

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. КЕЛДЫША
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

КОЧКАРОВ Азрет Ахматович

НОВЫЕ ТЕОРЕТИКО-ГРАФОВЫЕ ПОДХОДЫ
В МОДЕЛИРОВАНИИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Специальность 05.13.18 –
Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2005

Работа выполнена в Институте прикладной математики
им. М.В. Келдыша Российской академии наук

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук, профессор
Малинецкий Георгий Геннадьевич

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук, профессор
Дмитриев Александр Сергеевич

доктор технических наук, профессор
Кульба Владимир Васильевич

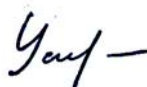
Ведущая организация: Ярославский государственный
университет им. П.Г. Демидова

Защита диссертации состоится « ____ » _____ 2005 г.
в ____ час. на заседании диссертационного совета Д002.024.02 при
Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
по адресу: Москва, Миусская пл., д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института
прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Автореферат разослан « ____ » _____ 2005 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н.



Г.В. Устюгова

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. На протяжении последних пятнадцати лет в Институте прикладной им. М.В. Келдыша РАН по инициативе МЧС России совместно с другими академическими институтами¹ проводились исследования^{2,3,4}, которые легли в основу концепции управления рисками⁵. Особое внимание в новой концепции уделяется подходам и методам, распространенным в нелинейной динамике^{5,6}.

Одно из центральных мест в исследованиях по управлению рисками занимает анализ кризисов, то есть ситуаций, когда система оказывается не в состоянии в полном объеме выполнять возложенные на нее функции. Системы (технические, социально-экономические и т.п.), рассматриваемые в теории управления риском, могут быть подвержены внешнему влиянию (воздействию) на протяжении небольшого промежутка времени. Нередко такие воздействия являются внезапными и интенсивными, а поэтому рассматриваемые системы не всегда могут “противостоять” этим поражающим факторам. Поражающие воздействия, приложенные к системе, могут приводить к ухудшению ее функционирования, а порой и к кризисам.

Классическая теория надежности⁷ не предоставляет необходимых инструментов для исследования (оценки состояния системы в целом, прогнозирования поведения системы под влиянием поражающих факторов, методов повышения или сохранения сопротивляемости систем, функционирующих в условиях поражающих воздействий, и т.д.) качества функционирования сложных систем в “зоне форс-мажорных обстоятельств”. Пребывание систем именно в этой зоне приводит к необходимости разработки соответствующих математических моделей.

Следует также отметить, что исследование систем со сложной структурой в классической теории надежности сводится во многом к изучению систем со структурами в виде последовательно-параллельных схем^{8,9}, что

¹ Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, Комиссия по устойчивому развитию Государственной Думы РФ и др.

² Малинецкий Г.Г., Залиханов М.Ч., Воробьев Ю.Л. и др. Кризисы современной России и система научного мониторинга // Проблемы безопасности при чрезвычайных ситуациях. №1, 2002.

³ Малинецкий Г.Г., Воробьев Ю.Л., Махутов Н.А. Кризисы современной России и научный мониторинг // Вестник РАН, 2003, т.73, №7, С.579-593.

⁴ Архипова Н.И., Кульба В.В. Управление в чрезвычайных ситуациях. – М.: РГГУ, 1998.

⁵ Владимиров В.А., Кульба В.В., Малинецкий Г.Г. и др. Управление риском. – М.: Наука, 2000.

⁶ Малинецкий Г.Г., Курдюмов С.П. Нелинейная динамика и проблемы прогноза // Вестник РАН, 2001, т.71, №3. С.210-224.

⁷ Барлоу Р., Прошан Ф. Статистическая теория надежности и испытание на безотказность. – М.: Наука, 1984.

⁸ Райшике К., Ушаков И.А. Оценка надежности систем с использованием графов. – М.: Радио и связь, 1988.

⁹ Райшике К. Модели надежности и чувствительности систем. – М.: Мир, 1979.

также сказывается отрицательным образом на качестве проводимого исследования.

Живучесть системы, ее способность функционировать в условиях внешних поражающих воздействий будем называть *стойкостью* системы. С введением этого понятия очерчивается новая задача в рамках теории управления рисками – *обеспечение стойкости сложных систем*.

Важнейшую роль в формальном представлении сложных систем играет ее структура – порядок межэлементных связей системы. Это наглядно подтверждает цикл работ научной школы профессора В.В. Кульбы¹⁰, посвященный управлению риском. В работах этой научной школы для моделирования поведения систем со сложной структурой используются методы теории взвешенных ориентированных графов¹¹. Такой подход уже позволил обнаружить ряд синергетических эффектов в поведении систем со сложной структурой. Несомненно, от структуры системы зависит ее стойкость. Важно знать также, какие изменения в структуре системы приведут к улучшению или ухудшению функционирования рассматриваемого объекта.

Цели работы.

1. Построение модели влияния поражающих факторов на систему и пространства по ее структуре внешних воздействий.
2. Разработка методов изменения структур систем для наделения их требуемыми свойствами и характеристиками для повышения их стойкости.
3. Исследование динамики и стойкости систем с регулярно изменяющимися структурами.
4. Разработка параллельных алгоритмов анализа сложных объектов, имеющих масштабно-инвариантную структуру.

Методы исследования. Все исследования, проведенные в настоящей работе, используют методы и подходы дискретной математики и теории графов, в частности. Аппарат теории графов наилучшим образом подходит для формального представления задач, связанных с изменением и преобразованием дискретных объектов, какими являются структуры систем.

Кроме того, в работе используются методы когнитивного моделирования, связанные с анализом динамики нелинейных процессов, развивающихся на ориентированных графах. Используются методы нелинейной динамики, теории вероятности, имитационного моделирования и теории фракталов.

Научная новизна. В диссертации формализовано понятие стойкости для сложных систем, попадающих в условия внезапных кратковременных

¹⁰ Кульба В.В., Кононов Д.А., Косяченко С.А., Шубин А.Н. Методы формирования сценариев развития социально-экономических систем. – М.: СИНТЕГ, 2004.

¹¹ Робертс Ф.С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. – М.: Наука, 1986.

воздействий. Построена математическая модель распространения поражающего воздействия по системе. На ее основе выработаны рекомендации по повышению стойкости и обеспечению функционирования систем в условиях форс-мажорных обстоятельств.

Введены такие ключевые понятия, как *структурная уязвимость элемента системы* и *предельная надежность элемента системы*. Они являются, соответственно, качественным и количественным параметрами оценки стойкости всей исследуемой системы. Исследовано влияние контуров положительной обратной связи в структуре системы на ее функционирование.

Для развивающихся систем с изменяющейся структурой сформулировано понятие *структурной динамики*. Продемонстрирована возможность появления в таких системах *структурного хаоса*.

Для класса фрактальных графов предложены эффективные параллельные алгоритмы, позволяющие решать ряд классических задач теории графов существенно быстрее известных алгоритмов.

Практическая ценность. Полученные результаты используются в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 4-ом Центральном научно-исследовательском институте Министерства обороны РФ, Московском физико-техническом институте, Российской академии государственной службы при Президенте РФ, в Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, в Институте машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, в Институте социально-политических исследований РАН.

Полученные результаты демонстрируют возможность широкого использования методов теории графов в выявлении синергетических эффектов, что представляется важным в прикладном аспекте как для специалистов по управлению риском и инженеров, так и для ученых, занимающихся исследованием синергетических явлений и теорией графов.

Полученные результаты использованы для анализа стойкости ряда систем управления техническими объектами и одной социально-экономической системы.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на 4-ом и 5-ом Всероссийских симпозиумах “Математическое моделирование и компьютерные технологии” (Кисловодск, 2000 и 2002), 2-й Международной конференции “Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики” (Нальчик, 2001), 10-ой, 11-ой и 12-ой Международных конференциях “Проблемы управления безопасностью сложных систем” (Москва, 2002, 2003 и 2004), Международной конференции “Математическое моделирование социальной и экономической динамики” (Москва, 2004), 47-ой научной конференции Московского физико-технического института “Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук” (Москва, 2004), 8-ой региональ-

ной научно-технической конференции “Вузовская наука – Северокавказскому региону” (Ставрополь, 2004), 12-ой Международной конференции “Математика. Компьютер. Образование” (Пушино, 2005), 1-ом Международном междисциплинарном семинаре памяти чл.-корр. РАН С.П. Курдюмова “Идеи синергетики в естественных науках” (Тверь, 2005), 1-ой Международной конференции “Системный анализ и информационные технологии” (Переяславль-Залесский, 2005), на семинарах Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН.

Публикации. По результатам выполненной работы имеется 21 публикация (см. список публикаций).

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения и трех глав, изложенных на 118 страницах, содержит 23 рисунка и библиографию из 102 наименований.

II. СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении излагаются цели работы. Дается обзор существующих методов и подходов к оценке поведения сложных систем в условиях форс-мажорных обстоятельств. Ставятся задачи и обосновываются методы моделирования систем, находящихся в подобных условиях. Рассматривается целесообразность изменения структуры систем для улучшения их способности противостоять внешним негативным воздействиям. Приводятся примеры развивающихся систем с изменяющейся структурой.

Дается краткое изложение содержания диссертации.

В первой главе представлен *теоретико-графовый подход к описанию сложных систем в условиях форс-мажорных обстоятельств* и построена модель распространения поражающих воздействий по системе в рамках этого подхода. Предложенная модель апробирована на ряде сложных систем.

Существуют общеизвестные методы повышения надежности функционирования систем. Одним из распространенных является – резервирование¹² (и его виды – мажоритирование, дублирование и т.п.). В условиях ограниченности финансового (ресурсного) обеспечения не представляется возможным продублировать все элементы системы, предполагающей попадание под внешнее влияние. Поэтому требуется изучить реакцию системы на “стороннее” влияние, найти ее наиболее уязвимые “места” и рекомендовать их к резервированию. Для достижения этой цели важно подобрать метод формального представления системы, внешнего воздействия и определить динамику распространения внешнего влияния по системе.

Под *системой* обычно понимается объединение любых элементов, рассматриваемых как связное целое. Каждый элемент системы производит определенные действия, что позволяет всей системе выполнять возложен-

¹² Острейковский В.А. Теория надежности. – М.: Высшая школа, 2003.

ные на нее функции. Особое значение для системы имеет *порядок связей* ее элементов, т.е. порядок взаимодействия элементов системы при ее функционировании. Факт непосредственного (без посредников) взаимодействия между двумя элементами системы и определяет наличие *связи* между ними. Общую картину связей между всеми элементами системы отражает *структура системы*. Опыт исследования многих сложных систем показывает, что на начальном этапе анализа их элементы целесообразно представлять в виде вершин графа, наделенных определенными свойствами, а взаимодействие описывать с помощью ребер. Иначе говоря, структура – это организация целого из составных частей, тесно взаимодействующих друг с другом при функционировании системы⁴. Будем считать тождественными следующие понятия: *граф системы и структура системы, вершина графа и элемент системы, ребро графа и связь между элементами системы*. Отметим, что ребра графа могут отражать различные типы связей между элементами рассматриваемой системы – механические, электронные, информационные и т.д.

Для всякого конечного графа будем использовать обозначение – $G = (V, E)$, где $V = \{v_i\}, i, j = \overline{1, n}$ – множество вершин, а $E = \{e = (v_i, v_j) | i \neq j\}$ – множество его ребер¹³.

Распространение воздействия от одного элемента системы к другому на графе системы будем задавать *ориентированным ребром* – ребром с заданными началом и концом. Ориентированное ребро часто называют *дугой*, а граф с дугами – *орграфом*¹³. Орграф структуры моделируемой системы не будет иметь петель (т.е. дуг, конец и начало которых совпадают).

На орграфе $G = (V, E)$ системы для вершины $v_i \in V, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ весом $0 < w_i(t) \leq 1$ является величина *показателя качественного состояния элемента системы*, соответствующего вершине v_i . А весом $w(v_i, v_j) = \varepsilon_{ij}, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$, дуги $(v_i, v_j) \in E$ является число $0 < \varepsilon_{ij} \leq 1$, равное сохранившейся доле передаваемого воздействия, при переходе от вершины v_i к вершине v_j и называемое *коэффициентом сопротивляемости*.

Процесс изменения весов вершин графа системы можно отразить следующим правилом, называемым *импульсным воздействием*. Оно во многом напоминает *импульсный процесс*¹¹ и заключается в следующем. Импульсное воздействие определяется *импульсом* $imp_j(t), j \in \{1, 2, \dots, n\}$ в дискретном времени $t = 0, 1, 2, 3, \dots$, который задается отношением

¹³ Дистель Р. Теория графов. – Новосибирск: Изд-во Института математики, 2002.

$$imp_j(t) = w_j(t) / w_j(t-1), \text{ при } t > 0. \quad (1)$$

Тогда для $t \geq 0$ для i -ой вершины графа G определим импульсное воздействие

$$w_i(t+1) = w_i(t) \prod_{j=1}^{\deg v_i} \varepsilon_{ji} imp_j(t), \quad (2)$$

или

$$w_i(t+1) = w_i(t) \prod_{j=1}^{\deg v_i} (1 - \varepsilon_{ji} imp_j(t)), \quad (3)$$

полагая при этом, что $\deg v_i$ – число входящих в вершину v_i дуг.

Формулы (1), (2) и (3) задают изменения весов вершин графа $G = (V, E)$, тем самым определяя динамику распространения внешних воздействий по системе. Формула (2) соответствует *возрастающим* импульсным воздействиям, которые увеличиваются при переходе от одной вершины к другой. А формула (3) – *затухающим*, которые уменьшаются при переходе от одной вершины к другой.

Автономное импульсное воздействие на взвешенном орграфе G определим по правилу (2) с вектором начальных значений $\mathbf{W}(0) = (w_1(0), w_2(0), \dots, w_n(0))$ и вектором импульсов

$$\mathbf{Imp}(0) = (imp_1(0), imp_2(0), \dots, imp_n(0)), \quad (4)$$

задающим импульс $imp_j(0)$ в каждой вершине v_j в момент времени $t = 0$. Автономное импульсное воздействие в паре с вектором начальных значений описывает состояние системы в начальный момент времени, когда под влияние внешних поражающих воздействий попадают все элементы системы.

Автономное импульсное воздействие, в котором вектор $\mathbf{Imp}(0) = (1, 1, \dots, imp_i(0), \dots, 1)$, $imp_i(0) > 0$ имеет только i -ую отличную от единицы компоненту, назовем *простым воздействием с начальной вершиной* $v_i \in V$. Простое импульсное воздействие описывает состояние системы в начальный момент времени, когда внешнее воздействие поражает один из элементов системы. А именно, тот, который соответствует i -ой вершине графа системы.

В соответствии с описанным импульсным воздействием на орграфе можно ввести различные критерии отказа моделируемой системы (технической, социально-экономической, биологической и т.п.). К примеру, можно считать, что система находится в состоянии отказа, если показатель качественного состояния хотя бы одного из наиболее значимых элементов системы ниже некоторого допустимого уровня. Этот уровень будем называть *критическим уровнем* качественного состояния элемента v и обозначать $cr(v)$. Если показатель качественного состояния элемента ниже критического уровня, то элемент не в состоянии выполнять возложенных на него функций, или функционировать требуемое время. Элемент, находящийся в состоянии отказа, не передает распространяющееся по системе импульсное воздействие.

Представление исследуемой системы в виде взвешенного по правилу графа $G = (V, E)$ и формализация внешнего влияния на систему как автономного импульсного воздействия (1)–(4) определяет *модель распространения поражающих воздействий по системе*.

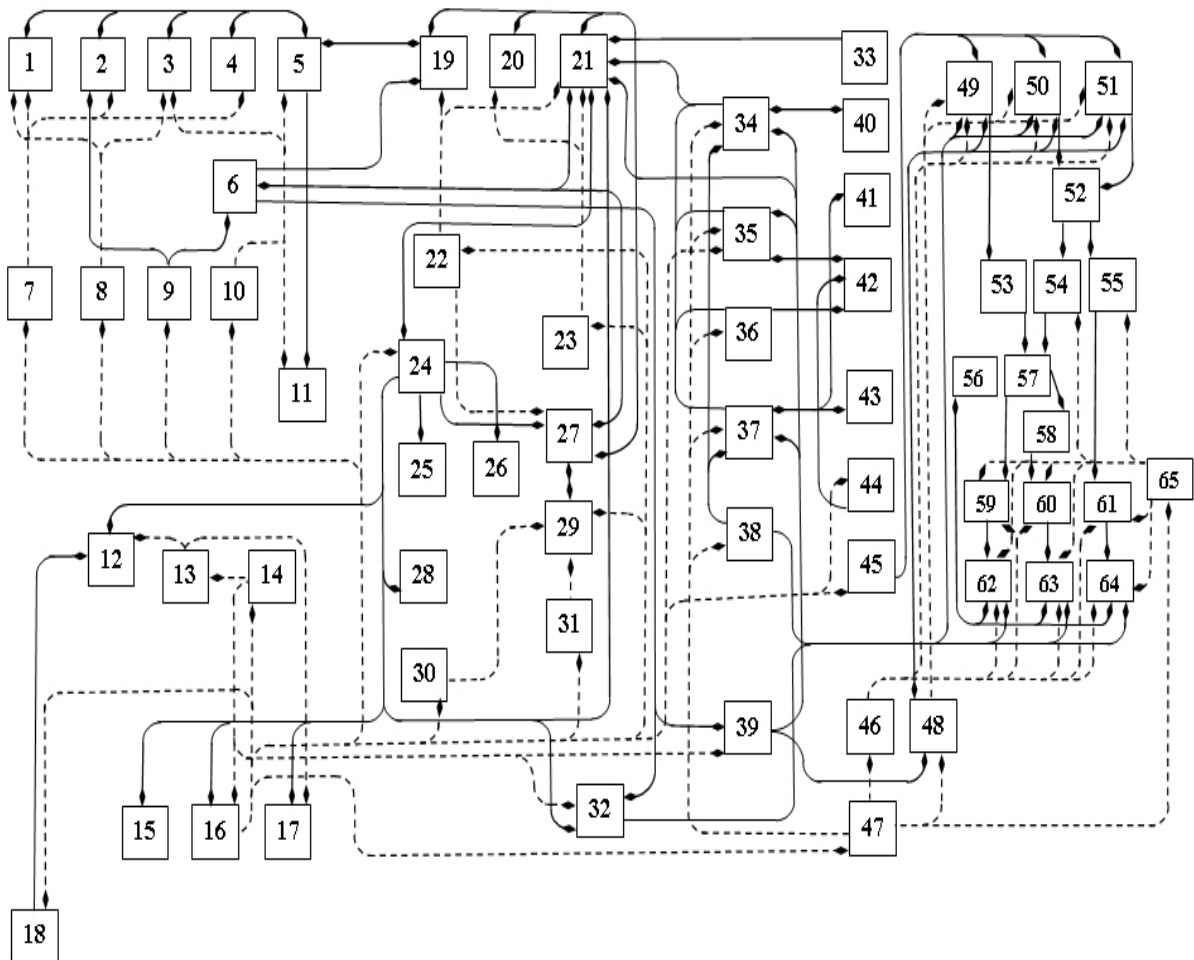


Рис. 1. Пример графа системы управления. Пунктирными линиями изображены связи, по которым подается напряжение, а сплошными – информационный сигнал.

В диссертации предложен алгоритм, позволяющий выяснить, как внешнее воздействие распространяется по структуре системы и влияет на ее функционирование. Приведем конкретный пример использования этого алгоритма.

На рис. 1 изображен граф системы управления сложным техническим объектом, подверженный импульсным воздействиям, имеющим два вида связей. Граф, изображенный на рис. 1 со всеми показателями качественного состояния элементов и коэффициентов сопротивляемости, получен при экспертной поддержке специалистов соответствующего профиля.

Система может быть подвержена двум типам внешних воздействий. Первый – электромагнитные воздействия, которые могут распространяться по обоим видам связей. Второй – информационные воздействия, которые могут распространяться только по связям, изображенными сплошными линиями.

Компьютерный эксперимент, в котором поочередно к каждой вершине прилагались различные затухающие импульсные воздействия (3) в соответствии с предложенным алгоритмом, выявил “окна уязвимости” исследуемой системы.

Например, если импульсное воздействие приложено к элементу 16, то из строя в течение незначительного промежутка времени выходит более 90% элементов системы.

Если импульсное воздействие одновременно приложено сразу к двум элементам – 31 и 32, то из строя выходит более 80% элементов системы, в то время как те же импульсные воздействия, приложенные к этим элементам поочередно, не приносят существенного ущерба.

Обнаружены группы элементов – 1-5, 34-38 и 48-50, – которые являются *внутренними источниками воздействий*. Каждая из этих групп составляет в графе системы контур обратной связи. “Зацикливание” импульсного воздействия в контуре графа системы приводит к периодическому изменению весов вершин самого контура и оказывает влияние на веса соседних с вершинами контура вершин графа. Внутренние источники импульсных воздействий на графах систем приводят к появлению *остаточного эффекта*, когда из строя выходят элементы спустя длительное время после попадания системы под влияние внешних воздействий.

Как показывает практика, не всегда удается получить достоверные сведения о показателях качественного состояния элементов и коэффициентах сопротивляемости. В такой ситуации о стойкости системы можно судить и по одному лишь графу системы.

Структурной уязвимостью $\forall l(u)$ вершины $u \in V^*$ назовем число путей, концом которых является вершина u .

Структурная уязвимость элемента дает качественную оценку его расположения в структуре системы. Структурная уязвимость позволяет

судить о том, насколько безопасно расположение элемента в структуре системы относительно других элементов в период поражающих воздействий. Структурная уязвимость элемента определяет выгодность его расположения в структуре системы при распространении по системе поражающих воздействий.

Но структурная уязвимость не дает количественной оценки ухудшения надежности элемента при попадании системы в условия поражающих воздействий. Такой оценкой будет служить другой параметр, отчасти являющийся дополнением структурной уязвимости.

Важно знать, как к окончанию времени распространения импульсного воздействия по графу системы изменились показатели качественного состояния элементов системы. *Предельным показателем вершины u* назовем величину показателя качественного состояния соответствующего ей элемента системы на момент окончания времени воздействия, которую обозначим через $br(u)$.

Можно подсчитать сумму длин всех путей, концом которых является вершина u . Обозначим эту сумму через $ps(u)$ и назовем *мерой структурной уязвимости* вершины u .

ТЕОРЕМА 1.3. *Предельный показатель $br(u)$ вершины $u \in V^*$ графа $G^* = (V^*, E^*)$ с равными весами ε для всех ребер из E^* при автономном импульсном воздействии с начальным импульсом imp_0 , одинаковым для всех вершин из V^* , определяется формулой*

$$br(u) = w_u imp_0^{vl(u)+1} \varepsilon^{ps(u)},$$

где w_u – *показатель качественного состояния вершины u в начальный момент автономного импульсного воздействия.*

Существенной особенностью построенной модели является возможность описания выхода из строя элемента с бóльшим показателем качественного состояния. Этот факт красноречиво подчеркивает *прямую зависимость динамики показателей качественного состояния элемента системы от его положения в структуре, а также зависимость стойкости всей системы от этой структуры.*

Исследование модели распространения поражающих воздействий по системе позволило выработать ряд рекомендаций по сохранению и улучшению функционирования системы и наделению системы заданной стойкостью при ее проектировании. Рекомендации сформулированы в диссертационной работе в виде теорем.

В рамках предлагаемого подхода возможно исследование и социально-экономических систем. Это позволяет определить ряд сценариев, по которым будет развиваться система при различных внешних воздействиях. Полезность и практичность такого подхода продемонстрирована когнитивной моделью управления государством на примере Союза Сербии и

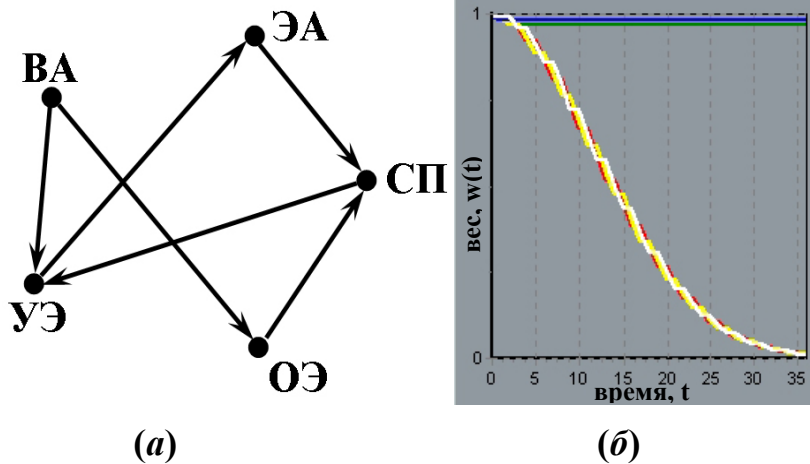


Рис. 2. Структура региональной социально-экономической системы

(напряженность) в регионе, **ОЭ** – оппозиционная элита региона, **УЭ** – управленческая элита региона, **ВА** – внешний арбитр, **ЭА** – экономическая активность региона.

Целесообразно также использовать в исследуемой модели *управляющие воздействия*, позволяющие повышать значения качественных показателей состояния элементов системы в любой момент времени, вмешиваясь тем самым в процесс распространения дестабилизирующих импульсных воздействий по системе. А также *внутренний ресурс системы* – периодическое восстановление значений качественных показателей состояния элементов системы на определенную величину.

Исследование модели разумно проводить при различных исходных данных (показателях качественного состояния элементов системы и коэффициентах сопротивляемости ребер) о состоянии системы и импульсных воздействиях, приложенных к различным вершинам. Это позволит сделать наиболее достоверные выводы о стойкости системы.

Своего критического уровня $cr(SP) = 0,01$ система со структурой на рис. 2а достигает за *характеристическое время* $t=33$ (см. рис. 2б). Если в структуру системы добавить обратные связи (к примеру $УЭ \rightarrow ОЭ$ или $СП \rightarrow ВА$), то на первый взгляд система должна стать более стойкой к внешним воздействиям. Но при указанных структурных изменениях системы характеристическое время уменьшится почти вдвое.

На рис. 3(а) представлен график изменения основного показателя системы – СП исследуемой региональной социально-экономической системы с внутренним ресурсом и внешним затухающим воздействием, приложенным к вершине (элементу) ВА. Наблюдается падение основного показателя.

Черногории.¹⁴

На рис. 2 представлена структура социально-экономической системы (см. рис 2а), типичная для многих небольших регионов (республик, областей) Российской Федерации. Система состоит из пяти основных элементов: **СП** – социальное положение

¹⁴ Кульба В.В., Кононов Д.А., Чернов И.В., Янич С.С. Сценарии управления государством (на примере Союза Сербии и Черногории) // Проблемы управления. 2005. № 5. – С. 33-42.

На рис. 3(б) представлен график изменения основного показателя системы СцПл, когда то же самое по величине внешнее затухающее воздействие, что и в предыдущем случае, при тех же исходных данных системы приложено к другому элементу системы – к вершине (элементу) ОЭ. В такой ситуации, в отличие от предыдущей, системе удастся восстановиться, благодаря внутреннему ресурсу, и зафиксировать значение основного показателя на некотором стабильном уровне, хотя и ниже исходного.

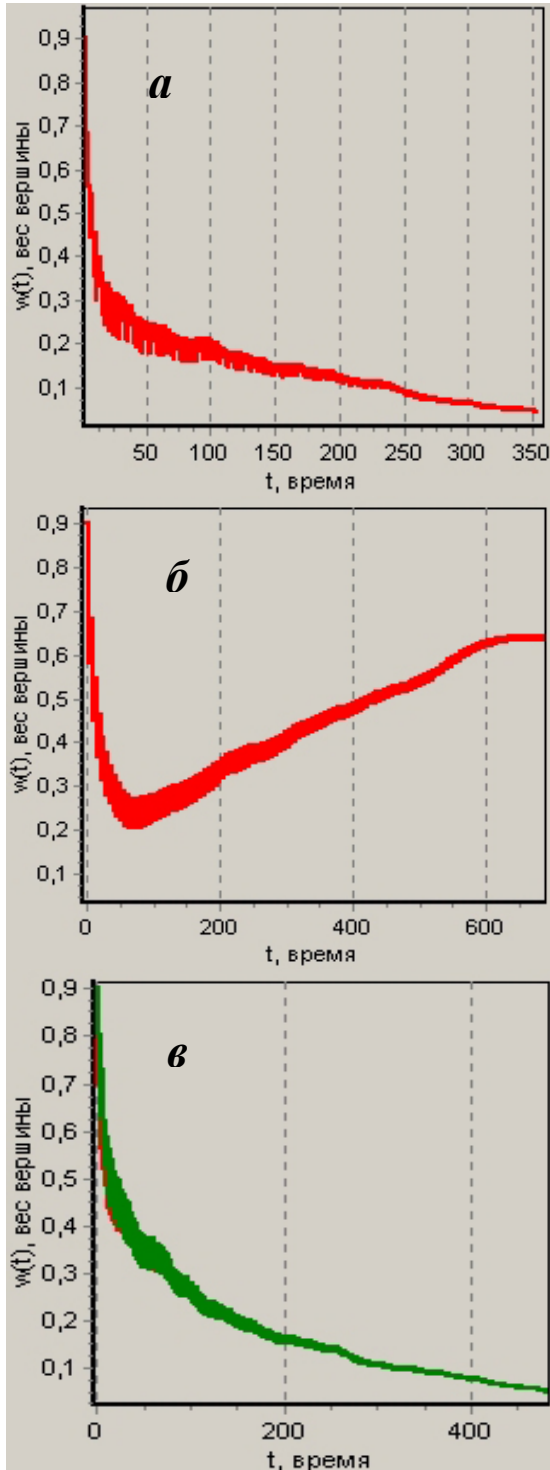


Рис. 3

ВА. Наблюдается падение основного показателя.

Управляющее воздействие, приложенное к системе в момент времени $t=75$ (см. рис. 4(б)), повысит значение показателей качественного состояния ее элементов, но не повлияет на общее состояние системы в даль-

На рис. 3(в) показан график изменения основного показателя системы СП, когда импульсное воздействие, в два раза меньшее, чем ранее, приложено сразу к двум элементам системы – ОЭ и ВА. Наблюдается падение значения СП.

Управляющие воздействия являются основным инструментом повышения значений показателей качественного состояния элементов системы. Но величина управляющего воздействия, время и точка его приложения должны быть определены в зависимости от распространяемого по системе импульсного воздействия.

Использование этой модели позволяет увидеть парадоксальные, неочевидные, на первый взгляд, способы управления социально-экономической системой.

На рис. 4(а) изображен график изменения основного показателя исследуемой региональной социально-экономической системы с внутренним ресурсом, когда затухающее импульсное воздействие приложено к элементу

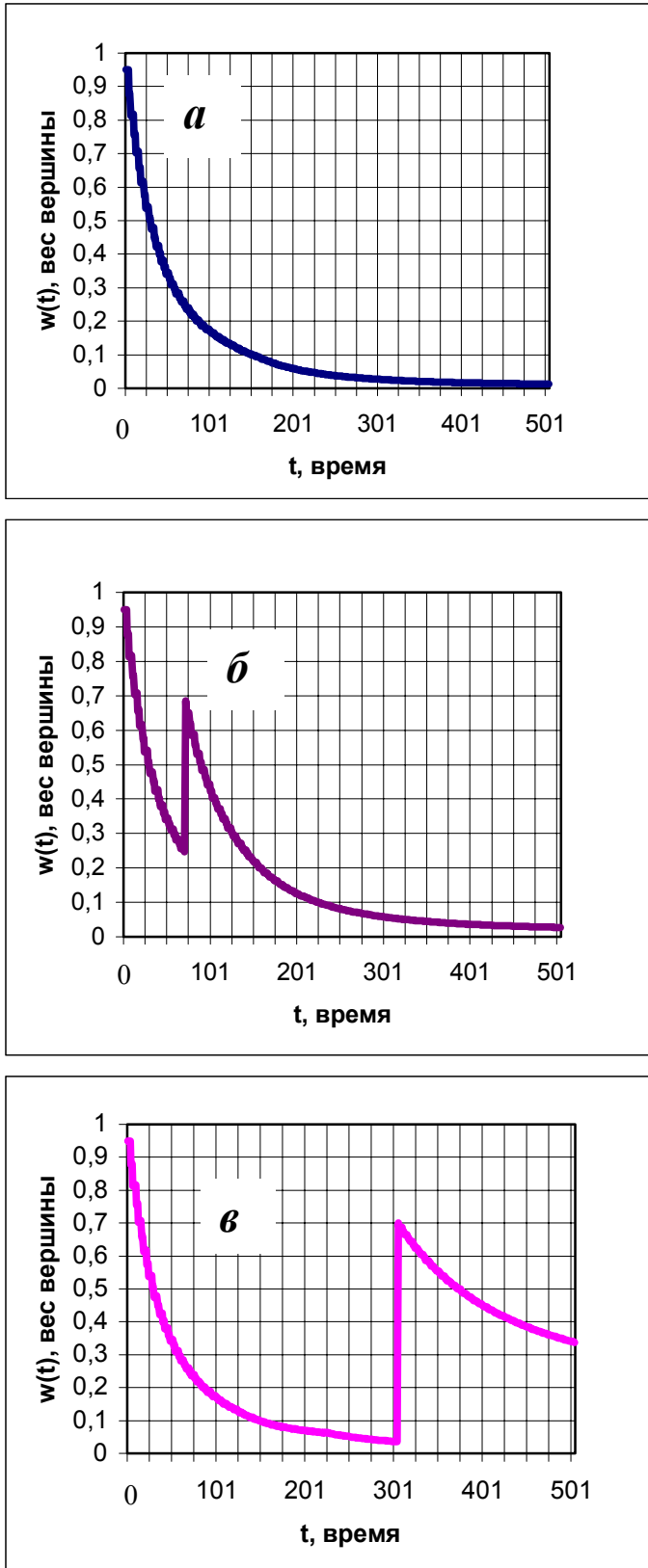


Рис. 4

ния сложными системами – *структурное управление*. Модели рассмотренного типа, как показывает их анализ и опыт применения, могут быть элементом систем поддержки принятия решений в соответствующих ситуаци-

нейшем.

Управляющее воздействие, приложенное к системе в более поздний момент распространения по ней импульсных воздействий, приводит к иному результату. Основной показателем системы не понижается, а стабилизируется, хотя и на уровне более низком, чем первоначальный. Это объясняется тем, что в предыдущем случае управляющее воздействие было приложено к системе, когда по ней распространялось импульсное воздействие, величина которого позволяла “поглотить” повышение значения показателей качественного состояния элементов системы.

Для обеспечения стойкости системы как новой задачи в рамках концепции управления рисками⁵ возможны два подхода.

Первый – наделение системы достаточным внутренним ресурсом, позволяющим противостоять любым внешним дестабилизирующим воздействиям.

Второй – изменение структуры системы, позволяющее повышать стойкость системы, “убирая” из структуры системы наиболее опасные и уязвимые взаимосвязи. Второй подход очерчивает новое направление теории управле-

онных центрах.

Во второй главе даются оценки различных “мерам стойкости”¹⁵ и исследуется явление *структурного хаоса*.

В 1967 г. социолог из Гарвардского университета С. Милграм¹⁶ сделал утверждение о том, что каждого человека можно связать с любым другим человеком на земном шаре цепочкой из шести знакомых. Этот феномен получил название “тесного (маленького) мира” (“small world”). В 90-х годах прошлого века эмпирически было доказано, что подобным свойством обладают структуры многих социальных технических систем. Например: электроэнергетические сети, WWW (Internet), нейронные сети, метаболические сети клеток, сети научного сотрудничества и т.д.

Структура таких систем по истечении времени претерпевает определенные изменения, вызываемые различными внешними обстоятельствами. Изменения в структуре систем могут быть описаны простейшими теоретико-графовыми операциями: стягивание ребра, удаление (добавление) ребра, удаление (добавление) вершины. Изменения структуры системы могут быть разовыми, а могут быть постоянными. Для второго случая разумно ввести понятие *структурной динамики* – изменение структуры системы с течением времени. Несомненно, для описания структурной динамики лучше всего подходит аппарат теории графов.

Одним из наиболее распространенных типов структурной динамики

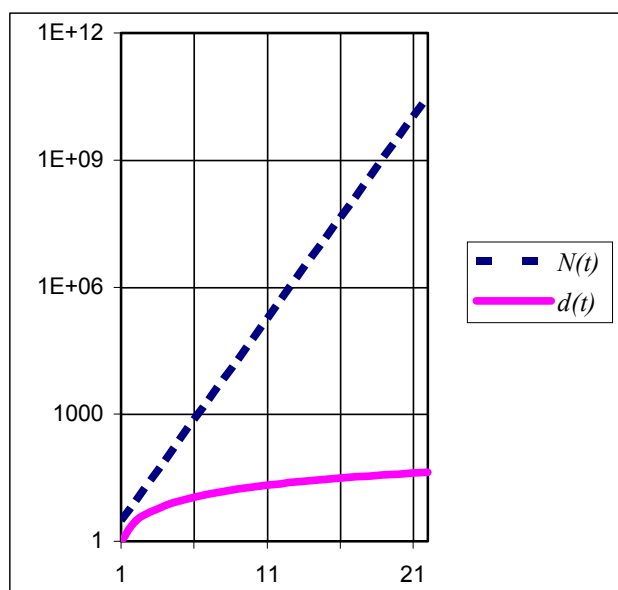


Рис. 5. Типичная зависимость для “тесного мира”. $N(t)$ – число вершин, $d(t)$ – диаметр.

является *рост структуры*¹⁷. Рост структуры – это регулярное появление новых элементов и связей в структуре системы. Рост структуры происходит по правилам, определяющим предпочтительность присоединения новых элементов со старыми. Не исключается наличия в них фактора случайности.

Структуры систем, обладающих свойством “тесного мира”, – динамически растущие структуры. Феномен “тесного” мира в терминах теории графов можно интерпретировать как графы с быстро растущим числом

¹⁵ Малащенко Ю.Е., Новикова Н.М. Модели неопределенности в многопользовательских сетях. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

¹⁶ Stanley Milgram. The small world problem // Psychology Today. 1967. №2. Pp. 60-67.

¹⁷ Евин И.А. Самоорганизующиеся сети. // Синергетика. Труды семинара. Том 6. Естественные, социальные и гуманитарные науки. – М.: МИФИ, 2003.

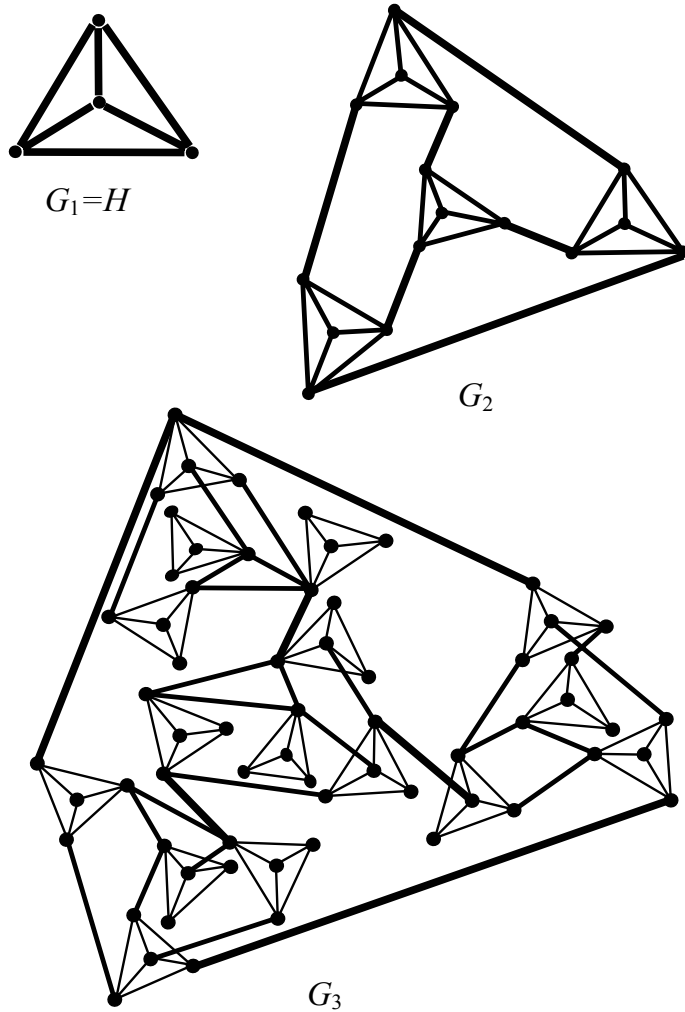


Рис. 6. Траектория предфрактального графа $G_3=(V_3,E_3)$. Жирными линиями нарисованы ребра первого ранга. Линиями средней жирности нарисованы ребра второго ранга. Тонкими линиями нарисованы новые ребра – ребра третьего ранга.

вершин при незначительно изменяющемся диаметре (см. рис. 5).

В настоящей работе для описания сложных структур, обладающих свойством “тесного мира”, предлагаются так называемые *фрактальные графы*.

Фрактальные графы являются моделью структур, растущих в дискретном времени по одним и тем же правилам из каждой своей вершины. Формальным отражением этих правил является операция *замены вершины затравкой*, которая и лежит в основе определения фрактальных графов.

Термином *затравка* условимся называть какой-либо связный граф $H=(W,Q)$. Суть операции замены вершины затравкой (ЗВЗ) заключается в следующем. В данном графе $G=(V,E)$ у намеченной для замещения вершины $\tilde{v} \in V$ выделяется множество

$\tilde{V} = \{\tilde{v}_j\} \subseteq V, j = 1, 2, \dots, |\tilde{V}|$ смежных ей вершин. Далее из графа G удаляется вершина \tilde{v} и все инцидентные ей ребра. Затем каждая вершина $\tilde{v}_j \in \tilde{V}, j = 1, 2, \dots, |\tilde{V}|$ соединяется ребром с одной из вершин затравки $H=(W,Q)$. Вершины соединяются произвольно (случайным образом) или по определенному правилу при необходимости.

Предфрактальный граф – конечный аналог фрактального графа – будем обозначать через $G_L=(V_L,E_L)$, где V_L – множество вершин графа, а E_L – множество его ребер. Определим его рекуррентно, поэтапно заменяя каждый раз в построенном на предыдущем этапе $l=1, 2, \dots, L-1$ графе $G_l=(V_l,E_l)$ каждую его вершину затравкой $H=(W,Q)$. На этапе $l=1$

предфрактальному графу соответствует затравка $G_1 = H$. Об описанном процессе говорят, что *предфрактальный граф* $G_L = (V_L, E_L)$ порожден затравкой $H = (W, Q)$. Процесс порождения предфрактального графа G_L по существу есть процесс построения последовательности предфрактальных графов $G_1, G_2, \dots, G_l, \dots, G_L$, называемой *траекторией* (см. рис. 6). Фрактальный граф $G = (V, E)$, порожденный затравкой $H = (W, Q)$, определяется бесконечной траекторией. Предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$ условимся называть (n, q, L) -графом, если он порожден n -вершинной q -реберной связной затравкой $H = (W, Q)$.

Для предфрактального графа G_L ребра, появившиеся на l -ом, $l \in \{1, 2, \dots, L\}$, этапе порождения, будем называть *ребрами ранга l* . Новыми ребрами предфрактального графа G_L назовем ребра ранга L , а все остальные ребра назовем *старыми*.

Правила порождения предфрактального графа позволяют прогнозировать и оценивать его качественные и количественные характеристики. Это позволило заложить основы нового метода проектирования и анализа сложных многоэлементных структур. Метод базируется на свойстве самоподобия¹⁸ фрактальных графов. Использование свойства самоподобия дает возможность “программирования” предфрактального графа, надления его требуемыми характеристиками и свойствами. При этом особенно важным представляется рассмотрение и числа “окон уязвимости” – точек сочленения и мостов. Доказанные в диссертации теоремы позволяют оценить это число.

ТЕОРЕМА 2.1. Для всякого предфрактального (n, q, L) -графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного затравкой $H = (W, Q)$, справедливы следующие верхняя и нижняя оценки числа точек сочленения¹³

$$n^{L-1}m(H) \leq m(G_L) \leq n^{L-1}m(H) + 2q \frac{n^{L-1} - 1}{n - 1}, \text{ если затравка } H \text{ - дерево.}$$

ТЕОРЕМА 2.2. Для всякого предфрактального (n, q, L) -графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного затравкой $H = (W, Q)$ без точек сочленения, справедливы верхняя и нижняя оценки для числа точек сочленения

$$n^{L-1} \leq m(G_L) \leq \frac{n^L - n}{n - 1}, \text{ если смежность старых ребер одного ранга не нарушается.}$$

ТЕОРЕМА 2.3. Для всякого предфрактального (n, q, L) -графа G_L , порожденного затравкой $H = (W, Q)$, справедливы верхняя и нижняя оценки

¹⁸ Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: ИКИ, 2002.

числа точек сочленения $m(H)n^{L-1} \leq m(G_L) \leq m(H)n^{L-1} + \frac{n^L - n}{n-1}$, если смежность старых ребер одного ранга не нарушается.

ТЕОРЕМА 2.4. Для всякого предфрактального (n, q, L) -графа $G_L = (V_L, E_L)$ порожденного затравкой $H = (W, Q)$, справедливы верхняя и нижняя оценки числа мостов¹³: $k(H) \leq k(G_L) \leq k(H) \frac{n^L - n}{n-1}$.

ТЕОРЕМА 2.5. Род¹³ $\gamma(G_L)$ предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, порожденного затравкой $H = (W, Q)$ с сохранением смежности старых ребер, определяется равенством $\gamma(G_L) = \gamma(H) \frac{n^L - 1}{n-1}$.

Фрактальные (предфрактальные) графы – структуры, динамически растущие во времени, причем с фактором случайности в правилах, определяющих их рост. Поэтому представляется важным знать число всевозможных предфрактальных графов к определенному моменту времени (этапу порождения).

ТЕОРЕМА 2.6. Число всех предфрактальных графов L -го ранга, порожденных затравкой $H = (W, Q)$, $|W| = n$, $|Q| = q$, равно $n^{2q \frac{n^L + L(1-n) - 1}{(n-1)^2}}$.

Динамические системы, имеющие конечный горизонт прогноза, принято называть системами с хаотическим поведением¹⁹. Траектории системы с хаотическим поведением с близкими начальными данными "разбегаются" экспоненциально, а поэтому для таких систем долгосрочный прогноз невозможен.

Для анализа работоспособности системы с динамически меняющейся структурой необходимо прогнозирование поведение структуры этой системы. Для этого иногда достаточно просмотреть все возможные варианты изменений в структуре, и сравнить их количественные оценки. В нашем случае – фрактальные графы, динамически растущие структуры, причем рост структуры, т.е. увеличение числа вершин предфрактального графа, происходит очень быстро. Число всевозможных предфрактальных графов одного ранга, порожденного одной и той же затравкой, как свидетельствует теорема 2.6, зависит экспоненциально от числа вершин самого предфрактального графа. Структурную динамику такого рода, по аналогии с системами с хаотическим поведением, назовем *структурным хаосом*. На первый взгляд, такое свойство может привести к мысли о невозможности получения хоть сколько-нибудь полезных, т.е. полиномиальных, количественных оценок для характеристик предфрактального графа. О том, что это

¹⁹ Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. – М.: Эдиториал УРСС, 2000.

не так, говорят результаты, представленные в настоящей главе (см. теоремы 2.1 – 2.5). И действительно, количественные оценки, полученные в работе, ограничены сверху полиномами $O(N)$ от числа N – вершин предфрактального графа, в то время как число всех предфрактальных графов с N – вершинами ограничено сверху экспонентой $O(n^{N+1})$, где n – число вершин затравки (см. теорему 2.6).

Основная цель настоящей главы – продемонстрировать возможность получения “хороших” диапазонов количественных оценок, связанных со стойкостью, для несравнимо большего числа предфрактальных графов.

Подводя итог, можно сказать, что использование архитектур компьютерных сетей или систем сетевой связи, реализующих предфрактальные графы, дает ряд важных преимуществ с точки зрения обеспечения стойкости таких объектов.

Третья глава посвящена проблеме разработки параллельных²⁰ алгоритмов решения теоретико-графовых задач.

Анализ сложных структур большой размерности является одной из актуальных задач науки²¹. Сложные структуры, обладающие свойством самоподобия, формализуются, как отмечалось ранее во второй главе, в виде фрактальных (предфрактальных) графов.

В диссертации предложены три параллельных алгоритма β_1 , β_2 и β_3 решения классических задач теории графов на заданном предфрактальном (n, q, L) -графе $G_L = (V_L, E_L)$. Алгоритм β_1 – поиск кратчайшего пути между двумя произвольными вершинами предфрактального графа G_L , алгоритм β_2 – поиск остовного дерева минимального веса (ОДМВ) предфрактального графа G_L , и алгоритм β_3 – поиск совершенного паросочетания предфрактального графа G_L .

При удалении из предфрактального графа G_L всех ребер рангов $l = 1, 2, \dots, L - r$ получим множество $\{B_{L,i}^{(r)}\}$, $r \in \{1, 2, \dots, L - 1\}$, блоков r -го ранга, где $i = 1, 2, \dots, n^{L-r}$ – порядковый номер блока. Термином *подграф-затравка* $z_s^{(l)}$ будем называть блок $B_{l,s}^{(1)}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$ первого ранга предфрактального графа G_l , $l = \overline{1, L}$ из траектории. Мощность множества $Z(G_L) = \{z_s^{(l)}\}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$ всех подграф-затравок из траектории графа G_L равна $|Z(G_L)| = \frac{n^L - 1}{n - 1}$.

²⁰ Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002.

²¹ Parallel Computing. 2000. № 26.

АЛГОРИТМ β_1 . Дан предфрактальный (n, q, L) -граф G_L , смежность старых ребер которого на всей его траектории не нарушается, и два процессора p_1 и p_2 . Необходимо найти кратчайший путь между двумя вершинами $v \in V_L$ и $u \in V_L$. Сначала алгоритм производит поиск общего блока B минимального ранга для вершин v и u , в пределах которого в дальнейшем и будет осуществляться поиск кратчайшего пути между этими заданными вершинами. Процессоры p_1 и p_2 назначаются (“привязываются”) вершинам v и u , соответственно. Каждая подграф-затравка блока B рассматривается как отдельный граф и процессоры параллельно, независимо друг от друга, находят кратчайшие пути, переходя от одной затравки к другой. Основная цель процессора p_1 , назначенного вершине v , – найти кратчайший путь от вершины v до подграф-затравки z наименьшего ранга, принадлежащей блоку B . Основная цель процессора p_2 , назначенного вершине u , – аналогичная: найти кратчайший путь от вершины u до подграф-затравки z наименьшего ранга, принадлежащей блоку B . Опишем детальнее поиск процессорами кратчайшего пути от назначенных им вершин до подграф-затравки z наименьшего ранга. Вершины предфрактального графа могут одновременно принадлежать подграф-затравкам разных рангов. Пусть вершина v принадлежит подграф-затравке наименьшего ранга, тогда обозначим ее через v_1 , а подграф-затравку, которой она принадлежит – через z_{v_1} . Если подграф-затравка z_{v_1} и есть искомая подграф-затравка z , тогда работа процессора p_1 останавливается, и вершина v_1 обозначается через v^* . В противном случае просматриваются все вершины подграф-затравки z_{v_1} . Вершину, принадлежащую подграф-затравке наименьшего ранга, обозначим через v_2 , а саму подграф-затравку – через z_{v_2} . Далее осуществляется поиск кратчайшего пути между вершинами v_1 и v_2 . Если подграф-затравка z_{v_2} и есть подграф-затравка z , тогда работа процессора останавливается, и вершина v_2 обозначается через v^* . В противном случае процессор p_1 продолжает свою работу до тех пор, пока не будет найден кратчайший путь до вершины v^* подграф-затравки z . Работа процессора p_2 будет аналогичной и завершится, когда будет найден кратчайший путь до вершины u^* подграф-затравки z . На последнем шаге алгоритм находит кратчайший путь между вершинами v^* и u^* . В итоге искомым кратчайшим путем (v, u) будет состоять из трех отрезков (v, v^*) , (u, u^*) и (v^*, u^*) .

Поиск кратчайшего пути на подграф-затравках ведется с помощью алгоритма Дейкстры¹³, который заложен в алгоритм β_1 в виде вызываемой процедуры.

ТЕОРЕМА 3.2. *Вычислительная сложность²⁰ алгоритма β_1 для предфрактального (n, q, L) -графа $G_L = (V_L, E_L)$, $|V_L| = N$ равна $O(N)$, если смежность старых ребер не нарушается.*

ПРИМЕЧАНИЕ 3.1. Вычислительная сложность параллельного алгоритма β_1 для предфрактального (n, q, L) -графа G_L , смежность старых ребер которого не нарушается, меньше вычислительной сложности алгоритма Дейкстры $O(N) < O(N^2)$ в N раз.

Заметим, что при вызовах абонента телефонной сети или обращении к удаленным интернет-ресурсам решается сходная задача, поэтому ускорение, связанное с распараллеливанием может быть существенно.

Будем говорить, что *предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$ взвешен*, если каждому его ребру $e^{(l)} \in E_L$ приписано действительное число $w(e^{(l)}) \in (\theta^{l-1}a, \theta^{l-1}b)$, где $l = \overline{1, L}$ – ранг ребра, $a > 0$, и $\theta < \frac{a}{b}$.

Алгоритм β_2 осуществляет поиск ОДМВ $T = (V_L, E_T)$ на взвешенном предфрактальном графе $G_L = (V_L, E_L)$. Алгоритм использует k процессоров p_1, p_2, \dots, p_k . Назначим каждый процессор одной из подграф-затравок $z_s^{(l)}$, $l = \overline{1, L}$, $s = \overline{1, n^{l-1}}$ предфрактального графа G_L , тогда число используемых процессоров равно $k = \frac{n^L - 1}{n - 1}$. Суть работы алгоритма за-

ключается в следующем. Каждая подграф-затравка $z_s^{(l)}$ рассматривается как отдельно взятый граф. При этом каждый из k процессоров p_i , $i = \overline{1, k}$ параллельно независимо друг от друга находит ОДМВ T_i на своей подграф-затравке $z_s^{(l)}$. Поиск ОДМВ отдельно взятой подграф-затравки осуществляется алгоритмом Прима²⁴. Алгоритм Прима используется в алгоритме β_2 в виде процедуры по мере необходимости. Нахождение ОДМВ T_1, T_2, \dots, T_k всех подграф-затравок $z_s^{(l)}$ определяет ОДМВ $T = (V_L, E_T)$ предфрактального графа G_L . Каждое ребро предфрактального графа имеет свой “уникальный” номер, однозначно определяющий ребро во всей траектории. Таким образом, выделение ОДМВ на подграф-затравке $z_s^{(l)}$ соответствует выделению множества ребер на предфрактальном графе G_L .

ТЕОРЕМА 3.4. *Вычислительная сложность алгоритма β_2 для предфрактального (n, q, L) -графа $G_L = (V_L, E_L)$, $|V_L| = N$ равна $O(N \cdot n^2)$.*

ПРИМЕЧАНИЕ 3.2. Вычислительная сложность алгоритма Прима равна $O(N^2)$. Сравнив ее с вычислительной сложностью алгоритма β_2 , получаем: $O(N \cdot n^2) < O(N^2)$.

АЛГОРИТМ β_3 идентично предыдущему алгоритму производит поиск совершенного паросочетания $M = (V_L, E_M)$ на взвешенном предфрактальном (n, q, L) -графе $G_L = (V_L, E_L)$. Алгоритм использует n^{L-1} процессоров p_s , $s = \overline{1, n^{L-1}}$, каждый из которых назначен одной из подграф-затравок $z_s^{(L)}$, $s = \overline{1, n^{L-1}}$. Основная идея алгоритма заключается в том, что каждая подграф-затравка рассматривается как отдельно взятый граф. При этом каждый p_s процессор параллельно, независимо от других находит, совершенные паросочетания M_s на своей подграф-затравке $z_s^{(L)}$. Поиск совершенного паросочетания подграф-затравки осуществляется с помощью алгоритма Эдмондса¹³. Алгоритм Эдмондса оформлен в виде процедуры и используется по мере необходимости. В результате нахождения совершенных паросочетаний $\{M_s\}$ всех подграф-затравок $z_s^{(L)}$ получаем совершенное паросочетание $M = (V_L, E_M)$ предфрактального графа G_L .

ТЕОРЕМА 3.7. *Вычислительная сложность алгоритма β_3 для предфрактального (n, q, L) -графа $G_L = (V_L, E_L)$, $|V_L| = N$, равна $O(N \cdot n^2)$.*

ПРИМЕЧАНИЕ 3.3. Вычислительная сложность алгоритма Эдмондса равна $O(N^3)$. Сравнив ее с вычислительной сложностью алгоритма β_3 , получаем: $O(N \cdot n^2) < O(N^3)$.

В настоящей главе диссертации можно выделить два важных аспекта.

Во-первых. Вычислительная сложность всех описанных алгоритмов на порядок ниже, чем у известных аналогичных алгоритмов.

Во-вторых. Распараллеливание в исследованных задачах является геометрическим. Т.е. входные данные алгоритмов делятся на определенные группы, которые затем обрабатываются на различных процессорах. Входными данными в нашем случае является предфрактальный граф, а группами, соответственно, являются все его подграф-затравки.

III. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Построена и исследована вероятностно-детерминистическая модель, позволяющая анализировать стойкость сложных систем относительно сильных кратковременных воздействий. Введены количественные характеристики стойкости сложных систем, для которых получены априорные оценки.

2. Решены задачи проектирования сложных масштабно-инвариантных структур с заданными количественными характеристиками, определяющими живучесть. Обнаружено и изучено явление структурного хаоса.
3. Для класса предфрактальных графов построены параллельные алгоритмы решения
 - задачи поиск кратчайшего пути,
 - задачи поиск остовного дерева минимального веса,
 - задачи поиска совершенного паросочетания.

Предложенные алгоритмы существенно эффективней стандартных методов.

ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ СЛЕДУЮЩИЕ РАБОТЫ:

1. *Кочкаров А.А., Кочкаров Р.А.* Параллельный алгоритм поиска кратчайшего пути на предфрактальном графе // Журнал вычис. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44, № 6. – С. 1157-1162.
2. *Кочкаров А.А., Малинецкий Г.Г.* Управление безопасностью и стойкостью сложных систем в условиях внешних воздействий // Проблемы управления. 2005. № 5. – С. 70-76.
3. *Кочкаров А.А., Малинецкий Г.Г.* Стойкость, управление риском и обеспечение безопасности сложных технических систем // Проблемы безопасности и чрезвычайных ситуаций. 2005. № 4. – С. 12-25.
4. *Кочкаров А.А., Малинецкий Г.Г.* Обеспечение стойкости сложных систем. Структурные аспекты // Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН №53. М., 2005. 34 с.
5. *Кочкаров А.А., Кочкаров Р.А.* Предфрактальные графы в проектировании и анализе сложных структур // Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН №10. М., 2003. 23 с.
6. *Кочкаров А.А., Кочкаров Р.А.* Параллельные алгоритмы на предфрактальных графах // Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН №84. М., 2003. 20 с.
7. *Кочкаров А.А., Кочкаров Р.А.* О планарности и других топологических свойствах фрактальных графов // Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН №83. М., 2003. 20 с.
8. *Кочкаров А.А., Салпагаров С.И., Кочкаров Р.А.* О количественных оценках топологических характеристик предфрактальных графов // Известия ТРТУ. Специальный выпуск. – Таганрог, 2004. – № 8. – С. 298-301.
9. *Кочкаров Р.А., Кочкаров А.А.* Особенности конструирования параллельных алгоритмов для решения классических задач теории графов (на примере класса фрактальных графов) // Труды I Международной конференции “Системный анализ и информационные технологии”. Том 2. М.: КомКнига, 2005. – С. 170-174.
10. *Кочкаров А.А., Малинецкий Г.Г.* Стойкость и обоснование стойкости сложных технических и социально-технических систем // Труды XI

- Международной конференции “Проблемы управления безопасностью сложных систем”. Часть 1. М.: РГГУ, 2003. – С. 50-53.
11. *Кочкаров А.А., Малинецкий Г.Г.* Концепция стойкости для социально-экономических и технических систем // Труды Международной конференции “Математическое моделирование социальной и экономической динамики”. М.: РГСУ, 2004. – С. 151-154.
 12. *Кочкаров А.А.* Стойкость и моделирование систем, находящихся в условиях внешних воздействий // Труды XLVII научной конференции МФТИ “Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук”. Часть VII. М.: МФТИ, 2004. – С. 190-190.
 13. *Кочкаров А.А., Малинецкий Г.Г.* Моделирование стойкости сложных технических систем // Труды XII Международной конференции “Проблемы управления безопасностью сложных систем”. М.: РГГУ, 2004. – С. 348-352.
 14. *Кочкаров А.А., Малинецкий Г.Г.* Стойкость и моделирование стойкости систем в условиях внешних воздействий // XII Международная конференция “Математика. Компьютер. Образование”. Тез. докл. М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2005. – С. 136-136.
 15. *Кочкаров А.А., Кочкаров Р.А.* Топологические характеристики предфрактальных графов и предупреждение кризисов сложных систем // Труды X Международной конференции “Проблемы управления безопасностью сложных систем”. Часть 1. М.: РГГУ – Издательский дом МПА-Прогресс, 2002. – С. 116-119.
 16. *Кочкаров А.А.* Особенности моделирования сложных структур. Структурный хаос // Материалы I Международного междисциплинарного семинара памяти чл.-корр. РАН С.П. Курдюмова “Идеи синергетики в естественных науках”. Тверь: ТвГУ, 2005. – С. 36-37.
 17. *Кочкаров А.А., Кочкаров Р.А.* Параллельный алгоритм поиска бикомпонент предфрактального графа // Материалы VIII региональной научно-технической конференции “Вузовская наука – Северо-кавказскому региону”. Том I. Ставрополь: СевКавГТУ, 2004. – С. 13-13.
 18. *Кочкаров А.А.* Число всевозможных предфрактальных графов // IV Всероссийский симпозиум “Математическое моделирование и компьютерные технологии”. Тез. докл., том 2. Кисловодск: КИЭП, 2000. – С. 73-74.
 19. *Кочкаров А.А., Кочкаров Р.А.* Исследование связности предфрактальных графов // IV Всероссийский симпозиум “Математическое моделирование и компьютерные технологии”. Тез. докл., том 2. Кисловодск: КИЭП, 2000. – С. 74-75.
 20. *Кочкаров А.А.* Число точек сочленения предфрактального графа // II Международная конференция “Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики”. Тез. докл. Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2001.
 21. *Кочкаров А.А., Салпагаров С.И.* Число мостов предфрактального графа // V Всероссийский симпозиум “Математическое моделирование и компьютерные технологии”. Тез. докл. Кисловодск: КИЭП, 2002. – С. 36-37.