

О фрактальном анализе хаотических временных рядов.

М.М. Дубовиков, Н.В. Старченко.

Аннотация.

На основе минимальных покрытий вводятся новые фрактальные характеристики: размерность минимального покрытия D_μ и индекс фрактальности μ тесно связанный с D_μ . Использование этих показателей расширяет сферу применимости фрактального анализа при изучении самых различных природных, социальных и технологических процессов. В частности, для случая финансовых временных рядов показано что минимальный масштаб τ_μ , необходимый для определения μ с приемлемой точностью, на два порядка меньше соответствующего масштаба для определения показателя Херста H . Это позволяет рассматривать индекс μ как локальную характеристику и ввести функцию $\mu(t)$. Показано, что эта функция является индикатором локальной стабильности временного ряда: чем больше значение μ , тем стабильнее ряд. Теоретически обоснован и подтвержден практически эффект увеличения крупномасштабных флуктуаций при подавлении мелкомасштабных.

Fractal analysis of the chaotic time series.

M.M. Dubovikov, N.V. Starchenko

Abstract.

On the basis of the minimal covers we introduce new fractal characteristics: the dimension of minimal covers D_μ and the index of fractality μ related to D_μ . The latter extend the applicability of fractal analysis to study of various natural, technological and social chaotic processes. In particular, for the case of financial series (FS), it is shown that the minimal scale τ_μ which is necessary for determining μ with an acceptable accuracy, is two orders smaller than the one for computing the Hurst index H . This allows us to consider μ as a local fractal characteristic and to show that $\mu(t)$ is related to the stability of underlying processes: instability decreases when μ increases. The effect of increasing of the large-scale fluctuations together with decreasing of the small-scale ones is theoretically substantiated and empirically confirmed.

О фрактальном анализе хаотических временных рядов.

М.М. Дубовиков, Н.В. Старченко.

Введение.

Начиная с конца прошлого века тема хаотических временных рядов уверенно занимает одно из лидирующих положений в самых престижных научных журналах (например, таких, как Nature или Science). Причем ряды рассматриваются самые разные, начиная от традиционных (геофизических, экономических, медицинских) и заканчивая теми, которые стали популярными сравнительно недавно (ежедневные вариации уровня преступности или ДТП в регионе, колебания запросов определенных сайтов в Internet и т.д.). Все эти

ряды обычно порождаются сложными нелинейными системами, описание которых в виде дифференциальных уравнений или дискретных отображений обычно связано с большими трудностями. Однако надежно установлено, что такие ряды, как правило, являются фракталами. Это означает, что несмотря на крайнюю нерегулярность характер их поведения остается неизменным на всех масштабах, вплоть до минимального. Другими словами, с точностью до масштабного фактора, такие ряды на разных масштабах выглядят примерно одинаково. Такое широкое распространение фрактальной структуры по-видимому связано с тем, что в реальности любые достаточно нерегулярные процессы стремятся обрести самоподобную структуру. Поэтому совсем не удивительно, что нелинейные динамические системы обычно имеют фрактальные аттракторы (например, аттрактор Лоренца или Ресслера): последнее означает, что крайне неустойчивые фазовые траектории таких систем с течением времени стремятся стать фракталами. Основной характеристикой таких самоподобных структур как известно является размерность D , введенная Хаусдорфом еще в 1919 году для компактного множества в произвольном метрическом пространстве [1]. Если в качестве аппроксимации графиков временных рядов рассматривать комплексы, состоящие из двумерных простых фигур (например, клеток), с геометрическим фактором δ , то, как следует из определения Хаусдорфа, размерность D определяется из закона

$$S(\delta) \sim \delta^{2-D} \text{ при } \delta \rightarrow 0 \quad (1)$$

где $S(\delta)$ - полная площадь комплекса, с масштабом разбиения δ . Между тем, на практике, при попытке вычислить D непосредственно из формулы (1), возникает серьезная проблема. Она связана с тем, что с одной стороны, реальные временные ряды всегда имеют минимальным масштаб структуры δ_0 , с другой же стороны, для всех известных аппроксимаций приближение к асимптотическому режиму (1) обычно является слишком медленным. По этой причине, для определения D обычно вычисляют показатель Херста H , который для гауссовых процессов связан с D соотношением $H=2-D$. Однако, для надежного вычисления H требуется слишком большой репрезентативный масштаб, содержащий несколько тысяч данных [2]. Внутри этого масштаба временной ряд много раз меняет характер своего поведения. Чтобы связать локальную динамику соответствующего процесса с фрактальной размерностью временного ряда необходимо определить размерность D локально (т.е. на масштабах, порядка характерного масштаба основных динамических состояний процесса). Для этого необходимо найти последовательность аппроксимаций, которая давала бы достаточно быстрый выход функции $S(\delta)$ на асимптотический режим (1).

В настоящей работе развивается подход, где для реальных временных рядов такая последовательность аппроксимаций получается автоматически. Первый раздел носит вводных характер. В этом разделе на простейшем примере раскрывается основная идея, лежащая в основе предлагаемого подхода. Во втором разделе вводятся новые понятия: индекс фрактальности μ и размерность минимального покрытия D_μ . Затем, на основе индекса μ анализируются ценовые ряды акций, входящих в индекс Доу Джонса. Показано, что использование индекса μ позволяет выявить для этих рядов степенной закон, который выполняется с удивительной точностью. При сравнении индекса μ с другими фрактальными показателями оказывается, что для надежного определения этого индекса с приемлемой точностью требуется данных на два порядка меньше, чем, например, для определения показателя Херста H . Это приводит к возможности построения локального фрактального анализа временных рядов с помощью функции $\mu(t)$. Третий раздел посвящен применению локального фрактального анализа к двум основным задачам теории временных рядов: задаче идентификации и задаче прогноза. Использование функции $\mu(t)$

позволяет существенно продвинуться в решении этих задач. В частности показано, что индекс μ является идентификатором локального тренда для хаотических рядов и обоснован эффект «затишья перед бурей» (эффект увеличения крупномасштабных флуктуаций при подавлении мелкомасштабных). В заключительном разделе подводятся основные итоги и перечисляются области возможного применения изложенных в работе идей.

1. Фрактальные структуры.

История фракталов началась в конце 19-го века, когда впервые были построены объекты (такие как множество Кантора, функция Веерштрасса, кривая Пеано и др.) к которым методы классического анализа были абсолютно неприменимы. Все они строились по очень простым правилам с помощью итерационной процедуры и все обладали самоподобием, т.е. на каждом шаге итерации состояли из точных копий самого себя. Одним из таких примеров является ковер Серпинского. Он строится по следующим правилам: на нулевом шаге берется единичный квадрат. На первом – этот квадрат делится на девять равных квадратов и выбрасывается средний. Далее на каждом следующем шаге эта процедура повторяется со всеми оставшимися квадратами. Множество, которое получается в пределе такой итерационной процедуры, называется ковром Серпинского (см. рис.1).

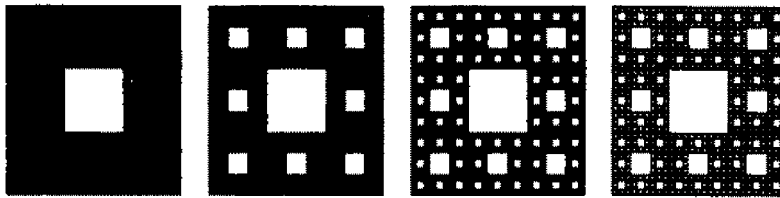


Рис. 1. Ковер Серпинского на первых четырех шагах итерации

Некоторое время подобные примеры воспринимались математиками как своего рода патологии. Однако к началу 20-го века их накопилось так много, что возникла потребность в их классификации и анализе. Во многом для решения этих двух задач в 1919 году Хаусдорф предложил свое знаменитое определение размерности для компактного множества в произвольном метрическом пространстве. Он заметил, что если подобные множества покрывать шарами с радиусом δ , то с уменьшением δ количество шаров будет расти по степенному закону:

$$N(\delta) \sim (1/\delta)^D \quad (2)$$

Этот показатель D Хаусдорф и назвал размерностью¹. Если теперь прологарифмировать обе части этого выражения и переписать в виде равенства для D , то мы получим точное определение хаусдорфовой размерности :

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln(1/\delta)} \quad (3)$$

Побудительным мотивом такого названия стало то, что для привычных в классическом анализе регулярных множеств (например, гладких кривых или поверхностей) D совпадает с топологической размерностью D_T равной минимальному числу координат, необ-

¹ Эту величину иногда называют предельной емкостью (см., например [3]), понимая при этом под Хаусдорфовой размерностью d_H критическое значение аргумента функции $m(p) = \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{\{A_i^\varepsilon\}} \sum_i (\text{diam} A_i^\varepsilon)^p$,

обладающее тем свойством, что при $p < d_H$ $m(p) = \infty$, а при $p > d_H$ $m(p) = 0$. Здесь A_i^ε - покрытие исходного множества семейством множеств A_i^ε , имеющих диаметр меньше ε . Такая размерность имеет более позднее происхождение и распространяется на неограниченное множество, как правило $d_H = D$, но есть контрпримеры. В общем же случае можно лишь утверждать, то $d_H \leq D$.

ходимых для описания таких множеств. Для «патологий» же типа ковра Серпинского оказалось, что размерность Хаусдорфа во-первых, как правило является дробным числом, а во-вторых, всегда больше топологической размерности D_T . Последнее свойство позднее использовал Мандельброт для одного из возможных определений фрактала, согласно которому «фракталом называется множество для которого $D > D_T$ » [4].

Для вычисления размерности модельных фракталов, однако, оказалось удобнее использовать не исходное определение Хаусдорфа, а его модификацию, основанную на свойствах конкретного множества. Для примера такой модификации вернемся к коврику Серпинского. Этот модельный фрактал, как и другие, построен с использованием итеративной процедуры. На каждом шаге итерации получается некоторое множество, состоящее из простейших симплексов, которое Мандельброт назвал предфракталом n -го поколения. Для ковра Серпинского простейшими симплексами являются копии исходного квадрата, уменьшенные в n раз, где n – шаг итерации. Если использовать теперь такие симплексы вместо шаров, то размерность можно вычислить непосредственно. Действительно, рассмотрим внимательно ковер Серпинского. На первом шаге $\delta = 1/3$, а количество симплексов (уменьшенных квадратов, из которых состоит предфрактал) $N(\delta) = 8$. На n -м шаге $\delta = (1/3)^n$, а $N(\delta) = 8^n$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ получим:

$$D = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln 8^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1.89. \text{ Нетрудно показать, что этот результат не изменится при}$$

использовании шаров, вместо симплексов. Здесь, однако, возникает очень важный вопрос, который ранее оставался без должного внимания: «в чем преимущества использования предфракталов перед общим определением?» Для ответа на него построим в двойном логарифмическом масштабе функцию $N(\delta)$ для ковра Серпинского (см. рис. 2).

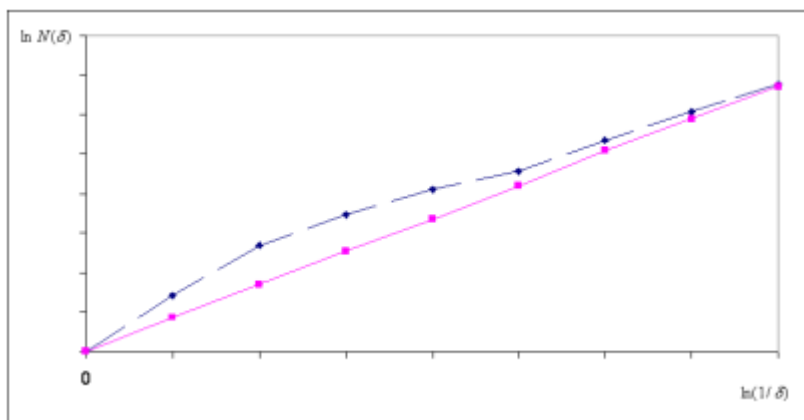


Рис. 2. Зависимость $N(\delta)$ для количества квадратов со стороной δ предфрактала n -го поколения для ковра Серпинского (сплошная линия) и соответствующим образом нормированного минимального числа шаров, радиуса δ , покрывающих ковер Серпинского (прерывистая линия).

Очевидно, что в случае использования предфракталов, все данные точно лягут эту прямую, начиная с самых больших δ . Именно по этой причине значение фрактальной размерности ковра Серпинского можно получить уже на первом шаге итерации. Если же строить такую зависимость для исходного определения Хаусдорфа, то получится некоторая кривая², которая имеет нужный наклон только в асимптотике при $\delta \rightarrow 0$. Таким образом, использование предфракталов дает по сравнению с общим определением «быстрый выход на асимптотику». Это происходит потому, что предфракталы являются в некотором смысле наилучшими аппроксимациями исходного множества при фиксированном δ . Свойство быстрого выхода на асимптотику является особенно важным для природных фракталов, поскольку при их анализе всегда существует минимальный масштаб структуры δ_0 . Поэтому соответствующий степенной закон рассматривается (подробнее см. [6])

² Следует заметить, что по причине дискретной масштабной инвариантности эта кривая имеет еще и периодическую составляющую, что приводит, вообще говоря, к появлению в соответствующей размерности комплексной добавки [5]. Однако в нашем случае этим эффектом можно пренебречь.

как «промежуточная асимптотика» (т.е. при $\delta \rightarrow 0$ берется масштаб малый, по сравнению с некоторым характерным, но много больше минимального масштаба δ_0).

2. Анализ временных рядов.

Когда исследовались подобные множества с нетривиальной хаусдорфовой размерностью, то никто не мог даже предположить, что такие объекты могут иметь какое-либо отношение к природе. Теперь, во многом благодаря усилиям Мандельброта мы знаем, что фракталы окружают нас повсюду. Некоторые из фракталов непрерывно меняются, подобно движущимся облакам или мерцающему пламени, в то время как другие, подобно деревьям или нашим сосудистым системам, сохраняют структуру, приобретенную в процессе эволюции. При этом реальный диапазон масштабов, где может наблюдаться фрактальная структура, простирается от расстояний между молекулами в полимерах до расстояния между скоплениями галактик во вселенной. Можно сказать, что все сильные нерегулярности в природе стремятся обрести самоподобную (фрактальную) структуру как наиболее энергетически выгодную. Такую структуру, в частности, на определенном интервале масштабов имеют все наблюдаемые в реальности хаотические временные ряды.

Наиболее простым способом исследования фрактальной структуры временных рядов является вычисление их фрактальной размерности через клеточную размерность D_c . Для определения размерности D_c разобьем плоскость, на которой определен график временного ряда на клетки размером δ и определим число клеток $N(\delta)$, где находится хотя бы одна точка этого графика. Затем при различных δ в двойном логарифмическом масштабе построим функцию $N(\delta)$, которая аппроксимируется прямой, например, с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Тогда D_c определяется по углу наклона этой прямой. Главным недостатком такого метода является то, что выход на степенную асимптотику функции $N(\delta)$ при $\delta \rightarrow 0$ обычно происходит крайне медленно. Это означает, что для надежного вычисления D требуется слишком большой репрезентативный масштаб. Внутри такого масштаба временной ряд, как правило, меняет характер своего поведения много раз. Указанный недостаток в равной степени присущ и более изысканным способам определения фрактальной размерности (например через корреляционный интеграл с помощью алгоритма Грассбергера – Прокаччи [7]). Чтобы связать локальную динамику соответствующего процесса с фрактальной размерностью временного ряда необходимо определить размерность D локально. Для этого попытаемся найти последовательность аппроксимаций, которая при фиксированном δ была бы в некотором смысле оптимальной. Если умножить обе части (2) на δ^2 , то определение размерности можно переписать в виде степенного закона для площади аппроксимаций $S(\delta)$:

$$S(\delta) \sim \delta^{2-D} \text{ при } \delta \rightarrow 0 \quad (4)$$

Заметим, что такая форма в отличие от (2) вообще говоря не требует, чтобы симплексы из которых состоит аппроксимация были одинаковыми. Достаточно того, чтобы они имели один и тот же геометрический фактор δ . Это позволяет нам использовать аппроксимации, которые при данном δ в некотором смысле наилучшим образом приближают исходную функцию.

Действительно, пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $y = f(t)$, имеющая не более конечного числа точек разрыва первого рода: именно такие функции естественно рассматривать в качестве модельных, например для финансовых временных рядов. Введем равномерное разбиение отрезка

$$\omega_m = [a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b], \quad (5)$$

где $t_i - t_{i-1} = \delta = (b - a) / m$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Покроем график этой функции прямоугольниками таким образом, чтобы это покрытие было минимальным по площади в классе покрытий прямоугольниками с основанием δ (рис. 3). Тогда высота прямоугольника на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ будет равна амплитуде $A_i(\delta)$, которая является разностью между максимальным и минимальным значением функции $f(t)$ на этом отрезке.

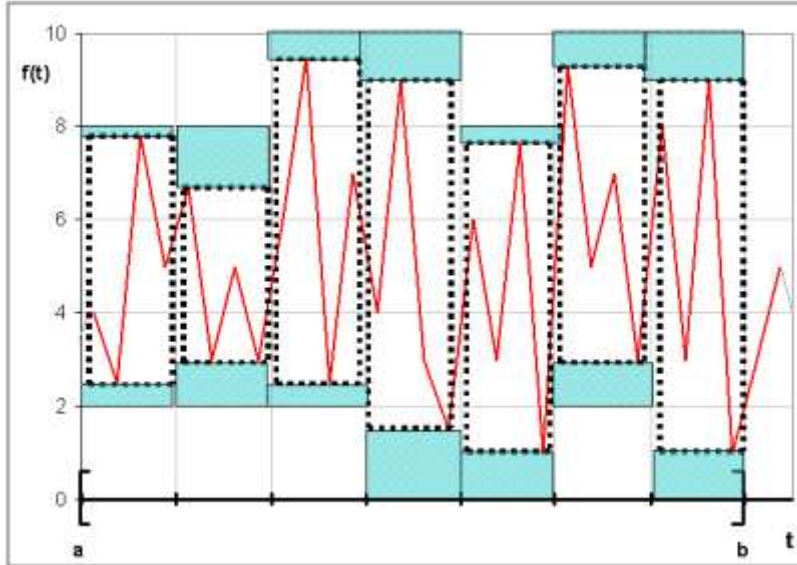


Рис.3. Построение минимального покрытия. Необходимо разбить область определения на отрезки длиной δ и покрывать график функции прямоугольниками с основанием δ и высотой, равной амплитуде колебаний функции на данном отрезке. Серым цветом показаны участки, определяющие разность между клеточным и минимальным покрытием.

Введем величину:

$$V_f(\delta) \equiv \sum_{i=1}^m A_i(\delta) \quad (6)$$

Тогда полную площадь минимального покрытия $S_\mu(\delta)$ можно записать в виде:

$$S_\mu(\delta) = V_f(\delta)\delta \quad (7)$$

Поэтому из (4) следует, что

$$V_f(\delta) \sim \delta^{-\mu} \text{ при } \delta \rightarrow 0, \quad (8)$$

где

$$\mu = D_\mu - 1 \quad (9)$$

Назовем размерность D_μ **размерностью минимального покрытия**. Чтобы соотнести D_μ с другими размерностями и в частности с клеточной размерностью D_c , построим клеточное разбиение плоскости графика функции $f(t)$ как показано на рис. 3. Пусть $N_i(\delta)$ - число клеток, покрывающих график $f(t)$ внутри отрезка $[t_{i-1}, t_i]$. Тогда из рис. 3 видно, что

$$0 < N_i(\delta)\delta^2 - A_i(\delta)\delta < 2\delta^2 \quad (10)$$

Разделим это соотношение на δ и просуммируем по i с учетом (6). В результате получим

$$0 < N(\delta)\delta - V_f(\delta) < 2(b - a), \quad (11)$$

где $N(\delta) = \sum N_i(\delta)$ есть полное число клеток размера δ , покрывающих график функции $f(t)$ на отрезке $[a, b]$. Переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, с учетом (8) и (9), получим:

$$N(\delta)\delta \sim V_f(\delta) \sim \delta^{-\mu} = \delta^{1-D_\mu} \quad (12)$$

С другой стороны, согласно (4)

$$N(\delta)\delta = S_c(\delta)\delta^{-1} \sim \delta^{1-D_c} \quad (13)$$

Следовательно $D_c = D_\mu$.

Заметим, однако, что несмотря на это равенство, для реальных фрактальных функций минимальные и клеточные покрытия могут давать различные приближения величины $S(\delta)$ к асимптотическому режиму (4), причем величина этого различия может быть весьма значительной.

Возвращаясь к формуле (9) заметим, что поскольку $D_\mu = D$ и для одномерной функции $D_T = 1$, то $\mu = D - D_T$. Поэтому в данном случае индекс μ естественно назвать **индексом фрактальности**. Далее при анализе финансовых временных рядов мы будем рассматривать его как основной фрактальный показатель.

Наиболее популярными представителями фрактальных временных функций являются финансовые временные ряды (ряды цен акций и курсов валют). Существует надежное численное подтверждение фрактальной структуры таких рядов [8]. Теоретически же фрактальность обычно связывают с тем, что для устойчивости рынка на нем должны присутствовать инвесторы с разными инвестиционными горизонтами (от нескольких часов до нескольких лет). Это и приводит к масштабной инвариантности (отсутствию выделенного масштаба) ценовых рядов на соответствующем временном интервале [9]. С помощью индекса фрактальности μ нами были исследованы ценовые ряды акций тридцати компаний, входящих в индекс Доу-Джонса (Dow Jones Industrial Index) с 1970 по 2002 год. Каждый ряд содержит 8145 записей. Каждая запись соответствует одному торговому дню и содержит четыре значения: информацию о минимальной и максимальной цене, а также цены открытия и закрытия. В литературе финансовые ряды обычно изображают с использованием т.н. «японских свечей». Фрагмент такого ряда для компании Coca-Cola представлен на рис. 4.

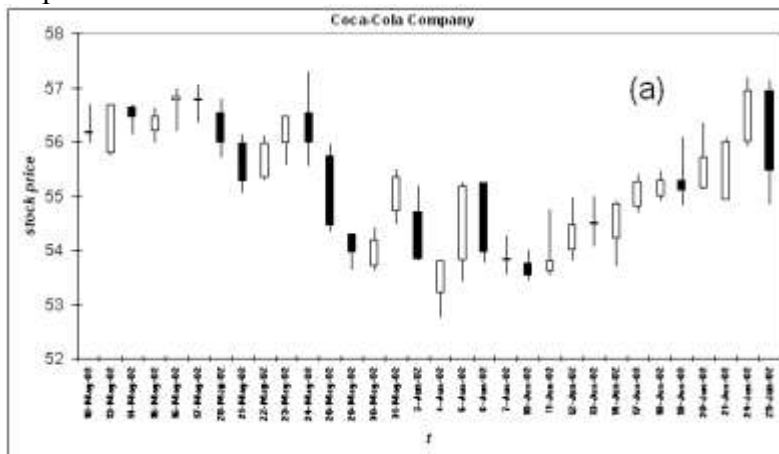


Рисунок 4. Типичное поведение цен на интервале 32 дня (использован дневной график цен акций компании Coca-Cola) в формате японских свечей³

Для простоты анализа ограничимся последними $2^{12}=4096$ записями для каждой компании. При вычислении индекса μ мы использовали последовательность m вложенных разбиений ω_m (5), где $m=2^n$; $n=0,1,2,\dots,12$. Каждое разбиение состояло из 2^n интервалов, содержащих 2^{12-n} торговых дней. Для каждого разбиения ω_m вычислялось значение $V_f(\delta)$ (6). Здесь $A_i(\delta)$ равна разности между максимальной и минимальной ценой на

³ В финансах графики цен принято изображать не одномерными линиями, а интервалами (т.н. баровые графики или графики в виде японских свечей). Один прямоугольник (называемый телом свечи) с двумя штрихами сверху и снизу (называемыми тенями свечи) изображает колебания цен в течение дня. Верхняя точка верхней тени показывает максимум цены, нижняя точка нижней тени – минимум цены за день. Верхняя и нижняя границы тела свечи показывают цену открытия и закрытия торгов. При этом, если тело белого (черного) цвета, то закрытие выше (ниже) открытия

интервале $[t_{i-1}, t_i]$ (в частности, если $\delta = \delta_0$, то $A_i(\delta)$ равна разности между максимальной и минимальной ценой за день). Типичный пример поведения $V_f(\delta)$ в двойном логарифмическом масштабе представлен на рис.5 для компании Microsoft .

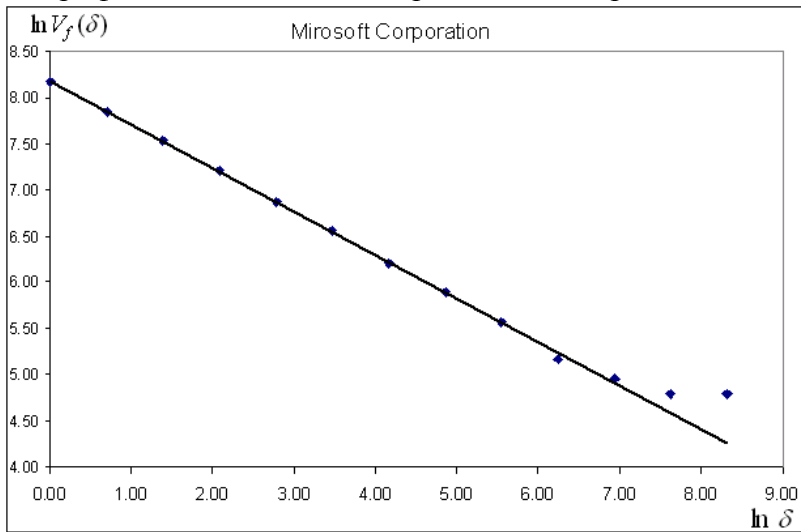


Рис.5. Зависимость $V_f(\delta)$ в двойном логарифмическом масштабе для временного ряда поведения цен компании Microsoft Corporation, длиной 1024 дня. Видно, что точки хорошо ложатся на прямую, начиная с $\delta = 256$.

Мы видим, что данные почти точно ложатся на прямую линию, кроме двух последних точек, где линейный режим имеет излом. Для определения значения μ по этим данным следует исключить две последние точки и найти линию регрессии $y = ax + b$ с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Тогда $\mu = -a$.

При уровне надежности $\alpha = 0.95$ в приведенном примере $\mu = 0.472 \pm 0.008$, $R^2 = 0.999$. Здесь R^2 - коэффициент детерминации для линии регрессии.

Отметим, что для каждой из 30 компаний график $V_f(\delta)$ почти точно ложится на прямую также и на всех меньших репрезентативных интервалах вплоть до 32-х, а иногда даже до 16-ти дней. При этом на интервалах меньших, чем 500 дней излом линейной части графика как правило исчезает. Типичный пример $V_f(\delta)$ на интервале 32 дня представлен на рис. 6 (слева). При $\alpha = 0.95$ мы получаем $\mu = 0.571 \pm 0.071$, $R^2 = 0.992$.

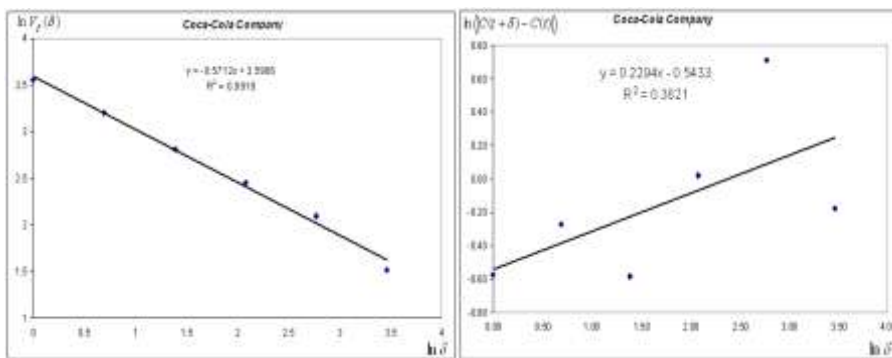


Рис.6. Лог-лог диаграммы для численного определения индекса фрактальности μ (слева) и показателя Херста H (справа), по одному и тому же отрезку финансового временного ряда, длиной 32 дня. Видно, что индекс фрактальности может быть определен гораздо более точно, чем показатель Херста

Чтобы оценить преимущества построенного алгоритма сравним его с методом вычисления фрактальной размерности с помощью показателя Херста H . Для фрактальных временных рядов этот метод традиционно считается наиболее эффективным. Как известно, показатель Херста H определяется на основе предположения, что

$$\langle |f(t + \delta) - f(t)| \rangle \sim \delta^H \text{ при } \delta \rightarrow 0, \quad (14)$$

где угловые скобки означают усреднение по временному интервалу. Чтобы сравнить индекс μ с показателем H введем следующее естественное определение средней амплитуды $\langle A_i(\delta) \rangle$ на разбиении ω_m (см. (5,6)):

$$\langle A(\delta) \rangle \equiv m^{-1} \sum_{i=1}^m A_i(\delta) \quad (15)$$

Умножим (6) на $m^{-1} \sim \delta$ и подставим в (8). Получим:

$$\langle A(\delta) \rangle \sim \delta^{H_\mu} \text{ при } \delta \rightarrow 0, \quad (16)$$

где

$$H_\mu \equiv 1 - \mu \quad (17)$$

Как уже отмечалось (см. введение), если $f(t)$ реализация гауссовского случайного процесса, то показатель H связан с размерностью D , а следовательно и с индексом μ , соотношением:

$$H = 2 - D_\mu = 1 - \mu \quad (18)$$

Следовательно, в этом случае $H = H_\mu$. Однако реальные финансовые ряды, как правило, не являются гауссовыми и поэтому значения H_μ и H могут сильно различаться. Действительно, в формуле (16) мы имеем степенной закон для средней амплитуды функции $f(t)$ на интервале длиной δ , в то время как в формуле (14) мы имеем степенной закон для средней разности между начальным и конечным значением $f(t)$ на том же интервале. Как оказывается, индекс μ вычисляется на порядок более точно, чем показатель Херста H в подавляющем большинстве случаев. В качестве типичного примера на рис. 6 представлены диаграммы для определения μ и H для одного и того же ряда представленного на рис. 5. В данном случае для $\alpha = 0.90$ результаты оказались следующими:

$$\mu = 0.571 \pm 0.071, \quad H_\mu = 0.429 \pm 0.071, \quad R^2_\mu = 0.992$$

$$H = 0.229 \pm 0.405, \quad R^2_H = 0.382.$$

Как и следовало ожидать индекс μ определен намного точнее, чем показатель H .

Таким образом главным преимуществом индекса μ по сравнению с другими фрактальными показателями (в частности с показателем Херста H) является то, что соответствующая ему величина $V_f(\delta)$ имеет быстрый выход на степенной асимптотический режим. Это дает возможность использовать его в качестве локальной характеристики, определяющей динамику исходного процесса, поскольку репрезентативный масштаб, необходимый для надежного определения индекса μ можно считать имеющим тот же порядок, что и характерный масштаб основных состояний процесса. К таким состояниям относятся флэты (периоды относительного спокойствия) и тренды (периоды относительно длительного движения вверх или вниз). Чтобы соотнести значение μ с поведением временного ряда, естественно ввести функцию $\mu(t)$ как такое значение μ , которое еще может быть вычислено с приемлемой точностью на минимальном, предшествующем t интервале τ_μ . В случае непрерывного аргумента t в качестве такого интервала можно было бы взять произвольно малый интервал. Однако, поскольку на практике временной ряд всегда имеет минимальный масштаб (в нашем случае он равен одному дню), то τ_μ имеет конечную длину (в нашем случае мы берем $\tau_\mu = 32$ дня).

Как оказывается, использование функции $\mu(t)$ позволяет существенно продвинуться в решении двух основных задач анализа временных рядов – задачи идентификации и задачи прогноза.

3. Финансовые ряды. Идентификация и прогноз.

Задача идентификации обычно заключается в корректном определении макросостояния системы на основе наблюдаемой реализации временного ряда. Для решения этой задачи применительно к финансовым рядам была рассчитана функция $\mu(t)$ для каждой из компаний, входящих в индекс Доу-Джонса. На рис.7 представлен типичный фрагмент ценового ряда одной из таких компаний вместе с вычисленной для этого фрагмента функцией $\mu(t)$.



Рис.7. Ежедневные цены акций компании Exxon Mobil Corporation (правая шкала, японские свечи) и график функции $\mu(t)$ (левая шкала, сплошная линия).

Достаточно беглого взгляда на рис.7, чтобы понять, что индекс μ имеет отношение к поведению временного ряда. Действительно, на интервале между 1-м и 39-м днем, где цены ведут себя относительно стабильно (флэт), $\mu(t) > 0.5$. Далее, одновременно с развитием тренда на графике цен, $\mu(t)$ резко падает ниже значения $\mu=0.5$ и наконец после 56-го дня, где цены находятся в промежуточном состоянии между трендом и флэтом, $\mu(t)$ возвращается к значению $\mu \approx 0.5$. Таким образом, исходный ряд оказывается тем стабильнее, чем больше значение μ . При этом, если $\mu > 0.5$, то наблюдается флэт, если $\mu < 0.5$, наблюдается тренд. Наконец, если $\mu \approx 0.5$, то процесс находится в промежуточном состоянии между трендом и флэтом. Подобная корреляция между значением μ и характером поведения исходного временного ряда наблюдается для подавляющего большинства его фрагментов [10]. На рис. 8 приведена одна из универсальных эмпирических зависимостей между индексом фрактальности и одним из естественных показателей стабильности временного ряда F , равному разности между текущей ценой C_i и ценой 32 дня назад, нормированной на вариацию ряда за 32 дня:
$$F = (C_i - C_{i-32}) / \sum_{j=i-31}^i |C_j - C_{j-1}|.$$

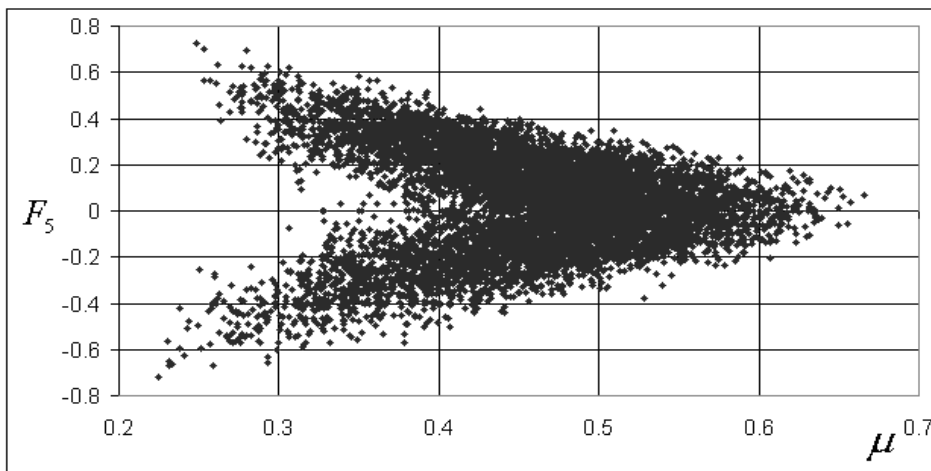


Рис.8. Зависимость показателя F от индекса фрактальности μ .

Из этой диаграммы видна явная корреляция между значением индекса μ и стабильностью ценового ряда. При этом чем больше значение μ , тем стабильнее поведение ряда и чем меньше μ , тем сильнее в исходном ряде выражен тренд.

Теоретическое обоснование такой корреляции мы начнем с рассмотрения винеровского случайного процесса, который является классической моделью броуновского движения (случайного блуждания). Напомним, что эта модель основана на двух постулатах. Напомним, что классическая модель броуновского движения основана на двух постулатах. Во-первых, приращения процесса на любом интервале времени имеют нормальное (гауссово) распределение с нулевым средним, которое следует из центральной предельной теоремы и получается как результат суммирования достаточно большого числа независимых случайных факторов. Во-вторых, приращения на непересекающихся интервалах являются статистически независимыми. Из этих постулатов следует, что:

$$\langle (X(t) - X(t_0))^2 \rangle = \sigma^2 |t - t_0|, \quad (19)$$

где угловые скобки означают статистическое усреднение по временному интервалу, $X(t)$ и $X(t_0)$ – значения процесса соответственно в моменты времени t и t_0 , σ^2 – дисперсия за единицу времени (в финансах параметр σ известен как волатильность). Из (19) можно получить, что этот процесс преобразуется сам в себя при изменении масштаба времени в b раз и одновременном изменении пространственного масштаба в $b^{1/2}$ раз. Поэтому фрактальная размерность графика реализации такого процесса $D=1.5$ ($\mu=0.5$).

Далее, поскольку винеровский процесс не имеет памяти, то этот график в любой своей части занимает промежуточное положение между трендом и флэтом. С другой стороны, поскольку при вычислении индекса μ соответствующий репрезентативный масштаб $\tau_\mu \gg 1$, то исходя из формул (15,16) процесс тем стабильнее, чем больше значение μ (см. рис. 8). Поэтому случай $\mu < 0.5$ естественно интерпретировать как тренд, а случай $\mu > 0.5$ – как флэт. Таким образом, индекс μ действительно является показателем стабильности исходного временного ряда.

Напомним, что в соответствии с гипотезой «эффективного» рынка (т.е. рынка, на котором цены отражают всю доступную информацию) поведение цен должно быть близким к случайному блужданию. Проверка этого предположения обычно сводится к исследованию распределения ценовых приращений на нормальность и к изучению их автокорреляционной функции на предмет наличия зависимости. Выводы, которые можно сделать из подобных исследований не позволяют оценить степень отклонения реальных финансовых рядов от случайного блуждания. Использование функции $\mu(t)$ позволяет провести более подробный анализ и в частности выяснить, что временные ряды проводят в состоянии близком к случайному блужданию менее 30 % общего времени [11]. Используя полученные численные данные и вид функции $\mu(t)$ (см. рис. 7) можно сделать следующий вывод:

реальные временные ряды демонстрируют сложное непериодическое поведение, при котором тренды и флэты хаотическим образом сменяют броуновское движение. При этом, зная значение функции $\mu(t)$, можно сказать какой тип поведения преобладает в каждой точке ряда.

Однако наиболее интересным представляется использование построенного фрактального анализа для решения задачи прогноза, которая в общем случае состоит в определении каких-либо количественных или хотя бы качественных характеристик будущего поведения временного ряда на базе имеющихся исторических данных. Оказывается, что наличие степенной зависимости для функции $V_f(\delta)$ в достаточно широком диапазоне масштабов позволяет предложить новый подход к прогнозированию фазовых переходов в хаотических системах. Действительно, обратимся к формулам (16, 17) и рис.9. Предположим, что временной ряд находится в состоянии случайного блуждания. В этом случае, $D = 1.5$ ($\mu = 0.5$) и зависимость $\langle A(\delta) \rangle$ описывается сплошной линией на рис.9.

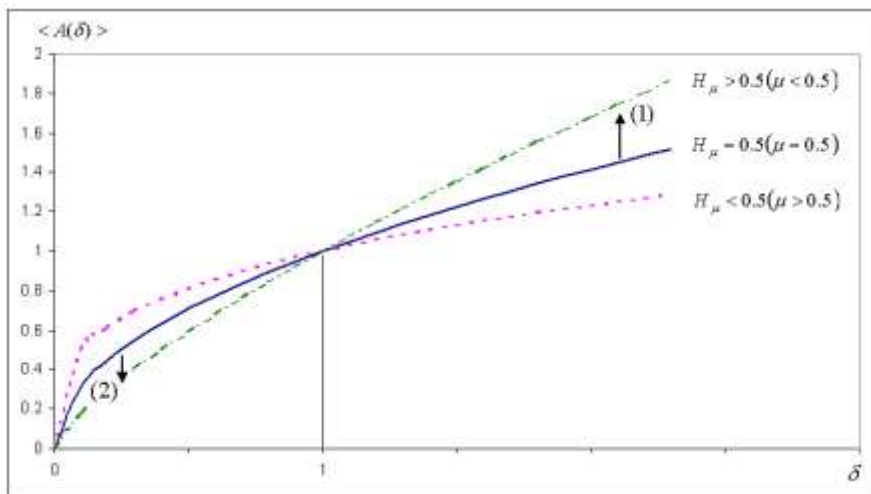


Рис.9. Зависимость $\langle A(\delta) \rangle$ для временного ряда при различных значениях μ (H_μ): сплошная линия соответствует изменению амплитуды для броуновского движения, пунктирная и штрихпунктирная - для трендов и флэтов, соответственно.

Предположим, что в системе произошел фазовый переход, в результате которого временной ряд переходит в состояние тренда. Это означает, что через некоторое время (т.е. для больших δ) амплитуда колебаний увеличится (стрелка (1) на рис.9). Однако, как видно из графиков, переход временного ряда в новое состояние вызовет одновременное уменьшение амплитуды колебаний на малых масштабах (стрелка (2) на рис.9). Таким образом, увеличение крупномасштабных флуктуаций ведет к подавлению мелкомасштабных флуктуаций и наоборот. Этот эффект который служит ключом к прогнозу сильных флуктуаций на больших масштабах и следует из наличия степенного закона был действительно обнаружен и подтвержден обработкой большого количества эмпирических данных.

Заключение.

Подведем основные итоги работы. Для одномерной фрактальной функции $f(t)$ на основе величины $V_f(\delta)$ (6) мы ввели новые фрактальные показатели: индекс фрактальности μ (8) и размерность минимального покрытия D_μ (9), тесно связанную с индексом μ . Как предельное значение при $\delta \rightarrow 0$, D_μ совпадает с обычной фрактальной размерностью D . Однако по сравнению с другими известными фрактальными показателями алгоритм вычисления размерности D_μ (и соответственно индекса μ) имеет быстрый выход на степенной асимптотический режим для D . Численные расчеты, выполненные для ценовых рядов акций компаний, входящих в индекс Доу-Джонса, показали, что репрезентативный масштаб, необходимый для определения индекса μ с приемлемой точностью, на два порядка меньше, чем, например, соответствующий масштаб для определения показателя

теля Херста Н. Это позволяет рассматривать индекс μ в качестве локального фрактального показателя. Поэтому для каждого момента t временного ряда мы ввели функцию $\mu(t)$ как значение μ , вычисленное на минимальном, предшествующем t интервале τ_μ . Использование этой функции позволило нам серьезно продвинуться как в плане идентификации, так и в плане прогноза финансовых временных рядов. В плане идентификации мы обосновали теоретически и подтвердили численно на основе достаточно большого количества эмпирических данных тот факт, что индекс μ является показателем стабильности временного ряда. Чем больше значение μ , тем стабильнее ряд. При этом случай $\mu < 0.5$ может быть интерпретирован как тренд, а случай $\mu > 0.5$ - как флэт. Случай же $\mu \approx 0.5$ соответствует броуновскому движению. Это позволило нам с помощью функции $\mu(t)$ протестировать исходные ценовые ряды с тем, чтобы выделить в них броуновскую компоненту. В плане же прогноза обоснован теоретически и подтвержден расчетами эффект увеличения крупномасштабных флуктуаций при подавлении мелкомасштабных. Этот эффект, очевидно, может быть полезным для предсказания сильных колебаний на финансовом рынке.

Заметим, что построенный локальный фрактальный анализ можно использовать также для прогноза землетрясений [12], ишемических заболеваний [13] и т.д. Однако при рассмотрении соответствующих временных рядов где каждому значению аргумента соответствует только одно значение функции, эти ряды следует первоначально преобразовать в ряды амплитуд, которые заданы на интервалах много больше, чем «масштаб разрешения» δ_0 . И, наконец, следует сказать, что построенный фрактальный анализ легко обобщается, с сохранением всех своих преимуществ, на многомерные фрактальные функции (что очень важно, например, для теории распознавания образов и теории сжатия изображений). Кроме того, с помощью показателя μ получается более адекватное выражение для мультифрактального спектра [10,14]. Значительно более нетривиальным является использование построенного алгоритма для вычисления размерностей странных аттракторов на основе относительно небольшого числа исторических данных. Оказывается, что использование такой процедуры позволяет подойти к проблеме предсказания катастроф совершенно с иной стороны.

Литература.

1. Hausdorff F. Dimension und Ausseres Mass // *Mathematische Annalen*, 1919, № 79, pp. 157-179.
2. Feder J. *Fractals*. // New York: Plenum Press, 1988.
3. Малинецкий Г.Г., Потапов А.В., Подлазов А.В. *Нелинейная динамика. Подходы, результаты, надежды*. // М.: КомКнига, 2006.
4. Mandelbrot B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. // San-Francisco: W. H. Freeman, 1982.
5. Smith L.A., Fournier J.-D., and Spiegel E.A. Lacunarity and intermittency in fluid turbulence // *Physics Letters A*, 1986, 114, 46S-468.
6. Зельдович Я.Б., Соколов Д.Д. Фракталы. Подобие, промежуточная асимптотика // *УФН*, 1985, т.146, вып.3, стр. 493-506.
7. Grassberger P., Procaccia I. Characterization of Strange Attractors. // *Phys. Rev. Lett.* 50, 1983, 346-349.
8. M.M. Dacorogna, R. Gencay, U.A. MGuller, R.B. Olsen, O.V. Pictet // *An Introduction to High-Frequency Finance*, San Diego, Academic Press, 2001.
9. Peters E.E., *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics* // New York, Wiley, 1994

10. Dubovikov M.M, Starchenko N.S., Dubovikov M.S. Dimension of the minimal cover and fractal analysis of time series // *Physica A*, 339, 2004, pp.591-608
11. Старченко Н.В. Локальный анализ хаотических временных рядов с помощью индекса фрактальности // Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Москва, 2005.
12. R. Yulmetyev, F. Gafarov, P. Hanggi, R. Nigmatullin and S. Kayumov, Possibility between earthquake and explosion seismogram differentiation by discrete stochastic non-Markov processes and local Hurst exponent analysis. // *Phys. Rev. E* 64, 2001, 066132-1 – 0066132-13
13. Pedro Bernaola-Galvan, Plamen Ch. Ivanov, Luis A. Nunes Amaral, and H. Eugene Stanley Scale Invariance in the Nonstationarity of Human Heart Rate. // *Phys. Rev. Let.* V87, Number16, 2001, 168105-1 – 168105-4
14. Dubovikov M.M., Starchenko N.S., Variation index and its applications to analysis of fractal structures. // *Sci. Almanac Gordon* № 1, 2003, 1-30.