Общие принципы построения рейтинговых систем

Солодов Александр Александрович,

доктор технических наук, профессор

Экономический кризис заставил пересмотреть отношение к тем индикаторам, которые некогда принимались безоговорочно, например, к рейтингам специализированных международных агентств - S&P, Moody's и Fitch. Если до 2008г. никому и в голову не могло придти, что "большая рейтинговая тройка" может ошибаться, то банкротство Lemon Brothers, оказавшееся неожиданным для всех трех агентств, серьезно ударило по их репутации и по репутации многих инвестиционных домов [1].

В последнее время рейтинговые системы привлекают все большее внимание. Связано это, с одной стороны, с расширением областей применения рейтингов и рейтинговых процедур, а, с другой – с появлением сомнений в их адекватности. При этом практически отсутствуют систематические исследования как формально математических, так и организационно-правовых аспектов построения и свойств рейтинговых систем. В настоящей работе предпринято изучение некоторых общих свойств формальных рейтинговых систем в расширительном толковании, а также намечены направления их исследований с применением традиционных математических методов.

Формальные рейтинговые системы

Формальная рейтинговая система - совокупность следующих математических описаний рейтинговой процедуры.

Участник рейтинговой системы – объект, подлежащий оценке в данной рейтинговой системе. Не вдаваясь в теоретические разногласия по поводу терминологии, будем называть объектом исследования непосредственно то, что исследуется, а предметом исследования – то свойство объекта, которое исследуется. По смыслу рейтинговой системы число участников должно быть больше одного. Для удобства формализации участников нумеруют с помощью целочисленного индекса, например, i.

Индикатор (оценка участника) - неотрицательное число, характеризующее один из аспектов (свойств, показателей полезности) участника рейтинговой системы, в заданном числовом диапазоне. Вслед за интуитивными представлениями будем в дальнейшем полагать, что увеличение индикатора соответствует увеличению полезности (ценности) участника РС и наоборот, увеличение полезности ведет к увеличению индикатора. Будем в дальнейшем полагать, что каждого участника рейтинговой системы характеризуют одинаковым числом индикаторов n и будем в дальнейшем обозначать j -ый индикатор участника с номером i через Y_{ij}. Таким образом, для каждого из i =1, …, m участников рейтинговой системы имеем совокупность (или вектор) n индикаторов (оценок)

$$Y_i = (Y_{i1},\dots,Y_{in}) \qquad (1.1)$$

Целевая функция (функция полезности, функция предпочтения) - правило F, по которому для участника рейтинговой системы номер i на основании учета значений всех n его индикаторов приписывается некоторое неотрицательное число. Очевидно, функция F является функцией n аргументов. Задача функции состоит в том, чтобы привести совокупность из n индикаторов к одному числу b с целью его последующего сравнения с такими же числами, относящимися к другому объекту исследования. К функции полезности, очевидно, необходимо предъявить следующие очевидные требования.

Целевая функция должна быть неотрицательной, т.е.

$$F(Y_{i1},\dots,Y_{in}) \geq 0 \qquad (1.2)$$

для всех допустимых значений аргументов.

В нулевой точке, т.е. когда все аргументы одновременно равны нулю, целевая функция должна быть равна нулю

$$F(0_{1i},\dots,0_{in}) = 0. \qquad (1.3)$$

Условия (1.2) и (1.3) являются просто требованием удобства обращения со значениями целевой функции и, как легко заметить, не ограничивают общности рассмотрения. Из общего требования к индикаторам, состоящего в том, что при увеличении полезности объекта увеличивается и индикатор, следует требование возрастания функции полезности по всем аргументам, т.е.

$$\frac{dF}{dY_{ij}} > 0, \qquad i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n \qquad (1.4)$$

Рейтинг - неотрицательное число b_i являющееся результатом применения целевой функции к совокупности всех индикаторов участника номер i рейтинговой системы. Таким образом, рейтинг определяется на основании соотношения

$$b_i=F(Y_i)=F(_{i1},\dots,Y_{in}) \quad i=1,\dots,m \qquad (1.5)$$

Вариационный ряд рейтинговой системы - последовательность каких-либо характеристик, составленных по их убыванию, т.е на первом месте ряда находится наибольшая из характеристик, на втором - следующая за ним по величине и т.д.

Ранг характеристики - ее номер в вариационном ряду. Обычно в качестве характеристики рассматривается рейтинг участника рейтинговой системы, тогда первый, наивысший ранг имеет участник с наибольшим рейтингом, второй ранг - следующий за ним по рейтингу и т.д. Очевидно, что всего рангов в любой столько, сколько имеется участников.

Критерий (правило) предпочтения - ранговый критерий, в соответствии с которым наиболее предпочтительным является участник первого ранга в вариационном ряду, составленному из рангов участников, и далее по убыванию рангов.

Примеры рейтинговых систем. Функций полезности, отвечающих соотношениям (1.1)-(1.5), очевидно, бесконечно много и, тем не менее, все они могут в той или иной ситуации служить инструментом для определения предпочтений. Рассмотрим некоторые практические примеры, причем для простоты опустим второй индекс, указывающий на номер участника.

Нелинейная функция полезности. Следующий пример иллюстрирует возможность и целесообразность расширительного толкования понятия рейтинговой системы. В частности, ясно, что цена отвечает всем сформулированным определениям. Действительно, например, цена бриллианта зависит от следующих параметров: веса (Y_1), чистоты (Y_2), прозрачности (Y_3), и огранки (Y_4), причем согласно правилу Тавернье цена бриллианта в определенных пределах и при прочих равных условиях пропорциональна квадрату его веса [2]. В обозначениях (1.2) с учетом игнорирования номера участника i имеем для функции полезности

$$F(Y)=Y_1^2 + G(Y_2, Y_3, Y_4), \qquad (1.6)$$

где G-функция полезности, не зависящая от веса бриллианта.

Очевидно, функция полезности (1.6), оставаясь возрастающей, является нелинейной по такому индикатору бриллианта, как его вес. Это означает, что разница в цене между камнями различного веса стремительно (квадратично) изменяется. Однако легко заметить, что если интересоваться не абсолютными значениями рейтингов (цен) камней, а их рангами, то квадратичная зависимость никак не повлияет на распределение рангов, т.е. самый тяжелый камень останется на первом месте, следующий за ним по весу - на втором и т.д. В соответствии с ранговым критерием предпочтения самый тяжелый камень оказывается самым лучшим. Это обстоятельство является отражением свойства монотонности функции полезности.

Линейная функция полезности. Голосование. Рассмотрим простейший случай линейной функции полезности, при которой рейтинг i-го участника определится как

$$b_i= F(Y_i)=F(Y_{i1},\dots,Y_{in})=a_{i1}+ a_{i2}+\dots a_{in}=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\,,\ \ i=1,\dots,m \qquad (1.7)$$

где a_{ij} – оценки, выставленные i-му участнику по j-той характеристике,

Если при этом a_{ij} может принимать значения либо 1, либо 0, то рейтинговая система переходит в систему выборов, рейтинг b_i указывает число голосов, набранных i-тым участником, а соответствующие ранги становятся местами, занятыми участниками в списке голосования.

Кусочно-постоянная функция полезности. Такая функция возникает при составлении турнирных таблиц и вообще некоторых спортивных рейтингов. В этой ситуации функция полезности может иметь следующий вид

$$F(Y_1)=\begin{cases}3+Y_1, \text{ если выигрыш,}\\ 2+Y_1, \text{ если ничья,}\\ 0+Y_1, \text{ если проигрыш.}\end{cases} \qquad (1.8)$$

Рассмотрение этих и аналогичных примеров позволяют сделать очевидный вывод: практически в любой ситуации, когда выбор делается на основании количественной характеристики объекта, она может быть представлена как результат применения некоторой рейтинговой процедуры.

Общие свойства формальных рейтинговых систем

Функциональное преобразование функции полезности. Такое преобразование означает, что каждое значение функции полезности b_i в (1.1) в свою очередь подвергается функциональному преобразованию, например, $G(b_i)$, т.е. рассматривается функция от функции или сложная функция

$$c_i= G(b_i)= G[F(Y_i)] \qquad (2.1)$$

Поскольку к функции G предъявляются, очевидно, такие же требования (1.2)-(1.4), как и к внутренней функции, то из свойства возрастания следует, что функциональное преобразование не может изменить ранги участников, определенные с помощью внутренней функции F. Действительно по определению возрастающей функции из соотношения $b_i > b_j$ следует, что $G(b_i)> G(b_j)$.

Детализация индикаторов. Часто встречаются рейтинговые системы, у которых индикаторы Y_{ij} функции полезности F сами являются результатом вычисления другой функции, например, G от совокупности других индикаторов, например, Z_s

$$Y_{ij}=G_{ij}(Z_1,...,Z_k), \qquad (2.2)$$

Ясно, что индикаторы Z_s в (1.10) детализируют формирование индикатора Y_{ij}. Обратная процедура, когда несколько индикаторов Y_{ij} в (1.2) объединяются и преобразуются с помощью некоторой функции G, является процедурой агрегирования индикаторов.

Поскольку процедура детализации (агрегирования) применяется не ко всем аргументам функции полезности, то ее результат может быть любым (за исключением линейных функций полезности, см. ниже), т.е. ранги могут расположиться в любой последовательности.

Симметрические функции полезности. Среди функций полезности выделяются симметрические функции, которые не зависят ни от какой перестановки аргументов и, поэтому, индикаторы входят в них вполне симметричным образом [3] в отличие, например, от функции (1.6). В этом смысле все индикаторы в функции полезности в (1.2) оказываются равноправными, например,

$$F_i = Y_{i1} + \ldots + Y_{in} \qquad (2.3)$$

$$G_i = Y_{i1}^2 + \ldots + Y_{in}^2 \qquad (2.4)$$

$$H_i = Y_{i1} Y_{i2} \ldots Y_{in} \qquad (2.5)$$

Может показаться, что, поскольку все функции полезности являются возрастающими, то от их выбора ранги участников не зависят. Что это не так показывает следующий контрпример. Рассмотрим трех участников рейтинговой системы *(i=1,2,3)*, каждый из которых характеризуется тремя индикаторами *(j=1,2,3)*. Пусть, далее, допустимым диапазоном индикаторов является промежуток $1 =< Y_{ij} <= 4$, а функциями полезности являются функции (2.3)-(2.5). Предположим, индикаторы приняли числовые значения, указанные в таблице 1. В ней же указаны и рейтинги, вычисленные в соответствии с (2.3)-(2.5).

Таблица 1.

	j=1	*j=2*	*j=3*	F_i *(ранг)*	G_i *(ранг)*	H_i *(ранг)*
i=1	$Y_{11}=2$	$Y_{12}=2$	$Y_{13}=3$	$F_1=7$ (1)	$G_1=17$(3)	$H_1=12$(1)
i=2	$Y_{21}=1$	$Y_{22}=3$	$Y_{23}=3$	$F_2=7$ (1)	$G_2=19$(2)	$H_2=9$(2)
i=3	$Y_{31}=1$	$Y_{32}=2$	$Y_{33}=4$	$F_3=7$ (1)	$G_3=21$(1)	$H_3=8$(3)

Из таблицы следует, что ранги участников распределились в соответствии с функцией полезности *G* в порядке индексов (т.е. участник номер 1 занял первое место, номер 2-второе, номер 3-третье), в соответствии с функцией полезности *H* ранги распределились в обратном порядке, а в соответствии с функцией *F* все ранги оказались одинаковыми. И это при том, что все функции полезности в соответствии с общим свойством (1.5) являются не только возрастающими, но и симметрическими. Пример показывает, что выбор функции полезности может повлиять на распределение участников рейтинговой процедуры, если он сделан после получения оценок. Это, в свою очередь, еще раз подтверждает необходимость полного определения рейтинговой системы в духе сформулированного выше определения. Детализация этого вопроса связана с изучением чувствительности функции полезности по отношению к индикаторам, т.е. поведением производных (1.4).

Рейтинговые системы без функций полезности. Специальным частным случаем рейтинговых систем являются системы без функций полезности. В таких системах индикаторы участников совпадают с их рейтингами и эксперту предлагается указать сразу их рейтинги и, следовательно, ранги. Несмотря на кажущееся упрощение, такие рейтинговые системы в ряде случаев могут оказаться наиболее понятными и полезными, например, в смысле информационной емкости рейтинговой системы.

Линейные рейтинговые системы. Линейной рейтинговой системой называется рейтинговая система с линейной функцией полезности (1.2):

$$b_i=F(Y_i)=F(Y_{i1},\dots,Y_{in})= a_{i1}X_1+ a_{i2}X_2+\dots a_{in}X_n=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}X_j\,, \quad i=1,\dots,m \qquad (2.6)$$

В соотношении (2.1) a_{ij} - оценки, выставленные i-му участнику по j-той характеристике, X_j – весовой коэффициент j-той характеристики. Таким образом, индикатор Y_{ij} принимает простейший вид

$$Y_{ij}= a_{ij}X_j \qquad (2.7.)$$

Обычно на весовые коэффициенты накладывают следующие ограничения:

$$\sum_{j=1}^{m} X_j =1, \quad 0 <X_j <1 \qquad (2.8)$$

Если ввести в рассмотрение матрицу A оценок и вектора X весовых коэффициентов и рейтингов B

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_m \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}, \qquad (2.9)$$

то соотношения (2.1) в матричной форме запишутся как

$$AX=B \qquad (2.10)$$

Преобразования весовых коэффициентов в линейных системах. Практический интерес представляет вопрос о возможности изменения рейтингов участников после выставления оценок, который, очевидно, связан с вопросом фальсификации результатов. Очевидно, что это можно сделать только путем изменения весовых коэффициентов X_j. Задача, таким образом, ставится в следующем виде.

В результате проведения рейтинговой процедуры с известными весовыми коэффициентами X_0 получено m соотношений вида (2.6), которые запишем в матричной форме (2.9) как

$$AX_0=B_0, \qquad (2.9)$$

где B_0 – сформировавшийся вектор рейтингов, A- матрица выставленных оценок.

Требуется определить, можно ли для произвольного вектора B и уже имеющихся оценок A подобрать весовые коэффициенты X.

Легко заметить, что такая формулировка устанавливает связь с обширной и хорошо разработанной теорией систем линейных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами. Действительно, решение сформулированной задачи равносильно решению системы

$$AX=B, \qquad (2.10)$$

в которой теперь B - произвольный вектор рейтингов участников, X - искомый вектор весовых коэффициентов, матрица A оценок совпадает с A в (2.9).

Решение уравнения (2.10) в общем случае зависит от соотношения числа оценок n, числа оценщиков m и взаимных свойств чисел в матрице A и векторе B. В простейшем случае, когда $n=m$ матрица A становится квадратной. Положим, что она имеет обратную A^{-1} (экзотический случай равенства нулю определителя этой матрицы и, следовательно, наличия бесконечного числа тождеств (2.9) исключаем). Тогда решение матричного уравнения (2.10) всегда существует, единственно и определяется соотношением

$$X=A^{-1}B, \qquad (2.11)$$

Следствием является то принципиальное обстоятельство, что совокупность любых положительных чисел можно представить как результат применения некоторой линейной рейтинговой процедуры. Действительно, пусть B-это m-мерный вектор таких чисел. Выберем произвольную mxm матрицу P с положительными элементами, имеющую обратную. Умножим вектор В на матрицу P, в результате получим новый m-мерный вектор C: $PB=C$. Умножим теперь слева обе части последнего тождества на P^{-1} и получим

$$B= P^{-1} C$$

В последнем соотношении матрица P^{-1} может рассматриваться как матрица оценок, элементы вектора C как весовые коэффициенты, а вектор B как вектор рейтингов этой искусственно сформированной рейтинговой процедуры.

В общем случае, когда число участников не равно числу коэффициентов решение системы (2.10) существует, если число линейно независимых строк матрицы (которое называется рангом матрицы, не путать с рангом участника) A равно числу линейно независимых строк расширенной матрицы, которая получается путем добавления в матрицу A столбца B.

Далее, если решение (2.10) существует и число линейно независимых строк матрицы A и расширенной матрицы равно, например, r (очевидно, $r<=n$), то решение (2.10) либо единственно, если r равно числу неизвестных n, либо бесконечно в противоположном случае.

Ключевым является соотношение рангов матрицы A и расширенной матрицы. При больших размерах этих матриц вычисление рангов является весьма трудоемкой процедурой, как, впрочем, и нахождение решений вида (2.11), поэтому такая ситуация представляет, скорее теоретический интерес.

Случайные рейтинговые системы и их информационная емкость. Все предыдущее рассмотрение рейтинговых систем предпринято в условиях, когда ранги всех участников могут быть определены однозначно и, следовательно, может быть построен неслучайный вариационный ряд рейтингов и рангов всех участников.

На практике, однако, часто приходится соглашаться с тем, что как индикаторы участников, так, следовательно, и их рейтинги и ранги являются случайными величинами.

Действительно, априори, т.е. до того, как получены значения индикаторов (1.1) предсказать их значения можно только в вероятностном смысле, т.е. можно попытаться вычислить вероятность $P(Y_{ij})$ того, что индикатор примет конкретное значение Y_{ij}. Это следует из природы субъективного суждения эксперта о той или иной характеристике объекта. Следовательно, проектирование рейтинговой системы, т.е. определение смысла индикаторов, вида функции полезности должно осуществляться с учетом фактора случайности выставляемых оценок.

Таким образом, случайными или стохастическими рейтинговыми системами будем называть рейтинговые системы, у которых индикаторы, их число, а также число участников рассматриваются как случайные величины. Их изучение целесообразно на этапе создания рейтинговых систем.

Информационная емкость случайных рейтинговых систем. Если согласиться с тем, что целью создания рейтинговой системы является получение новой информации об объектах исследования, то необходимым становится вопрос изучения построения систем максимальной информационной емкости. При этом целесообразным представляется использование методов теории информации, давно и плодотворно применяемых в разнообразных прикладных проблемах.

Рассмотрим модель рейтинговой системы как источника информации. Пусть имеется m $(i=1,\dots,m)$ участников рейтинговой процедуры и пусть априори можно предположить, что каждый их участников может получить один из b_k $(k=1,\dots,M)$ рейтингов в возможном диапазоне рейтингов с вероятностью $P_i(k)$. Особенно наглядной такая модель является для рейтинговых систем без функций предпочтения, в которых нет необходимости осуществлять переход от индикаторов к рейтингам.

В соответствии с общими теоретико-информационными подходами будем считать, что каждый i-тый из m участников образует индивидуальный источник информации с информационной емкостью

$$H_i=-\sum_{k=1}^{M} P_i(k)\log(P_i(k)), \qquad (2.12)$$

а информационная емкость всей информационной системы будет суммой индивидуальных информационных емкостей каждого из участников:

$$H=-\sum_{k=1}^{M}\sum_{i=1}^{m} P_i(k)log(P_i(k)) \qquad (2.13)$$

Легко показать (4,5), что максимум информационной емкости (2.12) достигается при равновероятных индивидуальных рейтингах участников, т.е. при $P_i(k)=1/M$ для всех k. Тогда информационная емкость (2.12) принимает вид

$$H_i=logM,$$

Если предположить, что это условие выполняется для всех участников, т.е. $P_i(k)=1/M$ для всех k и i, то информационная емкость всей рейтинговой системы также становится максимальной и равной в соответствии с (2.13)

$$H= mlogM. \qquad (2.14)$$

Из предпринятого рассмотрения следует фундаментальный вывод о том, существует максимальная информационная емкость рейтинговой системы (2.14) и что для ее достижения система должна строиться таким образом, чтобы возможные рейтинги, а вслед за ними и возможные индикаторы каждого из участников были по возможности равновероятными. Любая ассиметрия в этом смысле уменьшает информационную емкость и в пределе, когда имеется один очевидный рейтинг ($M=1$, или, что то же самое, одна из вероятностей $P_i(k)$ становится равной 1), информационная емкость системы становится равной нулю.

Теоретико-информационный подход указывает пути формирования индикаторов в той ситуации, когда создатель рейтинговой системы заинтересован в получении действительно нетривиальной информации. А именно, индикаторы должны быть такими, чтобы их оценка не была заранее очевидной. К таким индикаторам относятся те, которые характеризуют трудноизмеримые или неизмеримые характеристики объекта, например, репутация, художественная или интеллектуальная ценность, результаты дегустации и т.п. Числовые оценки таких индикаторов формируются интеллектом и опытом экспертов и именно такие оценки несут наибольшую информацию.

С другой стороны, индикаторы, являющиеся легко предсказуемыми, только подтверждают интуитивно ожидаемые рейтинги объектов исследования. С этим связано, в частности, преувеличение значений рейтингов в таких рейтинговых системах, в которых индикаторы выбраны так, чтобы обеспечить высшие ранги тем объектам, которые интуитивно (или в результате опыта, или в целях конъюнктуры и т.п.) и так считаются приоритетными.

Распределение ресурсов в рейтинговых системах

На практике часто приходится совершать с участниками рейтинговой процедуры некоторые действия, связанные с расходованием ресурсов, принятием рисков или наоборот, с получением выигрыша, и т.п. Иногда даже сама рейтинговая процедура для своего выполнения требует значительных затрат.

В таких условиях естественно поставить задачу максимизации выигрыша, или, что эквивалентно, задачу минимизации потерь, которую для удобства будем называть задачей оптимального распределения ресурсов. Более подробно сформулируем задачу следующим образом.

Пусть имеется рейтинговая система в смысле сформулированного выше определения, состоящая из m участников. Пусть, далее, определение рейтинга b_i и ранга каждого из участников сопровождается расходованием некоторого ресурса C_i, и определена некоторая функция L потерь, зависящая от рейтинга каждого из участников:

$$L=L(b_1,\ldots,b_m) \qquad (3.1)$$

Легко заметить, что потери (3.1) могут меняться в зависимости от содержания индикаторов рейтинговой процедуры и выбора функции предпочтения. Вид и смысл функции потерь (3.1) может быть чрезвычайно разнообразным и зависит от рассматриваемой ситуации

Очевидно, что общие потери рейтинговой процедуры определяются как

$$R= L(b_1,\ldots,b_m)+ \sum_{i=1}^{m} C_i \qquad (3.2)$$

Задача состоит в разработке (синтезе, конструировании) рейтинговой системы, по критерию минимума потерь (3.2) т.е. системы, которая минимизировала бы указанные потери. Отметим, что при синтезе оптимальной рейтинговой системы некоторые характеристики могут считаться уже зафиксированными, тогда варьируются оставшиеся свободными, т.е. подлежащими выбору в соответствии с критерием, другие характеристики системы.

Распределение ресурсов в условиях ограничений. Рассмотрим следующую широко распространенную задачу распределения ресурсов в условиях их ограниченности.

Пусть имеется фиксированная совокупность m участников рейтинговой системы, каждый из которых претендует на выделение некоторого ресурса C_i $(i=1,\ldots, m)$, например, финансирования. Будем полагать, что объем требуемого ресурса известен для каждого из участников системы и что общий располагаемый лицом, принимающим решение, ресурс меньше, чем сумма всех испрашиваемых участниками ресурсов.

$$\sum_{i=1}^{m} C_i > C, \qquad (3.3)$$

где C – общий объем ресурсов, имеющихся у лица, принимающего решение.

Будем, далее полагать, что функция потерь (3.1) равна нулю для всех рейтингов. С использованием рангового критерия необходимо сформировать такую совокупность участников рейтинговой системы, в которую бы входили участники старших рангов и сумма ресурсов этих участников была бы не больше C.

Критерий минимизации потерь (3.2.) неявно фигурирует в этой задаче, поскольку предполагается, что ресурс выделяется наиболее достойным, т.е. имеющим лучшие ранги участникам, что и обеспечивает минимизацию.

Сформулированная задача является простейшим неслучайным вариантом общей задачи распределения ресурсов, когда все характеристики известны априори. При этом, очевидно, методика оптимального по ранговому критерию распределения ресурсов состоит в следующем.

Составляется вариационный ряд рангов всех участников рейтинговой системы.

Требуемые ресурсы выделяются участникам, начиная с первого (старшего) ранга и последовательно суммируются,

Процедура последовательного выбора продолжается до тех пор, пока сумма ресурсов впервые не превысит их общий объем C. В соответствии с правилом построения суммы очевидно, что предыдущая сумма еще меньше C, следовательно, ранг предыдущего элемента и является максимальным рангом участника, которому еще выделен ресурс.

Полученная с применением такой методики совокупность участников и является оптимальной.

Понятно, что такая процедура представляет собой формализованный конкурс и обладает всеми недостатками, присущими критериям с применением индикаторов. Тем не менее, главным их преимуществом является работоспособность и применимость к сложным системам.

Распределение ресурсов в случайных рейтинговых системах. Задача оптимальной остановки. Пусть теперь число m участников рейтинговой процедуры, а также их рейтинги $b_1,\dots,b_m$ являются случайными величинами. Вслед за этим и потери R в (3.2) становятся случайными, поэтому общая постановка задачи требует следующего уточнения: необходимо синтезировать рейтинговую систему, минимизирующую средние потери (3.2). Обозначим операцию вычисления среднего значения (или математического ожидания) через M, тогда средние потери примут вид

$$R_M = M\,(L(b_1,\dots,b_m) + \sum_{i=1}^{m} C_i) \qquad (3.4)$$

Задача минимизации (3.4) значительно сложнее, чем минимизации (3.2), однако она предполагает значительно более широкий круг вопросов, которые могут быть при этом рассмотрены.

Одним из хорошо изученных классов задач, нашедших широкое применение, являются задачи оптимальной остановки, которые формулируются следующим образом.

Пусть имеется m участников рейтинговой процедуры, которые принимают в ней участие последовательно и выбираются из общей совокупности случайным образом. Необходимо остановить этот процесс на каком-то шаге $n<m$, при этом средние потери (3.4) принимают вид

$$R_M = M\,(L(b_1,\dots,b_n) + \sum_{i=1}^{n} C_i) \qquad (3.5)$$

Таким образом, решение принимается на основе изучения первых n участников, остальные m-n участников игнорируются. Случайная величина n называется при этом правилом (моментом) остановки.

Правило оптимальной остановки целесообразно применять, когда число участников рейтинговой процедуры велико, или когда потери на присвоение рейтинга каждому участнику существенны.

Предположим, что изучаются участники публичного конкурса с большим (практически неограниченным) числом участников на заключение сделки и лицо, принимающее решение, либо заключает сделку с участником номер n, или продолжает рассмотрение участников, причем решение о пригодности текущего участника принимается на основании сравнения со свойствами предыдущих участников, а пригодность следующих участников неизвестна. В терминах рейтинговых систем такая процедура условно может быть определена как динамическое присвоение высшего рейтинга.

Фундаментальный математический результат состоит в том, что для широкого класса функций (3.5) и широких предположениях о свойствах случайных величин, описывающих рейтинговую систему, оптимальное правило остановки существует и может быть определено в явном виде (7). При этом средние потери такой процедуры оказываются меньше потерь с заранее определенным числом m участников, что, собственно, и является основным результатом теории.

Сформулированное определение и изучение формальных рейтинговых систем позволяет сделать ряд принципиальных выводов об их свойствах и принципах построения.

Показано, в частности, что с теоретико-информационной точки зрения существует предел информационной емкости рейтинговых систем, указан принцип построения систем максимальной информационной емкости. В терминах линейных систем установлены границы возможных фальсификаций результатов рейтинговых процедур, показано, что любая совокупность положительных величин может быть представлена как результат применения рейтинговой процедуры и указан способ построения такой системы.

Кроме того, методы рейтинговых процедур позволяют решать и сложные задачи распределения ресурсов в условиях ограничений. В частности, дано явное решение одной из простейших задач такого типа, а также сформулирована весьма глубокая по содержанию задача оптимальной остановки и указано на существование ее решения.

Литература

1. http://top.rbc.ru/economics/26/03/2012/643371.shtml
2. http://www.brilliant-info.ru
3. Курош А.Г. Высшая алгебра. Издание 9-е, М, Наука, 1968. -431 стр.
4. Солодов А.В. Теория информации и ее применение к задачам автоматического управления и контроля. М.: Наука, 1967.-432с.
5. Бриллюэн Л. Наука и теория информации. М.: Физматгиз, 1960.
6. Гонтмахер Ф.Р. Теория матриц. 5-е изд. –М.: Физматлит, 2010.-559 с.
7. Герберт Роббинс, Давид Сигмунд, И.С. Чао. Теория оптимальных правил остановки. Пер. с англ. М.: Наука, 1977. -168 стр.

Сведения об авторе:

Солодов Александр Александрович, доктор технических наук, профессор

Моб (495) 726-10-09.