

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.946:536.24

### СПЕКТР ДИССИПАТИВНЫХ СТРУКТУР, РАЗВИВАЮЩИХСЯ В РЕЖИМЕ С ОБОСТРЕНИЕМ<sup>1</sup>

Е. С. КУРКИНА, член-корреспондент РАН С. П. КУРДЮМОВ

1. С помощью вычислительных методов продолжения по параметру и проведения бифуркационного анализа исследован спектр собственных функций автомодельной задачи для нелинейного уравнения теплопроводности с объемным источником тепла. Данная спектральная задача может иметь неединственное решение. Впервые установлено число с.ф. в зависимости от значений параметров. Автомодельные решения развиваются в режиме с обострением [1-4] и представляют собой нестационарные диссипативные структуры, локализованные в пространстве. Интерес к режимам с обострением возник около тридцати лет назад в связи с изучением процессов термоядерного горения в высокотемпературной плазме [4,5]. В настоящее время нестационарные диссипативные структуры нашли много новых приложений в разных областях науки: физике, медицине, социологии и др. [6,8]. В работе исследована устойчивость автомодельных решений. Найдены новые структурно устойчивые и метастабильно устойчивые с.ф. Последние следуют автомодельному закону почти все время обострения и сохраняют свою сложную структуру при росте температуры в сотни раз.

2. Рассматривается квазилинейное уравнение теплопроводности с источником:

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^n \chi_0 T^\sigma \frac{\partial T}{\partial r} \right) + q_0 \rho T^\beta, \quad (1)$$

где  $E = c_V T$ , а  $c_V, \chi_0, q_0 > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\beta > 1$  – заданные параметры;

в плоской ( $n = 0$ ), цилиндрической ( $n = 1$ ) и сферической геометрии ( $n = 2$ );

в среде с распределенной плотностью:  $\rho = Ar^{-k}$ ,  $0 \leq k < 2$ .

Горение инициируется заданием на полупрямой  $0 \leq r < \infty$  некоторого начального ограниченного распределения температуры  $T(r, 0) = T_0(r) \leq M < \infty$ .

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проекты № 01-06-80204, № 02-01-00844.

Исследуются автомодельные решения уравнения (1) развивающиеся в режиме с обострением. Подставляя в уравнение (1) выражение

$$T(r, t) = g(t)\Theta(\xi), \quad \xi = \frac{r}{\psi(t)}, \quad (2)$$

определяем вид функций  $g(t)$ ,  $\psi(t)$ :

$$g(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^m, \quad \psi(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n, \quad m = -\frac{1}{\varepsilon - 1}, \quad n = \frac{\beta - \sigma - 1}{(\varepsilon - 1)(-k + 2)}, \quad (3)$$

и вид автомодельного уравнения относительно функции  $\Theta(\xi)$ :

$$\frac{1}{\xi^n} \frac{\partial}{\partial r} \left( \xi^n \Theta^y \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) = -\frac{m}{\tau} \xi^{-k} \Theta + \frac{n}{\tau} \xi^{-k+1} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - \xi^{-k} \Theta^\varepsilon, \quad (4)$$

где  $\tau > 0$  – произвольный параметр обобщенного разделения переменных (2), имеющий смысл времени обострения [9-11].

Уравнение (4) имеет два пространственно-однородных решения:  $\Theta(\xi) \equiv 0$  и

гомотермическое 
$$\Theta_H = \left( \frac{1}{(\varepsilon - 1)\tau} \right)^{\frac{1}{\varepsilon - 1}}. \quad (5)$$

Ищутся решения уравнения (4), удовлетворяющие обычным граничным условиям на фронте тепловой волны (по нулевому фону)

либо при  $\xi = \xi_f$ : 
$$\xi^n \Theta^y \frac{d\Theta}{d\xi} \Big|_{\xi = \xi_f} = 0, \quad \Theta \Big|_{\xi = \xi_f} = 0, \quad (6)$$

либо при  $\xi \rightarrow \infty$ : 
$$o^y \Theta^y \frac{d\Theta}{do} \Big|_{o \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \Theta \Big|_{o \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad (7)$$

и в центре симметрии при  $\xi = 0$ :

$$\xi^n \Theta^y \frac{d\Theta}{d\xi} \Big|_{\xi = 0} = 0, \quad \Theta \Big|_{\xi = 0} < \infty. \quad (8)$$

Краевая задача (6)–(8) для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (4) является задачей на собственные значения (с. з.)  $\tau$  и собственные функции  $\Theta(\xi, \tau)$ . Цель настоящей работы заключается в исследовании спектра с.ф. в зависимости от значений параметров. Ранее было установлено [9-11], что спектр с. з. непрерывный, и с. ф. отвечающие разным с. з. связаны преобразованием подобия. Это свойство позволяет зафиксировать любое удобное значение  $\tau > 0$  и исследовать спектр с. ф., отвечающий одному  $\tau$ . Положим  $\tau = 1/(\beta - 1)$ , тогда  $\Theta_H = 1$ .

Уточним условие (8). Главные члены разложения решения при  $\xi \rightarrow 0$  имеют вид:  $\Theta(\xi) \approx C_0 + C_1 \xi^{-k+2} + \dots$ ,  $C_0 \neq \Theta_H$ ,  $C_0 \neq 0$ . Отсюда следует, что  $\Theta'_\xi(0) = 0$  при  $0 \leq k < 1$ , а при  $1 < k < 2$  производная в центре симметрии обращается в бесконечность.

В [4,11] было установлено, что в зависимости от соотношения между показателями  $\beta$  и  $\sigma$  поставленная задача имеет три типа автомодельных режима с обострением: HS, S и LS. **HS-режим** реализуется при  $1 < \beta < \sigma + 1$  и представляет собой тепловую волну, амплитуда и фронт которой увеличиваются в режиме с обострением. **S-режим** реализуется при  $\beta = \sigma + 1$ , и представляет собой нестационарную диссипативную структуру, локализованную на фундаментальной длине  $L_T$ . Внутри области локализации температура растет в режиме с обострением, а вне ее остается равной нулю. При  $\beta \leq \sigma + 1$  задача (4), (5), (7) имеет единственную собственную функцию, монотонно убывающую на отрезке  $[0, o_f]$  с максимумом в центре симметрии ( $\Theta(0) > \Theta_H$ ). В случае  $\nu = 0$ ,  $k = 0$ ,  $\beta = \sigma + 1$  получено аналитическое решение [4]. **LS-режим** реализуется при  $\beta > \sigma + 1$ . Автомодельные решения существуют на интервале  $[0, \infty)$  или  $[\xi_f, \infty)$  и представляют собой сходящиеся к центру симметрии в режиме с обострением нестационарные диссипативные структуры. Ранее было показано, что автомодельная задача может иметь несколько с.ф.  $\Theta_j(\xi)$ ,  $j = 1, \dots, N$  [9,10], отвечающих одному с. з., то есть развивающихся в одном темпе с одним моментом обострения. Первая с.ф. монотонно убывает. Следующие являются немонотонными, с числом локальных экстремумов, равным их номеру. В области своей немонотонности, они совершают колебания около гомотермического решения (5) и описываются приближенно линейным уравнением. Кроме с.ф. существующих на полупрямой и удовлетворяющих условию (8) в центре симметрии (назовем их обычными), автомодельная задача при  $\nu = 1$  и  $\nu = 2$  имеет решения, определенные на интервале  $[\xi_f, \infty)$  – структуры «с дыркой». Существование с.ф. с нулевыми участками в центре было обнаружено в [12]. Спектр с.ф. в сферической, цилиндрической геометрии и распределенной плотности может существенно отличаться от спектра с.ф. при  $\nu = 0$ ,  $\kappa = 0$ : 1) наличием четных с.ф. с нулевой областью в центре, 2) отсутствием в спектре некоторых нечетных с.ф., начиная с третьей. На рис. 1 представлены первые 12 с.ф. при  $\beta = 65$ ,  $\sigma = 63$ ,  $\nu = 2$ ,  $\kappa = 1$ . Четыре нечетные с. ф.  $\Theta_{2j+1}(\xi)$ ,  $j = 1, \dots, 4$  выпали из спектра. Среди имеющихся 59 с.ф.

– семь структур «с дыркой»  $\Theta_{2_j}(\xi)$ ,  $j = 1, \dots, 7$  и 52 обычные. В области немонотонности с.ф. описываются частью решения  $u_j(\xi)$  линеаризованного около  $\Theta_H$  уравнения со своей амплитудой, которая задается соответствующими начальными данными:  $u_j(\xi_0) = \Theta_j(\xi_0) - 1$ ,  $w_j(\xi_0) = \mathcal{G}_j(\xi_0)$ , где  $\xi_0$  – точка экстремума функции  $\Theta_j(\xi)$  (рис.1), ближайшая к центру.

3. С.ф. в LS–режиме были численно продолжены по параметру  $\beta$  при фиксированном  $\sigma$ , и проведен их бифуркационный анализ. Бифуркационный анализ спектра с.ф. в плоской геометрии и постоянной плотности показал: что собственная функция  $\Theta_j$  с номером  $j = 2, 3, 4, \dots$  существует в интервале

$$\sigma + 1 < \beta < \beta_j, \quad \text{где } \beta_j = \frac{j(\sigma + 1) - 1}{j - 1}. \quad (9)$$

Значения  $\beta = \sigma + 1$  и  $\beta = \beta_j$  являются точками бифуркации, в которых прекращает свое существование с.ф.  $\Theta_j$ . Первая с.ф. существует при любом значении  $\beta > \sigma + 1$ . При  $\beta > \beta_2 = 2\sigma + 1$  автомодельная задача в LS режиме имеет только одну собственную функцию. Чем больше номер с.ф., тем уже интервал по параметру  $\beta$ , в котором она существует. Число собственных функций  $N$ , которое имеет автомодельная задача при данных  $\beta$  и  $\sigma$  определяется формулой:

$$N = [a], \quad \text{если } a \text{ – нецелое, } a = \frac{\beta - 1}{\beta - \sigma - 1}, \quad (10)$$

$$N = a - 1, \quad \text{если } a \text{ – целое}$$

На рис. 2 представлена бифуркационная диаграмма для десяти с.ф. при  $\nu = 0$ ,  $k = 0$ ,  $\sigma = 2$ . При приближении к правой границе интервала существования, амплитуда отклонения от гомотермического решения с.ф. уменьшается и стремится к нулю при  $\beta \rightarrow \beta_j$  (рис. 2а), а значение точки  $\xi_{fj}$ , где функция мала (здесь  $\Theta_j^{\sigma+1} = 10^{-5}$ ), стремится к бесконечности (рис.2б). То есть при  $\beta \rightarrow \beta_j$  с.ф. приближается к гомотермическому решению, и в точке бифуркации сливается с ним. При уменьшении параметра  $\beta$  амплитуда отклонений максимумов и минимумов с.ф. от гомотермического решения увеличивается (рис. 2а). При  $\beta \rightarrow \sigma + 1$  минимумы стремятся к нулю, а максимумы – к амплитуде автомодельного решения  $\Theta_j^S(\xi)$  в S – режиме, которое можно рассматривать как периодическое в силу автономности

уравнения (4) в этом случае. Расчеты показали, что при  $\beta \rightarrow \sigma + 1$  с.ф. с номером  $j$  стремится к решению  $\Theta^S_j(\xi)$ , имеющему  $j$  полупериодов, на отрезке  $0 \leq \xi \leq j \times 0.5L_T$ .

4. Бифуркационный анализ спектра автомодельных решений в сферической и цилиндрической геометрии показал, что  $j$ -тая с.ф.  $\Theta_j(\xi)$  существует в интервале:

$$\sigma + 1 < \beta_j^*(\nu, k) < \beta < \beta_j, \quad j = 2, 3, \dots \quad (11)$$

Первая с.ф. существует при всех  $\beta > \sigma + 1$ , превращаясь в точке бифуркации  $\beta = \sigma + 1$  в единственную с.ф. S-режима для данных  $\nu$  и  $k$ . Правая граница области существования с.ф.  $\Theta_j(\xi)$  при  $\nu = 1$ ,  $\nu = 2$  и  $0 \leq k < 2$  такая же, как и в плоском случае (9), и отвечает бифуркации слияния с гомотермическим решением. На рис. 3 представлена бифуркационная диаграмма для первых пяти с.ф. при  $\nu = 1$ ,  $k = 0$ ,  $\sigma = 2$ . При уменьшении параметра  $\beta$  эволюция четных с.ф. и нечетных различается. При уменьшении  $\beta$  абсолютный минимум четной с.ф., который находится в т.  $\xi = 0$  уменьшается и при некотором значении  $\beta_{2j}^*$  достигает нуля (на рис. За эти точки бифуркации обозначены ромбиками). При дальнейшем уменьшении параметра  $\beta$  четная с.ф. отодвигается от начала координат, превращаясь в структуру с «дыркой». Сначала превращается в структуру с «дыркой» вторая с.ф., затем четвертая и т.д. Чем ближе  $\beta$  к  $\sigma + 1$  тем больше собственных функций с «дыркой» уже образовалось и тем дальше младшие с. ф. отодвинулись от центра (см. рис. 1). При  $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$  минимумы четной с.ф. с дыркой опускаются до нуля, и она приближается на бесконечности к с.ф.  $\Theta_{S,j}(\xi)$  в S-режиме при  $\nu = 0$ ,  $k = 0$ .

Теперь рассмотрим эволюцию старших нечетных с.ф.  $\Theta_{2j+1}(\xi)$  с изменением параметра  $\beta$ . При уменьшении  $\beta$  амплитуда колебаний около гомотермического решения увеличивается и абсолютный минимум с.ф., который находится ближе всех других минимумов к началу координат, стремится к нулю. В точке бифуркации (на рис. 3 они отмечены кружками) с.ф.  $\Theta_{2j+1}(\xi)$  прекращает свое существование, распадаясь на первую с.ф.  $\Theta_1(\xi)$  и четную с.ф.  $\Theta_{2j}(\xi)$  с «дыркой». Сначала распадается третья с.ф., затем пятая и т.д., чем ближе  $\beta$  к  $\sigma + 1$ , тем больше распавшихся нечетных с.ф.. Таким образом, чтобы определить число с.ф. при данных  $\beta$ ,  $\sigma$ ,  $\nu$  и  $k$ , надо из числа с.ф. для плоского случая (9) вычесть число распавшихся нечетных с.ф., которое в свою очередь зависит от геометрии области и от плотности.

5. Устойчивость автомодельных решений исследовалась в рамках задачи Коши для уравнения (1). В качестве начального распределения температуры бралась либо сама с.ф. – резонансное возбуждение, либо «возмущенная» с.ф. Известно, что автомодельные решения, развивающиеся в режиме с обострением неустойчивы по отношению к малым возмущениям, однако, эти решения могут обладать структурной устойчивостью, в смысле выхода на автомодельный режим [9,10]. Доказано [13], что бесконечный близкий к нулю «хвост» с.ф. «обрезается», и в LS-режиме имеет место явление локализации. С целью выяснения структурной устойчивости с. ф. в работе проводилась автомодельная обработка [14]. Исследования показали, что в любой геометрии и любом распределении плотности первая с.ф. является структурно устойчивым автомодельным решением. В сферической и цилиндрической геометрии область ее притяжения ограничена некоторым радиусом  $R_C$ . Другим структурно устойчивым решением найденным впервые в работе является вторая с. ф. с нулевой областью в центре. Она обладает широкой областью притяжения, и к ней стремятся многие решения с произвольными начальными данными (см. рис. 4).

Известно, что старшие с.ф., имеющие несколько максимумов, не являются структурно устойчивыми решениями, однако при резонансном возбуждении они могут обладать метастабильной устойчивостью [9,10]. Проведенные расчеты впервые обнаружили, что устойчивость с. ф. зависит от параметров, от ее номера и от четности номера. Нечетные с.ф. могут сохранять свою структуру при росте температуры в 10-20 раз, в то время как четные следуют автомодельному закону при росте температуры от нескольких раз при больших значениях  $\nu$  до нескольких сотен и даже тысяч раз при  $\nu$  близких к  $y+1$ . Эволюция с.ф. в LS-режиме при больших и малых  $\nu$  качественно отличается. При больших  $\nu$  все максимумы сложной с.ф. при  $t \rightarrow \phi$  поглощаются одним, и нечетные с.ф. вырождаются в первую, а четные – во вторую с.ф. с дыркой. При  $\nu \rightarrow y+1$  вырождение с.ф. вблизи момента обострения происходит в виде распада. Сложная четная с.ф. существует очень долго и поэтапно распадается на независимо горящие на своей фундаментальной длине со своим моментом обострения структуры, при этом в процессе эволюции наблюдаются четные с.ф. с меньшим номером, как промежуточные асимптотики (рис. 4).

С.ф. качественно отличаются от произвольных распределений температуры, которые быстро перестраиваются и вырождаются в горение простой структуры. Спектр автомодельных решений определяет весь конечный набор структур в нелинейной

среде, развивающихся согласованно с одним моментом обострения. Сложную структуру можно рассматривать как объединение простых. Метастабильная устойчивость старших с.ф. позволяет сформулировать принципы коэволюции простых структур, объединенных в сложную [15].

119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, ВМК  
e-mail: elena.kurkina@cs.msu.su;

125047 Москва, Миусская площадь д. 4, ИПМ РАН

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Режимы с обострением. Эволюция идеи. –М.: Наука.1998. – 255с.
2. Galaktionov V. A., Vazquez J. L. //J. Discrete and contin. dynamical systems, 2002, V. 8, № 2, pp. 399-433.
3. Самарский А.А., Галактионов В.А. и др. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений //М.: Наука, 1987. 480 с.
4. Змитренко Н.В., Курдюмов С.П. и др. //Письма в ЖЭТФ, 1978, Т.26, Вып.9.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. и др. // Док. АН СССР, 1967, Т.173, №4, 808-811.
6. Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Основания синергетики //СПб.: Алетейя, 2002. – 414 с.
7. Лобанов А.И., Старожилова Т.К. Нестационарные структуры в модели свертывания крови – //В книге: Новое в синергетике: Взгляд в третье тысячелетие. – М.: Наука, 2002 г., с. 346-367.
8. Капица С.П. // Успехи физ. наук, 1996, Т.166, №1, с.63-80.
9. Самарский А.А., Еленин Г.Г. и др. // Док. АН СССР, 1977, Т.237, №6.
10. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А.А. //ЖВМиМФ, 1983, т. 23, № 2, с. 380-390.
11. Курдюмов С. П., Куркина Е. С. и др. // Док. АН СССР, 1980, Т.251, №3.
12. Димова С. Н., Касичев М. С., Курдюмов С.П. // ЖВМиМФ, 1989, т. 29, № 11, с. 1683-1704.
13. Галактионов В. А. //Дифференц. ур-ния, 1985, т. 21, № 1, с. 15-23.
14. Barenblatt G. I. **Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics.**// Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge university press, 1996, pp.386
15. Курдюмов С. П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М. Наука 1982, 217-243.

## Подписи к рисункам

Рис. 1 Спектр собственных функций при  $\nu = 65$ ,  $\gamma = 63$ ,  $n = 2$ ,  $\kappa = 1$  (первые 12 штук).

Рис. 2. Бифуркационные диаграммы для десяти с.ф.  $\Theta_j(\xi)$  ( $\gamma = 2$ ,  $n = 0$ ,  $\kappa = 0$ ).

Рис. 3 Бифуркационные диаграммы для пяти с.ф.  $\Theta_j(\xi)$  ( $\gamma = 2$ ,  $n = 1$ ,  $\kappa = 0$ ).

Рис. 4 Профили температуры в процессе эволюции четвертой и шестой с.ф.  
( $\gamma = 2$ ,  $n = 1$ ,  $\kappa = 0$ ).





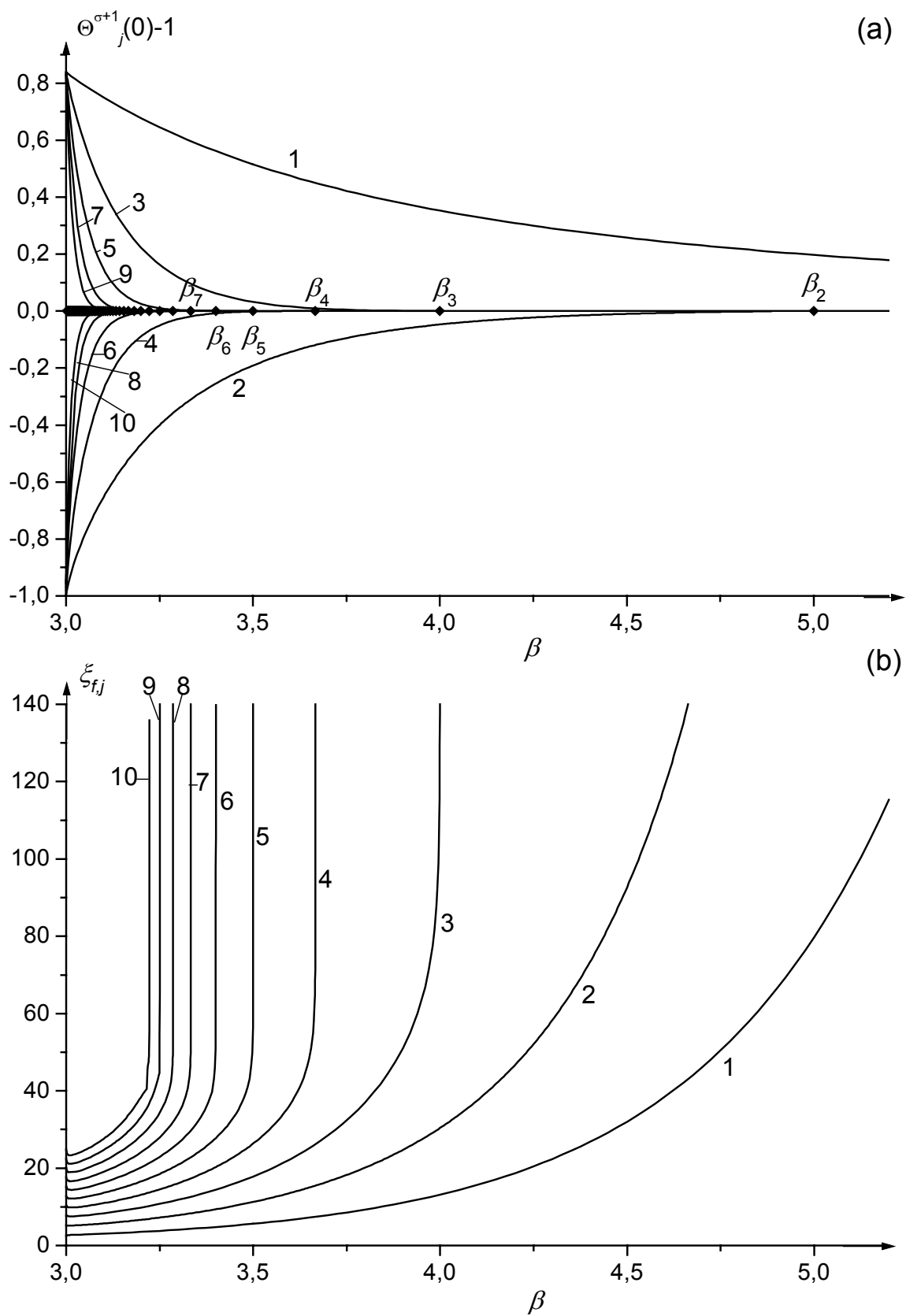


Рис. 2

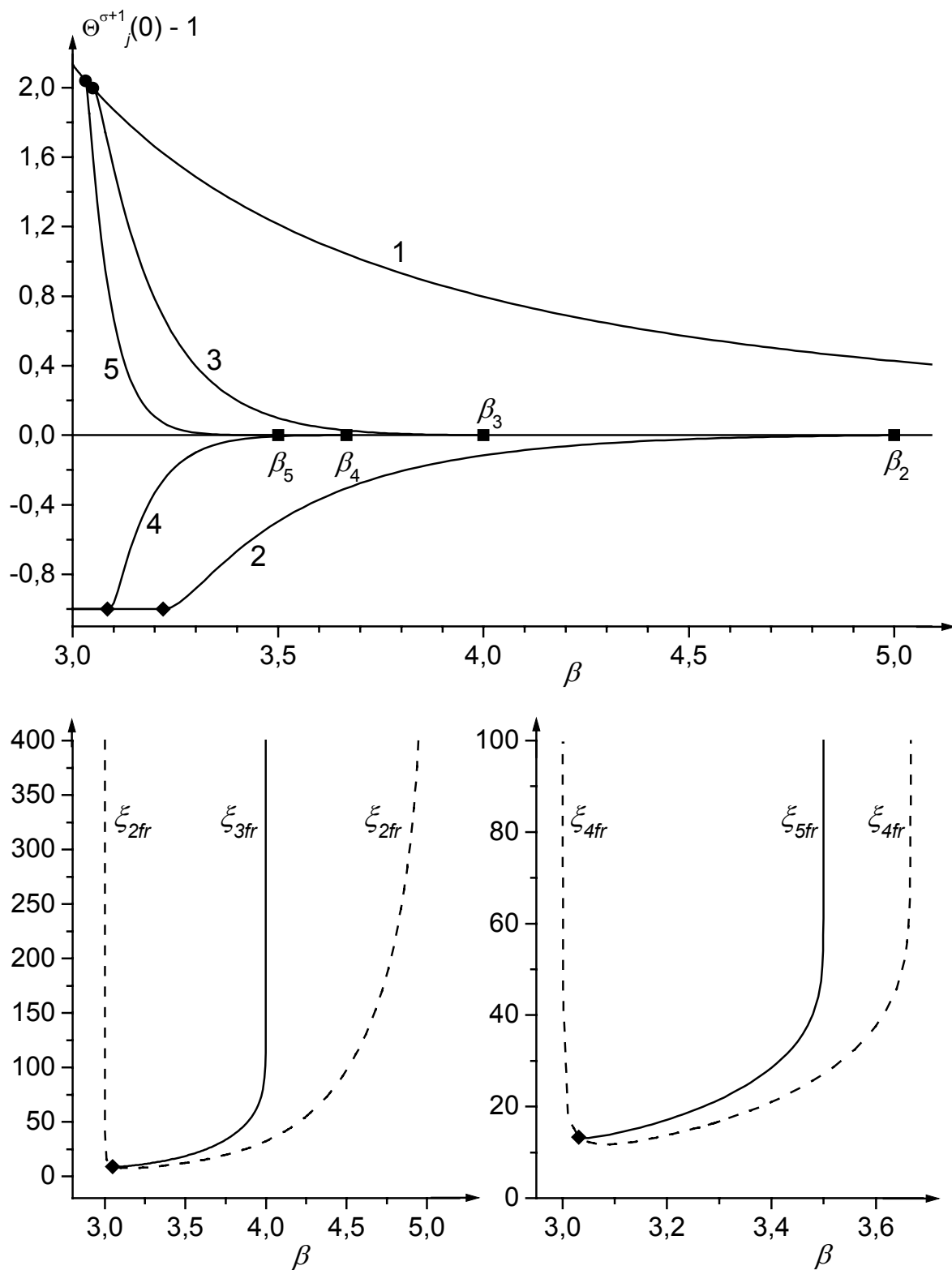


Рис. 3

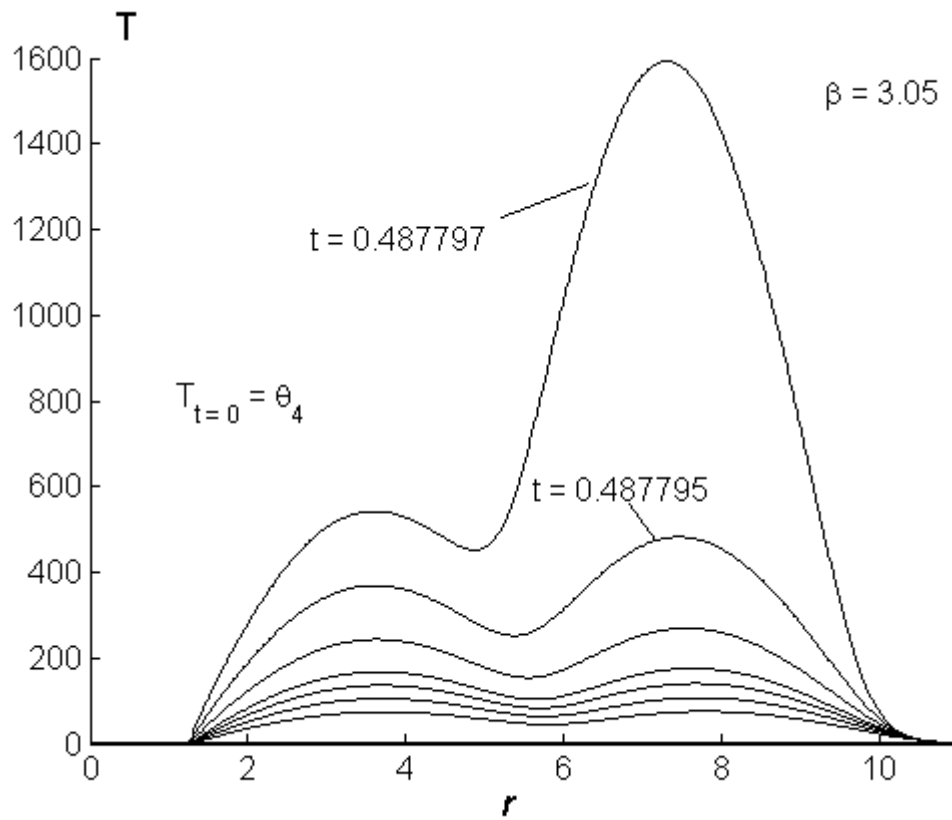


Рис. 4 а

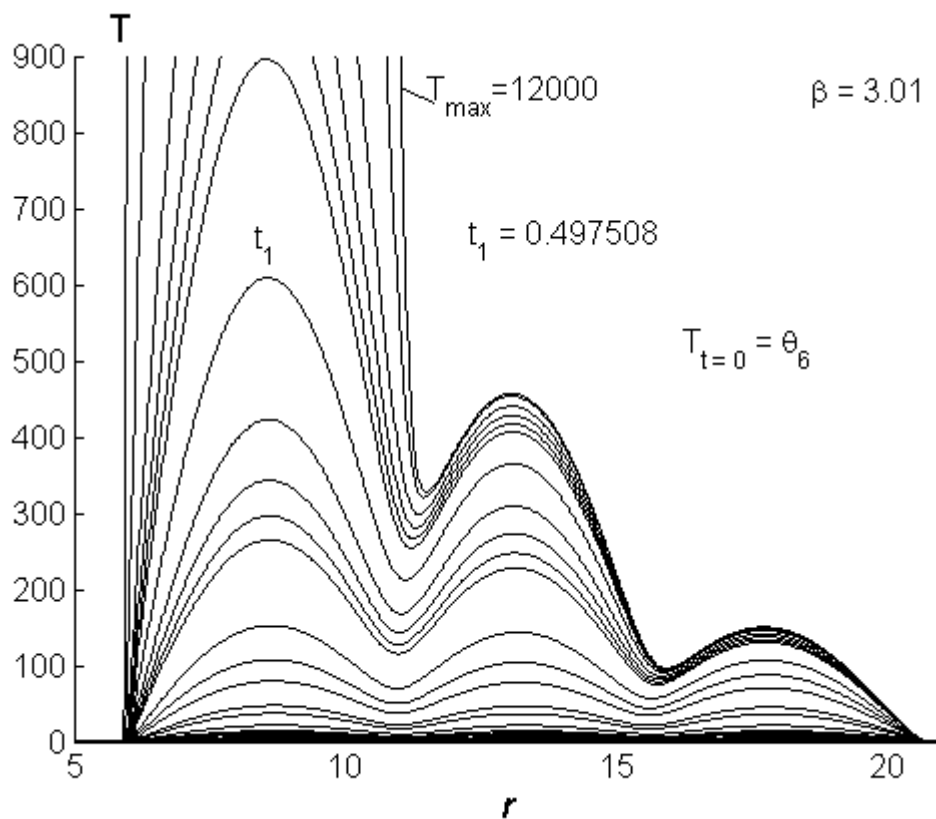


Рис. 4 б