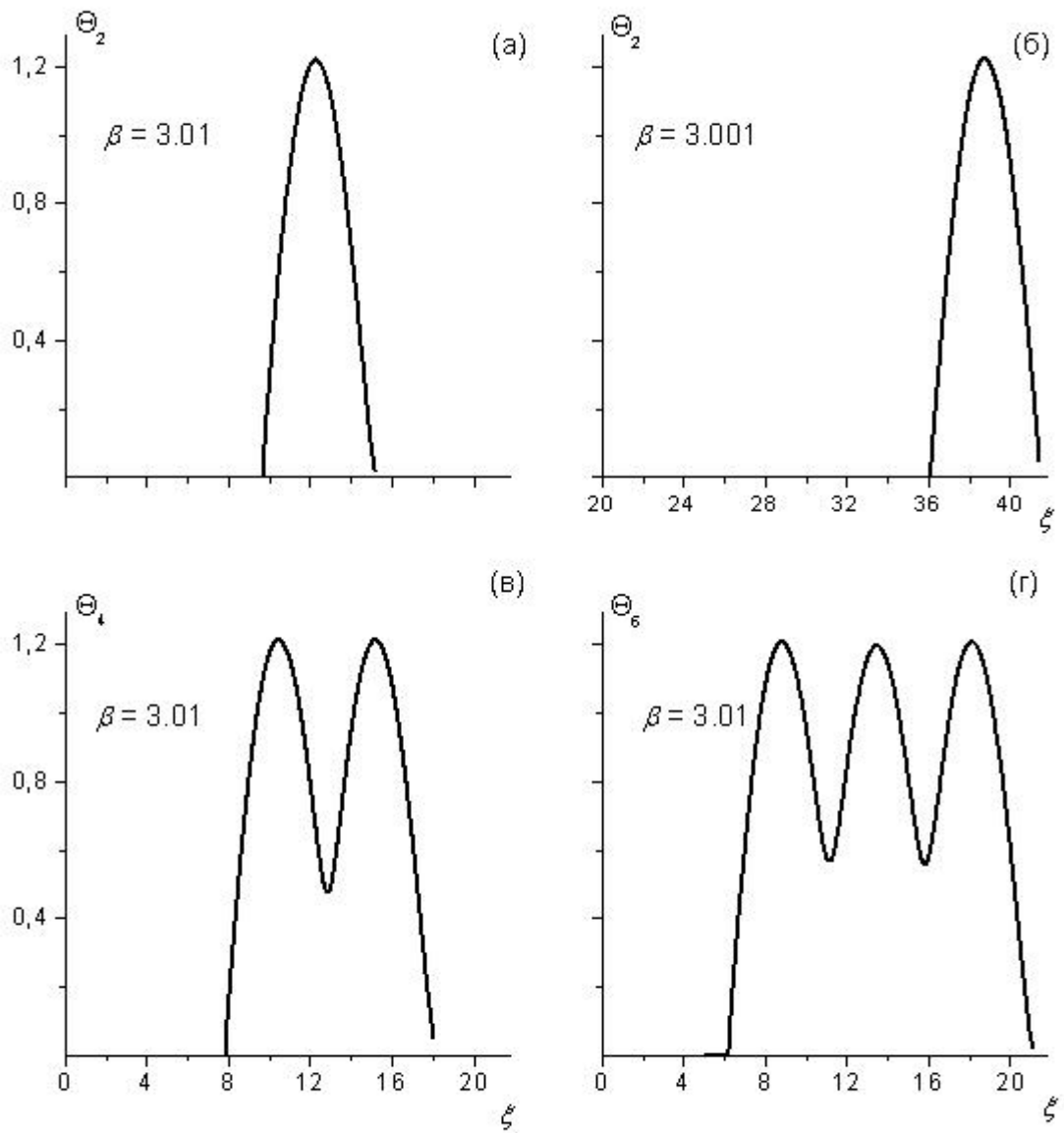
Фиг. 2



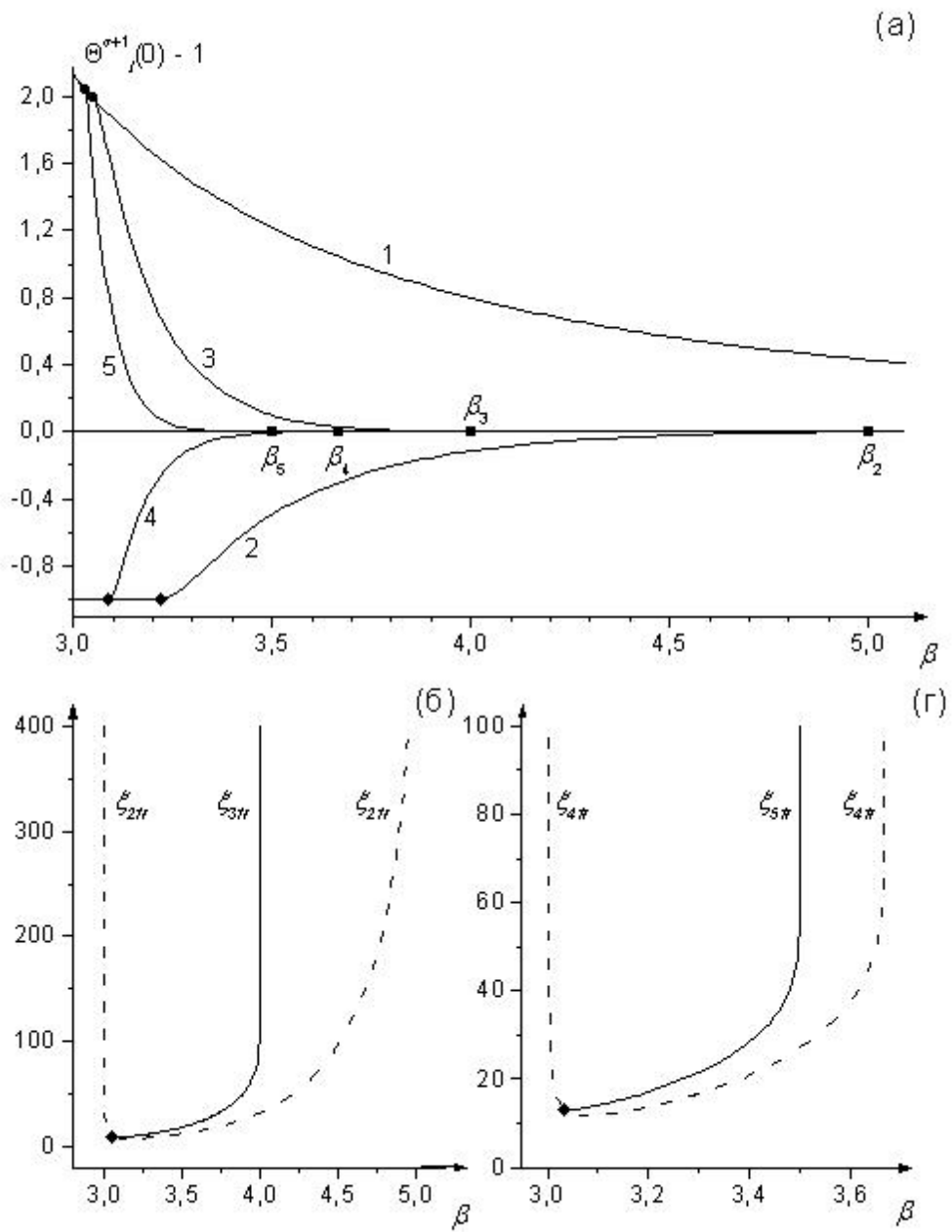
Фиг. 3



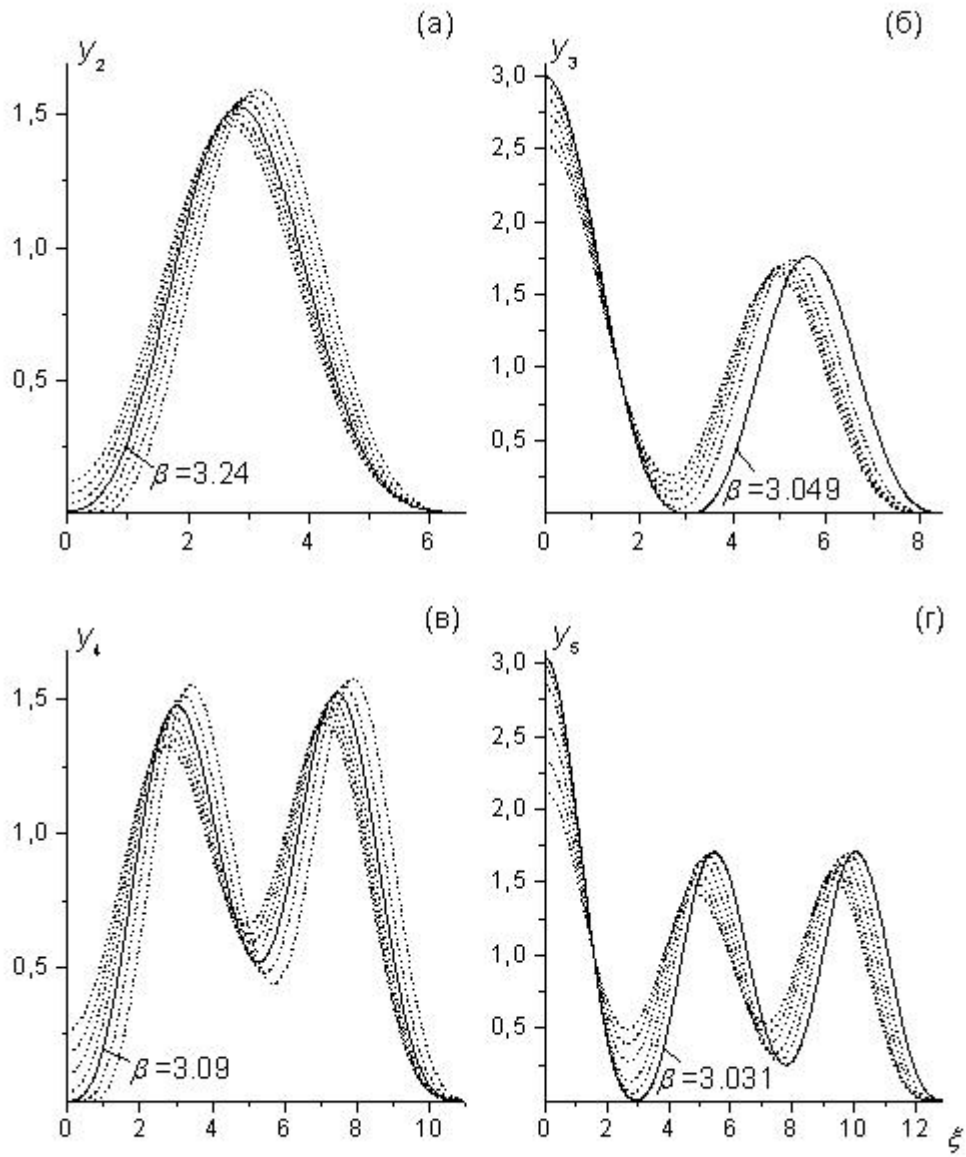
Фиг. 4



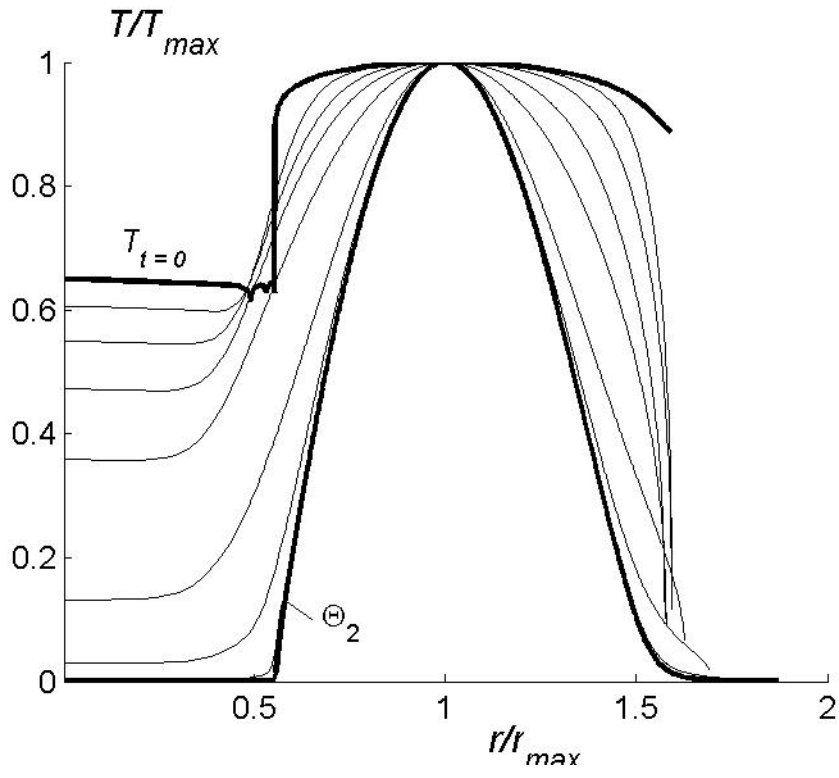
Фиг. 5



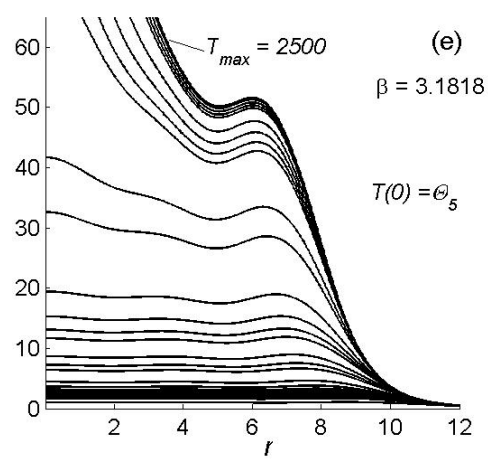
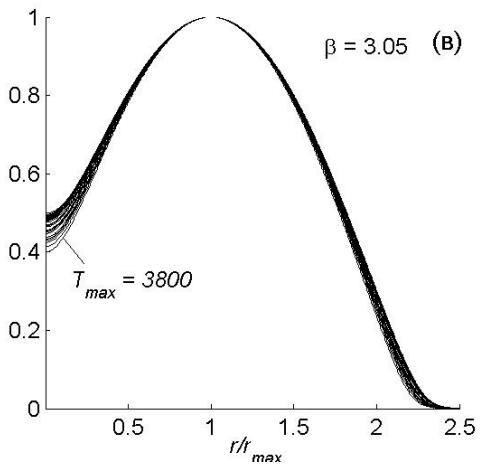
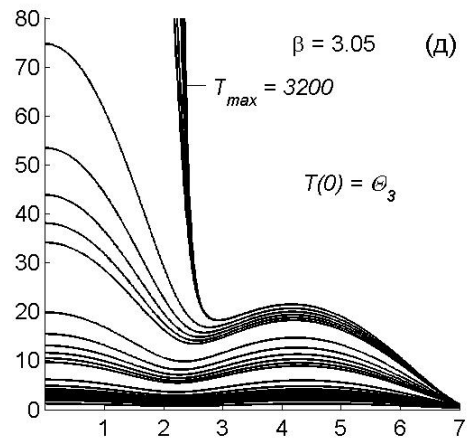
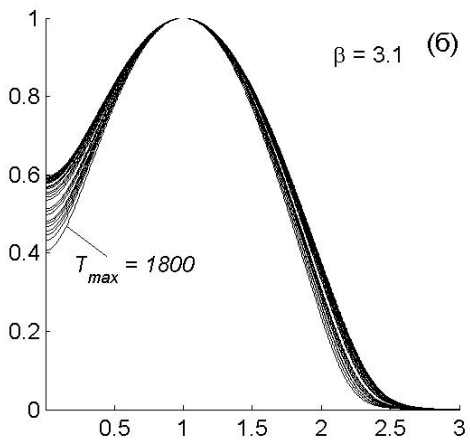
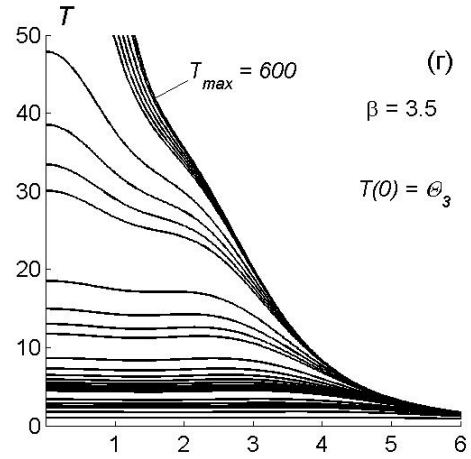
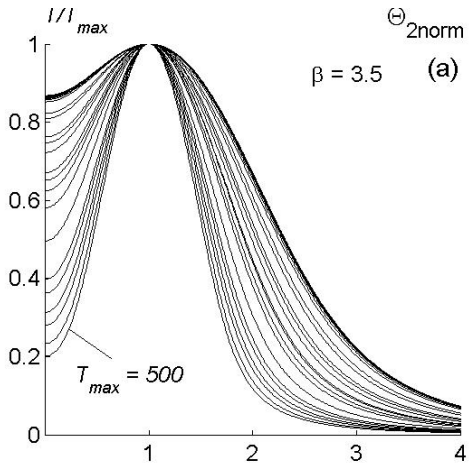
Фиг. 6



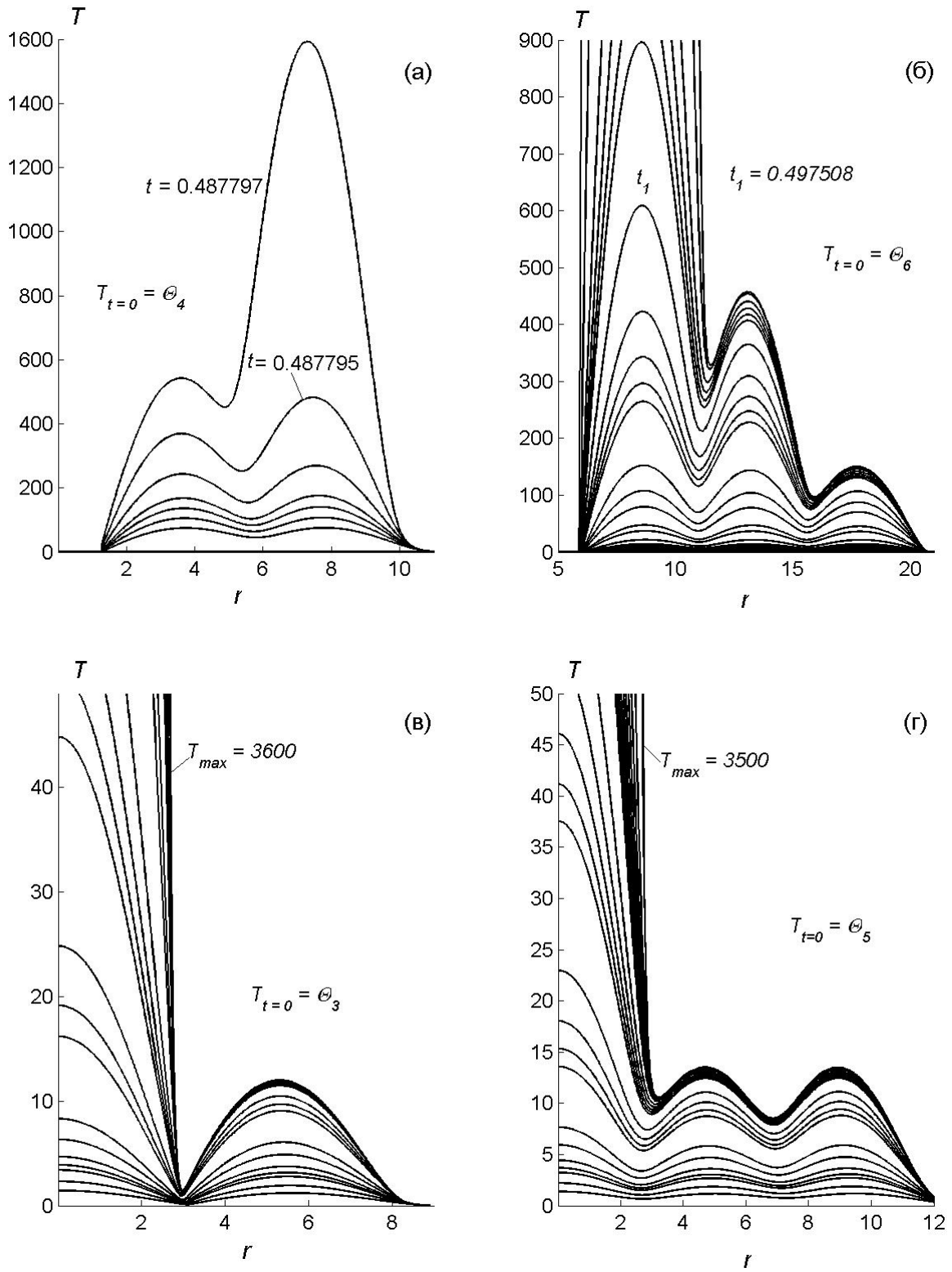
Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10