

**СЛОЖНЫЕ СЕТИ:
Введение в теорию**

Евин И.А.

Институт машиноведения имени А.А.Благонравова РАН

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы сетевая парадигма, использующая физические понятия и методы, стала основным и очень эффективным инструментом изучения реальных сложных систем. До этого сетевые структуры изучали в основном математики – специалисты по теории графов, и социологи. Рождением теории графов принято считать 1736 год, когда Леонард Эйлер (1707-1783), живший и работавший тогда в Петербурге, решил известную проблему семи мостов в старом Кенигсберге (Рисунок 1).

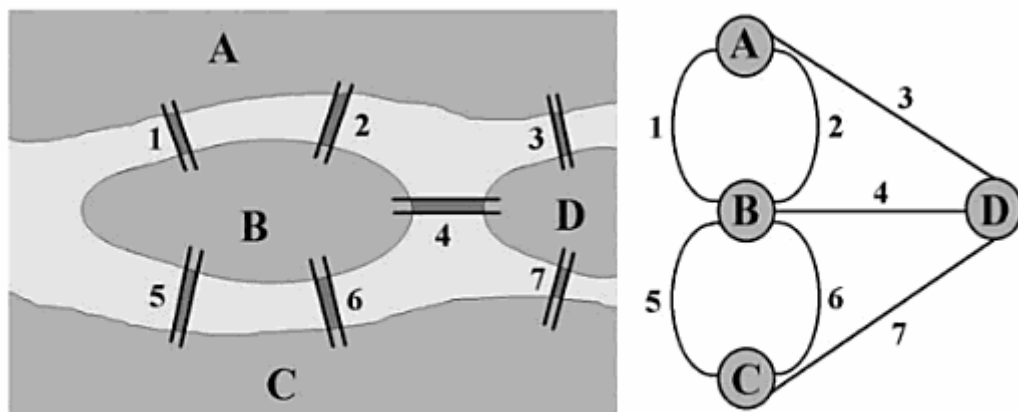


Рисунок 1. Граф для проблемы Эйлера. Узлы этого графа – четыре района старого Кенигсберга, соединенные между собой семью мостами, которым соответствуют ребра графа. В 1736 году Эйлер доказал, что начав с некоторой точки, невозможно пройти все мосты и вернуться в исходную точку, не посетив один из мостов дважды.

Доказательство знаменитой теоремы о четырех красках Appelем и Хакеном (Kenneth Appel, Wolfgang Haken) в 1976 году (четыре красок достаточно, чтобы раскрасить любую карту; при этом две соседние области должны быть раскрашены в разные цвета) – это наиболее известное последнее достижение в теории графов. В дальнейшем в основном вместо понятия «граф» мы будем использовать понятие «сеть».

Наиболее значительные результаты последних лет в изучении сетевых структур были получены физиками. Оказалось, что методы физики, прежде всего статистической механики, хорошо подходят для изучения проблем в этой области [1-4]. В отличие от математиков, физики в своих исследованиях опираются на эмпирические данные о реальных сетях, таких как Интернет, сети друзей и знакомых, или биологические метаболические сети.

В отличие от социологов, физики исследуют статистические свойства сетей, например, законы распределение узлов по числу связей. Изучая эти вопросы, было обнаружено большое количество удивительных и интригующих свойств реальных сетей, на которые не обратили внимания математики и социологи. Эти свойства послужили стимулом для разработки новых теорий, моделей, измерений, выявления новых фундаментальных свойств сетей. Именно физические журналы в настоящее время публикуют подавляющее число наиболее важных работ в этой области.

Термин «сложные сети» возник в начале этого века и относится к сетям с более сложной архитектурой, чем, скажем, классические случайные сети с заданным числом узлов и

связей, или решетки в кристаллах. Обычно в таких сетях имеется небольшое число узлов с большим числом связей - т.н. хабы (от английского hub –ядро, концентратор), которые в значительной степени и определяют свойства этих сетей. При этом оказалась, что большинство реальных сетей (биологических, технических, социальных) являются сложными.

НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В современной теории сетей число связей узла (в теории графов связи и узлы это соответственно ребра и вершины графа) называется степенью (degree). Как видно из Рисунка 1, нижний узел имеет степень пять, остальные узлы - степень три. Понятие степень является локальной характеристикой графа. Нелокальную, целостную структуру сети определяют двумя понятиями – путь (path) и петля (loop) или цикл (cycle). Путь – это чередующаяся последовательность смежных узлов и связей между этими узлами, когда узлы не повторяются. Циклом или петлей называется путь, когда начальный и конечный узел совпадают. Сети без циклов называются деревьями. Число узлов N (называемое размером сети) и число связей L в деревьях связаны простым соотношением $N = L - 1$.

Кратчайшая длина пути (геодезическая линия)

Длины всех связей между смежными узлами считаются равными единице. Расстояние l_{ij} между узлами i и j есть длина самого короткого пути (геодезическая линия) между ними в сети. Среднее межузловое расстояние \bar{l} есть среднее l_{ij} по всем тем парам узлов (i,j) между которыми существует хотя бы один соединяющих их путь (сеть может содержать несоединенные между собой узлы).

Диаметр сети

Диаметр сети l_D есть максимальное расстояние между узлами сети. Зависимость \bar{l} или l_D от размера N сети и зависит от архитектуры сети. Мы будем иметь дело с сетями, в которых эта зависимость растет медленнее, чем в регулярных решетках и фракталах. Кратчайшая длина пути сети и ее диаметр являются нелокальными свойствами сети.

Решетки и фракталы

В регулярных решетках конечной размерности зависимость $\bar{l}(N)$ имеет степенной закон:

$$\bar{l} \propto N^{1/d}$$

где d есть размерность решетки – целое число. Во фракталах, где размерность является дробным числом $\bar{l} \propto N^{1/d_f}$, где d_f - называется фрактальной или хаусдорфовой

размерностью. Легко заметить, что нет заметного различия между решетками конечной размерности и фракталами в смысле зависимости $\bar{l}(N)$ и порядком величины для \bar{l} - в обоих случаях мы имеем дело с «большим миром». Например, для двумерной решетки из 10^{12} узлов $\bar{l} \propto 10^6$.

Термин *феномен тесного мира (small world phenomenon)* применяется к сетевым структурам, в которых $\bar{l}(N)$ растет более медленно, чем по степенному закону с положительным индексом. Большинство исследованных реальных сетей, которые мы будем обсуждать в дальнейшем, имеют архитектуру подобного типа. Можно утверждать, что такие сети имеют бесконечную размерность [5].

Реальные сети имеют небольшое число узлов: $10^2 - 10^3$ узлов в большинстве биологических сетей, порядка 10^{10} в WWW. Эти числа не достаточно велики, чтобы проверять наличие эффекта «тесного мира». Более того, эти числа не настолько велики, чтобы соответствующие сети рассматривать как макроскопические системы, в которых измерение маленькой доли системы позволяет сделать заключение обо всей системе в целом. Реальные сети представляют собой мезоскопические объекты, то есть их размеры являются промежуточными между макроскопическими и микроскопическими системами.

Ориентированные графы

Если связи в сети ориентированы, что показывается стрелками, направленными от одного узла к смежному узлу, то такая сеть называется ориентированной. Примером может служить сеть цитирования научных статей. В такой сети узлами являются научные статьи, а направленными (ориентированными) связями являются ссылки на статьи внутри другой статьи.

Случайные сети

Строго говоря, понятие случайной сети не может быть применено к отдельно взятой конечной сети. В самом деле, если посмотреть на сеть определенного размера, невозможно понять, с помощью какого алгоритма (детерминистического или недетерминистического) она была построена. Поэтому, в духе статистической физики случайную сеть можно определить не как единичную сеть, а как статистический ансамбль, то есть как множество сетей, в котором каждая определенная сеть имеет определенную вероятность реализации, то есть каждая сеть ансамбля имеет свой собственный статистический вес. Из этого определения следует, что данная случайная сеть представляет собой сеть с данной определенной вероятностью, другая случайная сеть есть сеть с другой вероятностью и т.д. Для того чтобы получить среднее значение для некоторой величины в случайной сети, мы усредняем эту величину по всем реализациям, принимая во внимания их статистический вес [5].

Простейшими случайными сетями являются так называемые классические случайные графы (модель Эрдеша-Реньи (Erdos-Renyi)) в статистическом ансамбле которых все возможные графы с числом узлов N и числом связей L имеют одинаковый статистический вес реализации. То есть для таких сетей вероятность существования связи

между любыми двумя узлами одинакова. Для случайных сетей Эрдеша-Реньи $\bar{l} \propto \log N$ [6,7].

Как известно, в физике статистические ансамбли делятся на равновесные и неравновесные, что соответствует равновесным и неравновесным системам. Такое разделение уместно и для сетей. Ансамбли, в которых их статистические веса не изменяются во времени, не эволюционируют, называются равновесными. В неравновесных (способных к эволюции) ансамблях статистические веса изменяются во времени и множество конфигураций также изменяется. Растущие сети являются неравновесными. Даже среди сетей с фиксированным числом связей возможны неравновесные сети.

Распределение узлов по числу связей (degree distribution)

Распределение узлов по числу связей $P(q)$ есть вероятность того, что случайно выбранный узел в случайной сети имеет степень q :

$$P(q) = \frac{\langle N(q) \rangle}{N}$$

Здесь $\langle N(q) \rangle$ - среднее число узлов степени q в сети, причем усреднение берется по всему ансамблю. При этом подразумевается, что суммарное число узлов у всех членов этого ансамбля одинаково $N = \sum_q \langle N(q) \rangle$. Исследователь, изучающий эмпирически отдельный граф, скажем граф g , измеряет частоту появления узлов степени q в этом графе: $P_g(q) = N_g(q)/N$. Здесь $N_g(q)$ есть число узлов степени q в графе g . Эта величина также часто называется распределением узлов по числу связей (degree distribution), хотя проблема строгого формального описания статистического ансамбля случайных сетей с заданным законом распределения узлов по числу связей до сих пор является нерешенной [2].

Распределение узлов по числу связей является простейшей статистической характеристикой случайной сети. Замечательно то, что во многих случаях знание этой характеристики достаточно для понимания свойств этой сети и процессов, которые в ней происходят.

В классических случайных графах распределение узлов по числу связей (degree distribution) спадает довольно быстро $P(q) \propto 1/q!$, поскольку для случайных сетей распределение узлов

по числу связей подчиняется закону Пуассона $P(q) = e^{-\langle q \rangle} \frac{\langle q \rangle^q}{q!}$.

Все моменты $\sum_q q^n P(q)$ для классических случайных сетей конечны, даже когда размер сети приближается к бесконечности, так как среднее значение $\langle q \rangle = \sum_q q P(q)$ имеет характерный масштаб. В этих сетях практически отсутствуют узлы с большим числом связей (хабы).

В противоположность этому, многие реальные сети - от метаболических сетей в клетках до Интернета - имеют медленно спадающее распределение узлов по числу связей, и в этих сетях хабы (узлы с большим числом связей) составляют заметную долю от всех узлов, и именно они определяют многие важные свойства этих сетей.

Асимптотическая зависимость $P(q)$ в виде степенного закона $P(q) \propto 1/q^{-\gamma}$ при больших значениях q - обычный пример медленно спадающего распределения узлов по числу связей. Распределение узлов по числу связей в виде степенного закона еще называется безмасштабным (scale free), а сами сети получили название безмасштабных сетей (scale free networks), что означает отсутствие узла с типичным числом связей в такой сети.

Кластеризация

Кластеризация – это локальная характеристика сети. Она характеризует степень взаимодействия между собой ближайших соседей данного узла. В большинстве сетей, если узел А соединен с узлом В, а узел В – с узлом С, то существует большая вероятность, что узел А соединен с узлом С (друзья наших друзей, обычно, также являются и нашими друзьями).

Коэффициент кластеризации данного узла есть вероятность того, что два ближайших соседа этого узла сами есть ближайшие соседи. Другими словами, если узел j имеет q_j ближайших соседей с числом t_j связей между ними, то локальный коэффициент кластеризации равен:

$$C_j(q_j) = \frac{t_j}{q_j(q_j - 1)/2}$$

Число t_j есть суммарное число треугольников – циклов длины 3 - прикрепленных к узлу j , а $q_j(q_j - 1)/2$ - максимально возможное возможных треугольников (см. рисунок 2). Если все ближайшие соседи узла j взаимосвязаны, то $C_j = 1$. Когда между ними нет связей (как у деревьев), то $C_j = 0$.

Кластеризация всей сети определяется как

$$C = 3 \frac{M_{\Delta}}{M_{\nabla}}$$

M_{Δ} - число треугольников в сети, а M_{∇} - число связанных триад, где «связанная триада» означает узел и два его ближайших соседа (Рисунок 2). Можно показать, что число триад из узлов равно $\sum_i q_i(q_i - 1)/2 = N(\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2)/2$.

По сути, коэффициент кластеризации C есть доля тех триад, у которых есть три ребра, образующих треугольник, то есть циклов длины 3.

Среднее значение кластеризации по всем узлам

$$\langle C \rangle = \frac{1}{n} \sum_i C_i$$

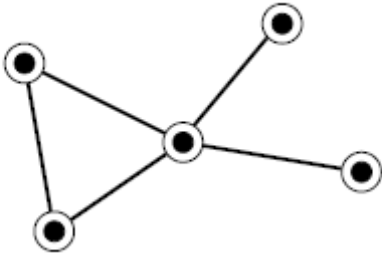


Рисунок 2. Изображенная сеть содержит один треугольник (цикл длины 3) и восемь соединенных триад. Следовательно, у этой сети коэффициент кластеризации равен $3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

Отдельные узлы имеют коэффициенты кластеризации 1, 1, $\frac{1}{6}$, 0 и 0, а среднее значение равно $\langle C \rangle = \frac{13}{30}$.

Таким образом, кластеризация характеризует статистику циклов (треугольников) в сети. Важно то, что большинство реальных сетей в мире обладают высокой кластеризацией, на порядки превышающей кластеризацию классических случайных сетей в модели Эрдеша-Реньи $C(q) \cong \frac{\langle q \rangle}{N}$.

Матрицы смежности и Лапласиан

Сетевые структуры можно описывать в матричной форме. Сеть из N узлов описывается квадратной матрицей смежности \mathbf{a} размерности $N \times N$, в которой ненулевые элементы матрицы обозначают наличие связей между соответствующими узлами. Для неориентированных сетей недиагональный элемент a_{ij} матрицы смежности равен числу связей между узлами i и j , и, следовательно, матрица для такой сети симметрична. Предполагается, что петли единичной длины и кратные связи запрещены, следовательно, значения диагональных элементов a_{ii} равны нулю.

Любые структурные свойства сети могут быть выражены через свойства матрицы смежности. Например, степень узла i равна $q_i = \sum_j a_{ij}$.

Другой важной матрицей является Лапласиан $\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$, где \mathbf{D} – диагональная матрица, элементы которой D_{ii} равны степени узла i , \mathbf{A} – матрица смежности. Лапласиан широко используется в задачах выявления сообществ (задачах кластеризации) в сложных сетях.

Численные расчеты с матрицами смежности для сетей больших размеров требуют значительных ресурсов памяти компьютера. К счастью, часто удается упрощать работу с матрицами смежности, поскольку реальные сети и их модели являются разреженными. То есть число соединений в таких сетях значительно меньше, чем у полностью связанной сети $L \ll N^2$ или $\langle q \rangle \ll N$. Таким образом, огромное большинство элементов матриц смежности реальных сетей равно нулю.

Возникновение гигантского связанного кластера

В пределе с фиксированным $\langle q \rangle$ при $N \rightarrow \infty$ мы получаем разреженные сети, в которых число связей в узле намного меньше, чем в полностью связанном графе. В таких неориентированных сетях можно ввести понятие гигантского связанного кластера узлов сети. Если относительный размер наибольшего связанного кластера узлов сети приближается к ненулевому значению при росте числа узлов к бесконечности, этот кластер называется гигантским связанным кластером или наибольшей связанной компонентой сети. В этом случае, размер следующего по величине связанного кластера узлов будет малым по сравнению с гигантским связанным кластером для достаточно большой сети. Без гигантского связанного кластера сеть представляет собой лишь множество маленьких разделенных кластеров. Оказалось, что в классических случайных сетях гигантский связанный кластер существует, если среднее число связей узла превышает единицу. Возникновение такого кластера можно рассматривать структурный фазовый переход.

2. СЕТИ ТЕСНОГО МИРА И БЕЗМАСШТАБНЫЕ СЕТИ

Эксперимент Милграма

В 1967 году социолог из Гарвардского университета С. Милграм (Stanley Milgram) на основе своего социологического исследования сделал удивившее многих утверждение: каждого человека на земном шаре можно связать с любым другим человеком цепочкой из шести знакомых [8].

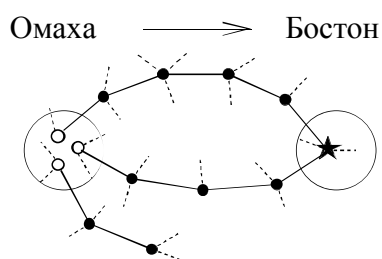


Рисунок 3. Схема социологического эксперимента Милграма.

Он разослал 296 писем с одинаковым содержанием случайно выбранным людям в двух разных городах США (196 человек в г. Омаха, штат Небраска и 100 человек в Бостоне, штат Массачусетс). В этих письмах сообщалось, что данное письмо должно достигнуть определенного человека в Бостоне, с которым эти 296 человек не были знакомы, и адрес этого человека им не был известен. При этом эти люди должны пересылать письма только тем своим знакомым, которые, по их мнению, могут им помочь достигнуть нужного конечного адресата. В эксперименте С.Милграма из 296 писем, 69 достигли цели, что составляет 29% от общего числа. Средняя длина пути оказалась равной 6.2. Этот эксперимент считается первым эмпирическим доказательством «явления тесного мира» (“small world phenomenon”).

36 лет спустя, был осуществлен эксперимент в большем масштабе с использованием электронной почты. Было выбрано 24163 добровольца, которые послали электронные письма своим знакомым. Конечными получателями были 18 человек из 13 стран.

Завершенными оказались только 384 (!) цепочки, что указывает на то, что социальные сети на глобальном уровне довольно сильно разрежены. Однако средняя длина пути оказалась около четырех степеней разделения, то есть даже меньше, чем «шесть степеней».

Таким образом, несмотря на то, что на Земле живет более шести миллиардов людей, мир действительно тесен. Это свойство социальной коммуникации получило еще название «шесть степеней разделения» – по названию бродвейской пьесы, а затем и фильма (“Six degrees of separation”) [9]. Героиня этого фильма говорит:

*“Я где-то читала, что каждый на нашей планете отделен от другого человека только шестью людьми. Шесть степеней отделения я... Между нами и любым другим на планете. Президентом Соединенных Штатов. Гондольером в Венеции. ...Не обязательно известные имена. С любым. Можно найти ровно шесть людей, чтобы установить связь. Туземцем в джунглях. Эскимосом.
...Каждая персона как новая дверь, распахнутая в остальной мир.”*

Социологические исследования показывают, что люди сгруппированы в малые кластеры друзей, коллег и знакомых и эти кластеры обычно слабо связаны с другими аналогичными кластерами. В социологии это называется кластеризацией. Поэтому чем лучше ваши друзья знают друг друга, тем в меньшей степени вы можете рассчитывать на то, что они помогут вам связаться с незнакомым вам человеком.

Кляйнберг первым обратил внимание на то, что в эксперименте Милграма не только показывается существование кратчайшего пути между любой парой в социальной сети, но и на тот факт, что люди вполне успешны в нахождении этих кратчайших путей [10]. Он продемонстрировал, что эта задача нетривиальна даже для простой сети, если людям незнакома ее структура. В эксперименте Милграма его участники, несомненно, не знали структуру всех связей сети знакомств. Кляйнберг предложил возможный механизм навигации в такого рода социальных сетях: хотя никто не знает всю сеть в целом, каждый имеет друзей или знакомых на различных расстояниях и имеет приблизительное интуитивное представление как близок каждый из них к любой конечной цели эксперимента. Произвольно выбранный начальный участник эксперимента, скажем из Нью-Йорка, для того, чтобы его письмо достигло незнакомого ему получателя в Лос-Анжелесе, отправит его своему знакомому в Калифорнии. Это знакомый в свою очередь, сделает более короткий шаг, переслав письмо своему знакомому в Лос-Анжелесе и этот процесс повторится со все более короткими шагами до тех пор, пока письмо не попадет к кому-то, кто знает конечного получателя. Таким образом, процесс будет успешным, если люди имеют адекватное представление о распределении друзей в зависимости от расстояния до конечного получателя. Если же такое представление отсутствует, то цепочка шагов либо оборвется, либо сами шаги будут очень маленькими, а их число может быть очень большим. Таким образом, успешность эксперимента Милграма означает, что социальные сети имеют особую структуру, для которых может быть введены различные метрики для расстояний.

Исследования Воттса и Строгатца

.

В середине 1990 годов С. Строгатц (Steven Strogatz) и его аспирант Д. Воттс (Duncan Watts) из Корнельского университета в Итаке (штат Нью-Йорк) решили изучить свойства сетей, которые обладают свойством «тесного мира». Компьютерное моделирование различных типов сетей показало, что этим свойством обладают сети с высокой степенью кластеризации и малой средней длиной пути между узлами [11,12]. Сеть актеров Голливуда, нейронная сеть червя-нематода, Структура Интернета и всемирной паутины также обладает феноменом «тесного мира». Например, исследования, проведенные в университете Нотр Дам, США, показали, что среднее число «кликов», которые необходимо сделать, чтобы перейти от одной Web-странички на любую другую описывается формулой

$$D \propto 0.35 + 2.06 \log(N),$$

где N – число узлов в WWW.

Известно, что $N \propto 10^{10}$ (данные 2000 года), и получаем $V \propto 18 \div 19$, и, следовательно, всемирная паутина представляет собой «тесный мир».

Сети «тесного мира»

Воттс и Строгатц выделили специальный класс сложных сетей, которые обладают эффектом «тесного мира» и назвали их сетями «тесного мира». Регулярные кристаллические решетки (например, треугольные) имеют высокое значение коэффициента кластеризации и большую среднюю длину пути. Классические случайные сети имеют низкое значение коэффициента кластеризации и небольшую среднюю длину пути.

Сети тесного мира или сети Воттса-Строгатца (WS networks) можно рассматривать как суперпозицию регулярных решеток и классических случайных сетей, например, Ердеша-Реньи, поскольку они обладают высокой кластеризацией и низким значением средней длины пути. Сети тесного мира – весьма специфический вид сетевых структур. При этом важно иметь в виду, что свойством тесного мира обладают несравненно более широкий класс сетей, чем сети Воттса-Строгатца – практически все реальные сети. Формально, сети со свойством «тесного мира» имеет бесконечную размерность. Реальные сетевые структуры, как правило, имеют и высокий коэффициент кластеризации.

Безмасштабные сети

В 1999 году физик из университета Нотр Дам (США) Л. Барабаши (Laszlo Barabasi) вместе со своей аспиранткой Р. Альберт (Reka Albert) изучали свойства реальных сетей с несколько иной точки зрения. Если Строгатц и Воттс в своем исследовании сетей исходили из феномена «тесного мира», то Барабаши и Альберт решили исследовать закон распределения узлов некоторых реальных сетей по числу связей. Результат также оказался неожиданным [1,13].

Вместо распределения числа связей по закону Пуассона, который имеет строгий максимум около среднего значения, для многих реальных сетей, например, таких как метаболические сети и белковые взаимодействия в клетках, структура авиационных сообщений в США, структура Интернета и его виртуального двойника World Wide Web и т. д., такого среднего значения не существует, а соответствующее вероятностное распределение подчиняется свойственному всем критическим состояниям степенному закону

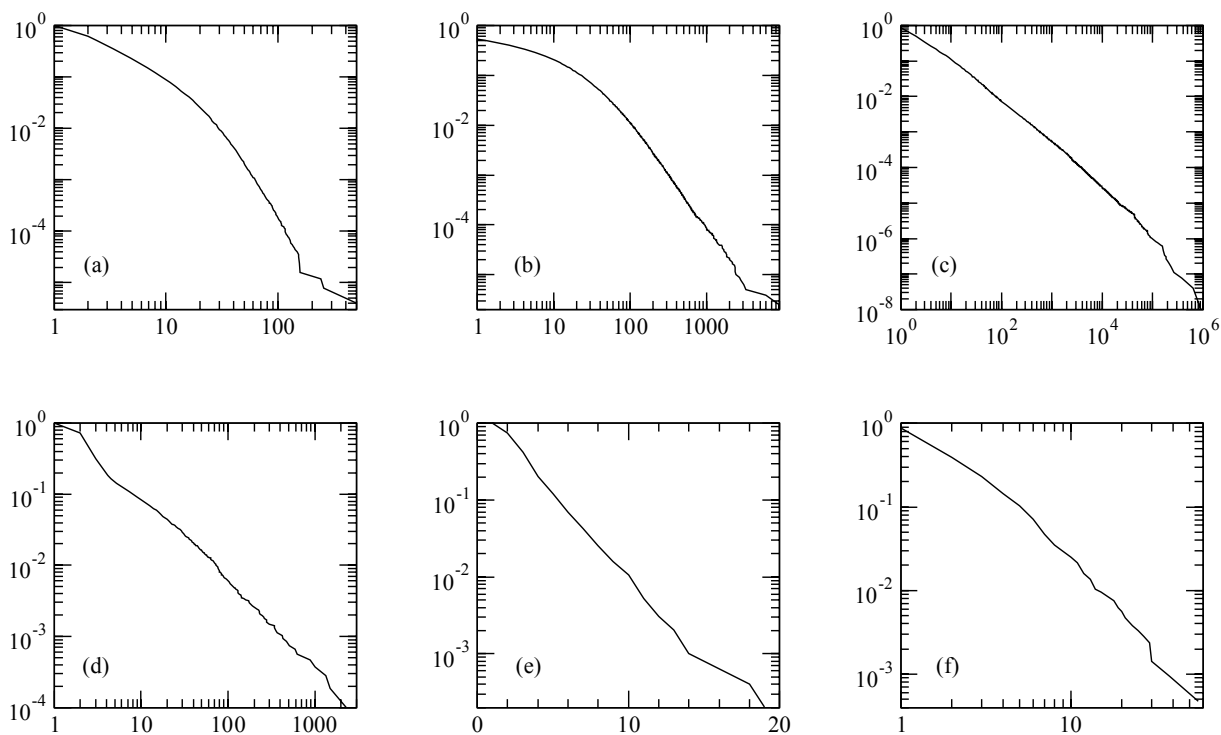


Рисунок 4. . Примеры сложных систем с различной сетевой архитектурой: (а) соавторы по математике, (b) цитирование, (c) «всемирная паутина» (WWW), (d) Интернет, (e) сеть электростанций, (f) взаимодействие белков. Из этих сетей (b), (c), (d) и (f) являются безмасштабными, поскольку в двойном логарифмическом масштабе графики зависимости распределения узлов по числу связей являются примерно прямыми линиями. Сеть (e) имеет экспоненциальный закон распределения (горизонтальная ось дана в линейном масштабе, а вертикальная – в логарифмическом). Сеть (a) имеет две области со степенным законом распределения, но с разными показателями степени.

$$P(q) \propto q^{-\lambda}$$

Таким образом, во многих реальных сетях небольшое число узлов содержит очень большое число связей, а огромное число узлов содержит лишь несколько связей (Рисунок 4). Такие сети получили название безмасштабных сетей (scale free networks).

Для безмасштабных сетей $\bar{l} \propto \log \log N$, где N – число узлов в сети, что значительно меньше, чем для случайных сетей Эрдеша-Реньи, в которых, напомним, $\bar{l} \propto \log N$.

Недавно получены свидетельства того, что функциональные связи в мозге человека образуют безмасштабные сети. В мозге животных и человека постоянно идут процессы самоорганизации и распада функциональных нейронно-сетевых структур. Каждая такая сеть, объединяющая нейронные ансамбли из разных отделов мозга, создается для реализации определенной функции мозга – поведенческой, когнитивной и т.п. Именно такие функциональные нейронные сети стали объектом изучения группы исследователей во главе с Д.Чиаervo (Dante Chialvo), целью которых было проверить возможность приложения идей и методов современной теории сетей (безмасштабные сети, сети «тесного мира» и т.д.) к топологии реальных функциональных структур мозга [14].

Используя метод магнитно-резонансного изображения, измерялась активность мозга при осуществлении простого моторного действия (стук пальцем по столу) на каждом временном интервале в 2,5 секунды на протяжении 400 таких интервалов. Изучалась область мозга размером $36 \times 64 \times 64$ пространственных ячеек с размером каждой ячейки $3 \times 3,475 \times 3,475$ мм³.

Обозначим активность каждой такой ячейки x в момент времени t , как $V(x,t)$. Каждые две ячейки будем считать функционально связанными между собой, если значение пространственно-временной корреляции $r(x_1, x_2)$ между ними превышает некоторый порог r_c . Само значение корреляции вычисляется по следующей формуле

$$r(x_1, x_2) = \frac{\langle V(x_1, t)V(x_2, t) \rangle - \langle V(x_1, t) \rangle \langle V(x_2, t) \rangle}{\sigma(V(x_1))\sigma(V(x_2))},$$

где $\sigma^2(V(x)) = \langle V(x, t)^2 \rangle - \langle V(x, t) \rangle^2$, а $\langle \cdot \rangle$ означает усреднение по времени. На Рисунке 9 показан фрагмент нейронной сети, полученной таким методом. Полная сеть содержит до 31503 узла.

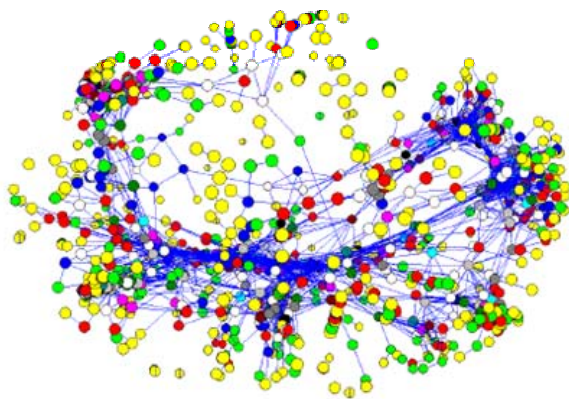


Рисунок 5. Функциональная сеть мозга человека при выполнении им простого моторного действия. Показан фрагмент такой сети.

Разделив мозг на тысячи ячеек, каждая размером в несколько миллиметров, фиксировалась активность каждой такой ячейки при выполнении таких простых функций как, например, стук пальцем по столу. При регистрации активности каждой такой ячейки можно определить, какие ячейки взаимосвязаны между собой (если активность ячеек в разных частях мозга проявляет свойство синхронности, то это указывает на то, что между ними есть связь). Оказалось, что такие связанные ячейки образуют безмасштабную сеть со свойствами «тесного мира» $P(k) \approx k^{-\gamma}$, $\gamma \approx 2$

Когнитивные сети

В последнее время структурные свойства языка, религиозных учений и продуктов художественного творчества также стали изучаться с применением методов теории сложных сетей. Соответствующие сетевые структуры формируются в мозге человека, его памяти. Мы будем называть их когнитивными сетями.

Возникновение языка представляет собой одно из важнейших явлений в биологической эволюции. Сложное языковое поведение и само общение людей посредством такого поведения стало главным эволюционным приобретением человеческой цивилизации, отделившей ее от животных.

Различные сетевые структуры языка можно получить, используя различные правила соединения слов. Например, для данного текста, два слова связаны, если оба эти слова присутствуют в одном из предложений этого текста. Ясно, что для разных текстов получатся разные сети, но все они будут иметь степенной закон распределения слов (узлов) по числу связей с $2 < \gamma < 3$ [15].

Все они имеют довольно малое значение отношения число связей на число узлов (разряженные сети). (среднее число связей на узел). Все они обладают свойством «тесного мира». Короткий путь есть отличительный признак эффективности передачи информации, которое отсутствует при болезни Альцгеймера, когда этот путь имеет существенно большую длину.

В западноевропейской культуре древнегреческие мифы стали основой для развития сюжетов в литературе и в живописи. На протяжении трех тысяч лет писатели, поэты, художники, композиторы используют в своем творчестве мифологические образы древней Греции. Возможно, и сейчас эти сюжеты и образы формируют нас в большей степени, чем современная литература.

Словарь классической греческой мифологии Гранта и Хазеля содержит биографии всех персонажей древнегреческих мифов, как всем известных богов, так и малоизвестных нимф. Всего в словаре 1647 богов, нимф, чудовищ, сирен, простых смертных.

На основе этого словаря была сконструирована сеть межличностных связей героев древнегреческих мифов [16]. В этой сети каждому узлу соответствует определенный персонаж, а узлы А и В соединены связью, если в при описании персонажа А появляется персонаж В и наоборот.

Например, Акакалида, дочь Миноса и Пасифаи, родила Аполлону сына Амфидемиса и, возможно, Милета. Следовательно, Акакалида связана с этими пятью персонажами направленными от нее связями. Если ее имя будет упоминаться в историях, связанных с другими героями, то появятся связи направленные к ней самой (Рисунок 6).



Рисунок 6. Фрагмент сетевой структуры героев древнегреческих мифов. Показаны межличностные связи Акакаллиды – критянской нимфы. Для этого персонажа число выходящих и входящих связей соответственно $k_{out}=5$ и $k_{in}=3$.

Сконструированная таким образом сеть оказалась сетью со свойствами «тесного мира». Среднее число шагов между узлами в этой сети равняется 3,47. Более детальный анализ показывает, что она обладает также свойствами безмасштабных сетей, в которой связи распределены по узлам по степенному закону и представляет собой иерархически организованную структуру.

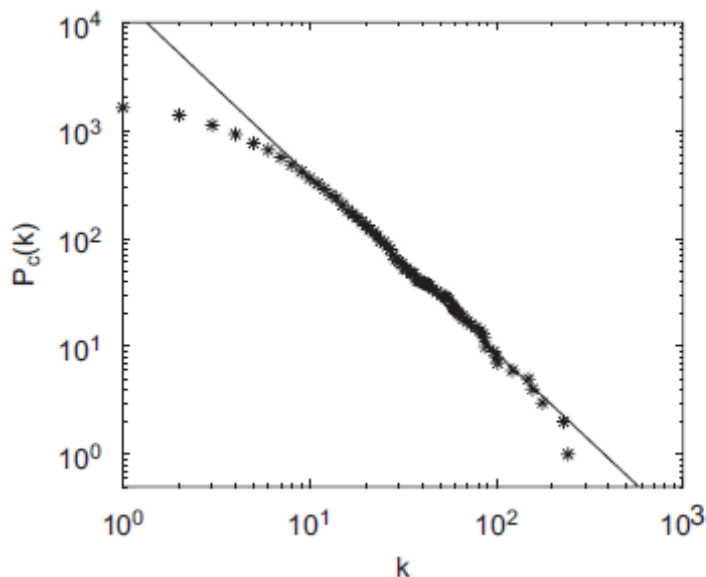


Рисунок 7. Кумулятивное распределение связей героев древнегреческих мифов по числу связей между ними. Показатель степени этого аспределения равен 2.63

Подобного рода новые подходы в исследовании структуры религиозных учений очень важны для когнитивной науки, поскольку религиозное сознание было первой формой сознания человека, и понимание количественных закономерностей его формирования может помочь в изучении других форм сознания, в том числе связанного с искусством. Недавно была построена социальная сеть персонажей Нового и Ветхого Завета, а также географических мест, связанных с библейскими сюжетами, и в настоящее время вычисляются статистические параметры этой сети.

Партитура музыкального произведения легко преобразуется в сетевую структуру, если в качестве узлов такой сети взять музыкальные ноты всех возможных длительностей

[17]. Нетрудно подсчитать, что число узлов в такой сети не будет превышать 1800. В самом деле, число клавиш у рояля равно 88 и, умножая это число на 20 – число длительностей ноты (половинные, четверти, восьмые и т.д.), получаем 1760. Связи между узлами (нотами) в сети устанавливаются по хронологическому принципу: если нота I начинает звучать в момент времени T, а нота J в этот момент заканчивает свое звучание, то между соответствующими узлами сети имеет место связь.

Ли (Xiaofan Liu), Тсе (Chi K. Tse) и Смол (Michael Small) из политехнического университета Гонконга проанализировали статистические свойства сетей, построенных по описанному выше принципу, для произведений Баха, Моцарта, Шопена и современных китайских композитов, работающих в жанре поп музыки. Все эти сети оказались безмасштабными. Среднее число шагов между узлами в этих сетях варьируют в диапазоне от 2.8 до 4.2. Коэффициенты кластеризации C лежат в пределах от 0.48 (Бах) и 0.36 (Шопен) до 0.26. Другие параметры сетей также изменялись довольно значительно для различных произведений [17].

Модель Барабаши-Альберт

Барабаши и Альберт предложили простую и элегантную модель возникновения и эволюции безмасштабных сетей. Они показали, что для возникновения безмасштабных сетей необходимы два условия [1]:

1. *Рост*. Начиная с небольшого числа m_0 узлов, на каждом временном шаге добавляется один новый узел с m ($m \leq m_0$) связями, которые соединяют этот новый узел с m различными уже существующими узлами.

2. *Предпочтительное присоединение (Preferential attachment)*. Когда выбираются узлы, к которым присоединяется новый узел, предполагается, что вероятность P с которой новый узел будет соединяться с уже существующим узлом i , зависит от числа связей q_i , которыми этот узел уже связан с другими узлами, так что

$$P(q_i) = q_i / \sum_j q_j .$$

Безмасштабные сети - это одно из проявлений феноменологии критических явлений в сложных системах, поскольку их структура подчиняется степенному закону.

3. СТРУКТУРА СЛОЖНЫХ СЕТЕЙ

Нагрузка узла (betweenness centrality)

Для многих социальных сетей, например, для сети актеров кино, необходимо определить относительную важность входящих в нее узлов. Например, загруженность актера i в сети актеров (между двумя актерами кино имеется связь, если они снялись в одном фильме) определяется как суммарное число кратчайших путей между всеми остальными актерами (узлами), которые проходят через актера (узел) i .

$$B(i) = \sum_{st} \sigma_{st}(i) / \sigma_{st}$$

где $\sigma_{st}(i)$ число кратчайших путей из узла s в узел t через узел i и σ_{st} - общее число кратчайших путей между всеми парами s и t .

Эту величину можно считать индикатором наиболее влиятельных и важных персон (VIP) в социальной сети. Эта величина также важна в изучении транспортных потоков и обычно называется нагрузкой (загруженностью) узла (или связи), поскольку характеризуют долю проходящих через узел кратчайших путей и узлы с высоким значением B являются наиболее загруженными. В отличие от степени узла, понятие важности узла отражает топологию всей сети.

Подграфы и мотивы

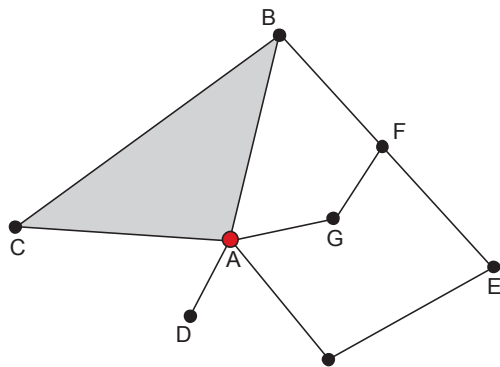


Рисунок 8. Различные типы подграфов в сети

Безмасштабные свойства сложных сетей отражают их крупномасштабную структуру. Для характеристики локальных структурных свойств сетей используется подход на основе анализа паттернов связей узлов. Например, связанный подграф представляет собой подмножество узлов, соединенный между собой специфическом структурой соединений. Так, узлы A, B, C образуют треугольный подграф, а узлы A, B, F, и G образуют четырехугольный подграф (Рисунок 8). Число различных возможных подграфов растет экспоненциально с ростом числа узлов в сети.

Не все подграфы возникают в сетях с одинаковой частотой. В самом деле, в квадратных решетках имеются только квадратные подграфы, и мы никогда не найдем в них, скажем, треугольные или пятиугольные подграфы. В сложных сетях со случайным соединением связей между узлами можно обнаружить и треугольные, и квадратные и пятиугольные подграфы.

При этом некоторые подграфы, называемые мотивами имеют большую частоту появления в сетях определенной структуры, чем в рандомизированных версиях тех же самых сетей. Например, ориентированный треугольный подграф на рисунке 9:



Рисунок 9. Ориентированный треугольный подграф

можно обнаружить во многих биологических сетевых структурах (нейронных сетях, регуляторных клеточных структурах), в то время как мотив из четырех узлов (Рисунок 10):

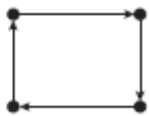


Рисунок 10. Ориентированный четырехугольный подграф

можно найти в электрических сетях, но его не встретишь в биологических структурах.

Чтобы определить мотив, характеризующий данную сетевую структуру, определяют все подграфы из n узлов. Затем сеть рандомизируется (алгоритм рандомизации сети описан, например, в [18]), оставляя при этом неизменным число узлов, связи между узлами и число связей (степень) каждого узла. Подграфы, которые возникают гораздо чаще в реальной сети, чем в рандомизированной ее версии и являются мотивами данной сети.

Клики, сообщества, общины, группы, коммунуны

Кликами (cliques) называются полносвязные подграфы некоторого графа. Изучение сообществ (communities) в сетях имеет довольно длительную историю. Оно тесно связано с задачами разбиения графов на подграфы. В последние годы разработка соответствующих методов получила сильный импульс в теории сложных сетей социальной природы [3,19].

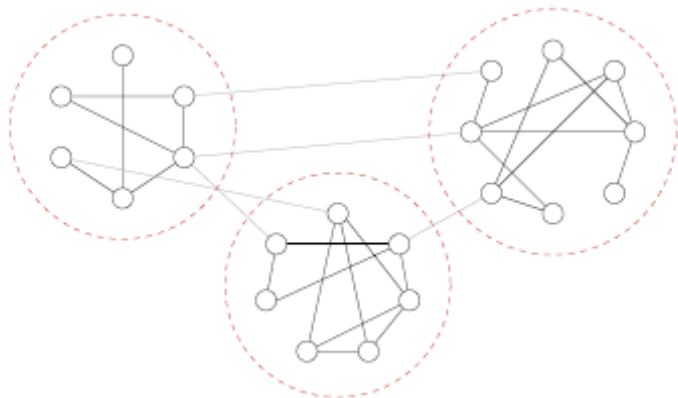


Рисунок 11. Схематическое изображение сети из трех сообществ.

Под сообществами понимается подграфы, для которых связи между узлами внутри подграфов сильнее и многочисленнее, насыщеннее, чем между узлами различных подграфов (Рисунок 11).

В алгоритме предложенном Гирваном и Ньюманом (M. Girvan and M.E.J. Newman) [19, 20] связи с максимальной важностью (betweenness centrality) удаляются один за другим. Каждое такое удаление изменяет структуру кратчайших путей в сети, а следовательно и важность каждой связи, и поэтому эти параметры пересчитываются после каждого удаления. На некотором шаге сеть оказывается разделенной на два кластера – два самых больших сообщества и далее процедура продолжается. В результате получается дерево, в котором сообщества малых размеров включены в более большие сообщества. Распределение по размерам сообществ, выявляемых в результате этой процедуры, в большинстве реальных сетей подчинено степенному закону.

Ассортативное и диссортативное смешивание

Термин «ассортативное спаривание» (assortative mating), то есть подбор подобного к подобному, возник в биологических исследованиях, когда при селекции исследовалось по каким параметрам и признакам происходит подбор пар при спаривании.

Термин «Ассортативное смешивание» (assortative mixing) или гомофилия возник в социологии, в частности, при изучении закономерностей формирования супружеских пар [21]. В Таблице 1 приводятся данные такого исследования в г.Сан Франциско (Калифорния, США) для 1958 супружеских пар различных рас, которые показывают четкую тенденции в образовании пар из представителей одной расы.

Таблица 1. Расовые предпочтения при образовании супружеских пар в г. Сан-Франциско .

		Женщины			
		Афро-американцы	Мексиканцы	Светлокожие	Остальные
Мужчины	Афро-американцы	506	32	69	26
	Мексиканцы	23	308	114	38
	Светлокожие	26	46	599	68
	Остальные	10	14	47	32

На Рисунке 12 показаны возрастные данные для супругов на момент регистрации брака.

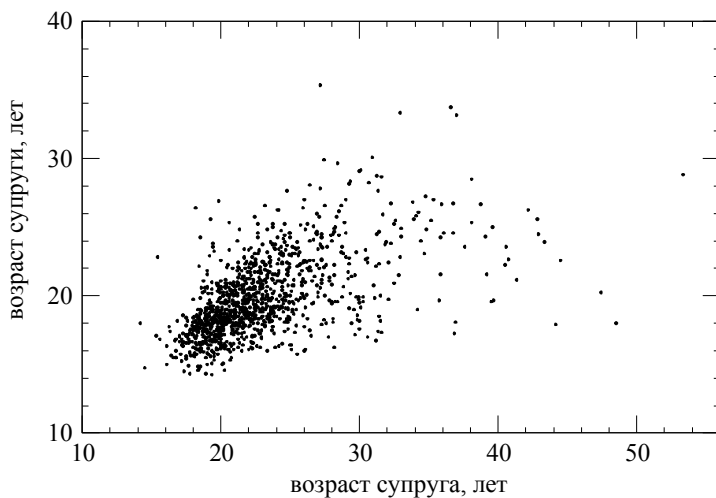


Рисунок 12. Возрастные данные для супружеских пар г.Сан Франциско

Таблица 2. Ассортативность социальных, технологических и биологических сетей .

	сеть	Тип	Размер n	Ассортативность r
Социальные	соавторов по физике	неориентированная	52 909	0,363
	соавторов по биологии	неориентированная	1 520 251	0,127
	соавторов по математике	неориентированная	253 339	0,120
	сотрудничества актеров кино	неориентированная	449 913	0,208
	директоров компаний	неориентированная	7 673	0,276
	связей студентов	неориентированная	573	-0,029
	адресов электронной почты	ориентированная	16 881	0,092
технологические	сеть электростанций			
	Интернет	неориентированная	4 941	-0,003
	«всемирная паутина» (WWW)	неориентированная	10 697	-0,189
	взаимозависимости программного обеспечения	ориентированная	269 504	-0,067
Биологические		ориентированная	3 162	-0,016
	взаимодействий белков	неориентированная	2 115	-0,156
	метаболическая сеть	неориентированная	765	-0,240
	нейронная сеть	ориентированная	307	-0,226
	морская пищевая сеть	ориентированная	134	-0,263
пресноводная пищевая сеть	ориентированная	92	-0,326	

Социологические исследования показали, что сети друзей также формируются на основе общего языка, расы, возраста, уровня образования и доходов и т.п. В таких случаях говорят, что соответствующие сети обладают свойствами ассортативного смешивания. Возможно, именно это является главной причиной, что в странах и городах с более, чем одним языком и (или) этносом, можно ожидать появление стратифицированных сообществ, например, чайна-таунов в некоторых мегаполисах. Если же сетевые структуры формируются по антагонистическому принципу, они, по определению, обладают свойством дисассортативного смешивания.

Ассортативность r в таблице 2 служит мерой тенденции узлов сети оказаться соединенными с другими узлами с одним и тем же числом связей. Его можно определить как коэффициент Пирса:

$$r = \frac{L \sum_{i=1}^L j_i k_i - \left[\sum_{i=1}^L j_i \right]^2}{L \sum_{i=1}^L j_i^2 - \left[\sum_{i=1}^L j_i \right]^2}.$$

Здесь L число связей в сети, а j_i и k_i - число связей у узлов на обоих концах связи i . Если узлы с большим числом связей (хабы) связаны друг с другом, то $r \approx 1$. Если узлы с большим числом связей связаны с узлами с небольшим числом связей, то $r \approx -1$.

Социальные сети имеют фундаментальные отличия от других типов сетей, например, технических и биологических по двум важным характеристикам. Первое, они имеют необычно высокую кластеризацию, или транзитивность. Например, для сети сотрудничества математиков $C=0.59$. Даже для исследованной недавно сети героев древнегреческих мифов $C=0.41$ [16]. Напомним, также, что для сетей описывающих структуру музыкальных произведений [17], а также для функциональных сетей мозга [14] кластеризация также высока. Возможно, это свойство стало одной из причин возникновения сознания у человека.

Во-вторых, у биологических и социальных сетей разные знаки ассортативности r . Биологические сети формируются по принципу дисассортативного смешивания.

Хорошо известно, что социальные сети делятся на группы или коммуны, и, возможно, это объясняет наблюдаемую их необычную кластеризацию и положительную корреляцию по распределению связей в смежных узлах. Используя модели социальных сетей, можно показать, что если такую сеть разделить на группы или сообщества, то уже такая простая процедура объясняет оба различия в значениях коэффициентов корреляции и кластеризации между социальными и несоциальными (техническими и биологическими) сетевыми структурами.

Сотрудничество в социальных сетях

Сотрудничество в процессе биологической эволюции возникло на ее ранних этапах и стало одним из ключевых факторов функционирования живой природы. В настоящее время хорошо изучено и описано на уровне нелинейных математических моделей сотрудничество в колонии дрожжей [22]. Нет никакого сомнения, что наиболее развитое, интенсивное и обширное сотрудничество имеет место в человеческом обществе. Недавние исследования показали, что безмасштабные сети социальных взаимодействий в большей степени, чем другие сетевые структуры, способствуют возникновению сотрудничества [23].

4. КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В СЛОЖНЫХ СЕТЯХ

Критические явления в сетевых структурах включают в себя широкий спектр (форм поведения) явлений: структурные изменения в сетях, возникновение критического состояния – безмасштабной сетевой архитектуры, разнообразные перколяционные явления (например, возникновение эпидемиологического порога), критические точки в различных

оптимизационных проблемах и многие другие. Многие из этих критических явлений тесно связаны между собой, имеют сходную природу и допускают универсальное описание [24].

Устойчивость к атакам

Для сложных систем, взаимодействия элементов которых описываются случайными сетями Ердеша-Реньи, их устойчивость к ошибкам и повреждениям может быть исследована методами теории перколяции. Исследования показывают, что при произвольном удалении узлов из случайного графа, существует определенное критическое значение, измеряемое отношением числа удаленных узлов к общему числу узлов в сети, выше которого сеть распадается на отдельные кластеры.

Для безмасштабных сетей такого критического числа не существует. Численные эксперименты показывают, что, удалив даже 80% узлов, оставшиеся узлы продолжают образовывать связанный кластер. Следовательно, безмасштабные сети очень устойчивы к случайным повреждениям или внешним, случайным воздействиям. Эта устойчивость объясняется неомогенной топологической структурой этих сетей. Но у таких сетей существует своеобразная «Ахиллесова пята» [1]. Например, хакер может существенно повредить WWW если выведет из строя один или несколько наиболее связанных сайтов (Рисунок 13).

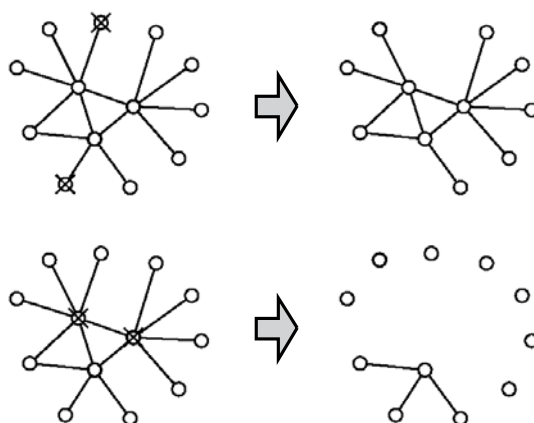


Рисунок 13. а) случайное удаление узлов не разрушает структуру сети; в) целенаправленное удаление узлов с большим числом связей приводит к распаду структуры сети [25].

С проблемой устойчивости сети при случайных повреждениях (перколяционной проблемой) тесно связана задача исследования распространения инфекции: как распространение вирусов в сети WWW, мобильных телефонов или электронной почты, так и распространение вирусов биологической природы в социальных сетях [26]. Низкая величина скорости распространения заболевания соответствует высокой доле удаленных узлов или связей гигантской связанной компоненты сети в случайно поврежденной сети. Отсутствие эпидемического порога означает невозможность удалить гигантскую связанную компоненту случайным удалением узлов или связей в бесконечных сетях. Если сеть конечна, то гигантская связанная компонента может быть удалена случайным удалением достаточно большой, но конечной доли узлов, и, следовательно, эпидемический

порог существует. Вспомним, однако, что, как правило, реальные сети малы. Лучший метод иммунизации (вакцинации), то есть деинтеграции сети – это метод, связанный с удалением минимального числа связей (или узлов).

Синхронизация в сетях

Синхронизацией называется подстройка ритмов автоколебательных систем за счет слабого взаимодействия между ними. В простейшем случае две автоколебательные системы с изначально различными частотами и независимыми фазами, будучи слабо связанными, подстраивают свои ритмы и начинают осциллировать на одной частоте. При этом возникает определенное устойчивое соотношение между фазами этих двух осцилляторов [12,27].

Важно подчеркнуть, что выравнивание частот выполняется в некотором диапазоне изначальной расстройки по частоте. Синхронизации называется взаимной, когда два или несколько осцилляторов в равной степени воздействуют друг на друга и взаимно подстраивают свои ритмы.

Другой важный вид синхронизации – это синхронизация внешней силой. Примером является подстройка ритма «бодрствование – сон» к внешнему ритму освещенности, связанному с вращением Земли. В этом случае воздействие одностороннее – ни человек, ни животное не влияют на вращение Земли.

Явление синхронизации было открыто в 1665 году великим голландским физиком Христианом Гюйгенсом. Он обнаружил, что маятники двух часов, спустя некоторое время, после того как их повесят рядом на одну стену, начинают качаться полностью синхронно. Когда эти часы поместят на противоположные стены комнаты, явления синхронизации не наблюдается. Очевидно, что синхронизацию колебаний маятников этих часов можно объяснить их влиянием друг на друга через невидимую на глаз вибрацию стены, на которой они висят.

Синхронизация представляет собой частный случай эффекта, называемого “захвата фазы” (phase locking.). Когда два одинаковых осциллятора связаны друг с другом, есть две возможности их совместного движения: когда разность фаз их колебаний равна нулю (синхронизация) и когда разность фаз равна 180 градусам (антисинхронизация). Если сеть связанных осцилляторов содержит больше двух осцилляторов, то число возможностей увеличивается. В живой природе, в технике и в искусстве чаще всего мы имеем дело с большим числом связанных осцилляторов и здесь обычно реализуется именно синхронный тип поведения.

Синхронизация играет важнейшую роль в пространственно-временной организации одно-и многоклеточных организмов. Синхронно делятся клетки на ранних стадиях эмбрионального развития. Волокна сердечной мышцы также сокращаются синхронно. Синхронизация наблюдается в полете стай птиц и движении косяков рыб: взмахи крыльев и плавников происходят синхронно. Впечатляющим примером явления синхронизации в живой природе может служить согласованно вспыхивающее свечение многих сотен тысяч светлячков, которые обычно собираются в огромных количествах на берегах рек в Южной Азии.

В больших техногенных системах примером спонтанной синхронизации может служить работа генераторов сети электростанций. Все электростанции, независимо от вида

потребляемой ими энергии (уголь, газ, мазут, атомная или гравитационная энергия) производят переменный электрический ток строго определенной частоты (в большинстве стран, в том числе и в России 50 герц) [12]. При этом все генераторы, производящие этот ток, синхронизируют скорость и фазу вращения подобно, тому как синхронизируются вспышки у светлячков в описанном выше примере.

Математический анализ поведения сети большого числа связанных осцилляторов показывает, что легче всего режим синхронизации наступает в том случае, когда на каждый отдельный осциллятор влияет уже сформировавшийся ритм окружающих его осцилляторов. В случае светлячков это условие видимо удовлетворяется и каждый светлячок подстраивается под уже сформировавшийся ритм своих соседей. Очевидно, эти условия выполняются во многих случаях синхронного поведения и в социальной системе: идущем в ногу строе солдат, хоровом пении, танцах, овациях и скандировании в концертном зале и т.д.

Когда имеется небольшой разброс частот в сети связанных осцилляторов, процесс их взаимной синхронизации очень напоминает фазовый переход, в котором роль температуры играет ширина полосы частот осцилляторов в сети. В предложенной Курамото (Kuramoto) модели коллективной синхронизации каждый i осциллятор описывается фазой θ_i , а сам процесс синхронизации описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

Параметр K/N определяет силу связи между осцилляторами. Собственные частоты ω_i осцилляторов подчиняется распределению Лоренца

$$g(\omega) = \frac{\gamma}{\pi[\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2]}$$

ширина которого равна γ , а среднее значение частоты равно ω_0 .

В качестве параметра порядка $r(t)$ водится мера синхронизации системы

$$r(t) = \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)} \right|$$

Если все частоты различны, то в каждый момент времени все фазы равномерно распределены на интервале $[0, 2\pi]$ и параметр порядка равен нулю. Если же несколько осцилляторов в ансамбле синхронизируются на некоторой частоте, то их фазы складываются и возникает ненулевой параметр порядка.

В пределе $N \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow \infty$ для параметра порядка получаются следующие значения

$r = 0$, если $K < K_c$ (полная десинхронизация)

$r = \sqrt{1 - (K_c / K)}$, если $K > K_c$

$K_c = 2\gamma$.

То есть критический индекс для параметра порядка равен $1/2$.

Таким образом, система связанных осцилляторов десинхронизирована, пока сила связи между осцилляторами не превышает критического значения, пропорционального удвоенной ширине разброса частот. После этого в системе связанных осцилляторов появляется «островок синхронизации», размер которого растет по мере роста силы связи

между осцилляторами. В предельном случае бесконечно большой силы связи все осцилляторы будут колебаться синхронно.

Д.Воттс (Duncan Watts) первым исследовал свойства синхронных состояний в сетях обладающих свойством «тесного мира». В дальнейшем было изучено возникновение синхронизации в модели Курамото, когда осцилляторы помещены в узлы безмасштабной сети. Численное моделирование показывает, что критическое значение силы связи между осцилляторами, при которых наступает синхронизация, в сетях с безмасштабной структурой заметно меньше, чем в сетях с регулярной или хаотической структурой.

Исследования также показали, что синхронизация в безмасштабных сетях не разрушается, если случайным образом удалить 5% узлов. Если же удалить 1% узлов с наибольшим числом связей, синхронизация в такой сети исчезает. Кроме того, на синхронное поведение в сетевых структурах сильно влияет весовое распределение связей между узлами.

Гомез-Гарденес с сотрудниками (Gomez-Gardenes *at al.*) исследовали особенности процессов эволюции синхронизации и возникновения паттернов синхронизации в случайной сети типа Эрдеша-Реньи и безмасштабных сетевых структурах [28]. Они численно проинтегрировали уравнение Курамото для сетевых структур:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + J \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i),$$

где a_{ij} - коэффициенты матрицы смежности для соответствующей сети, J - сила связи между осцилляторами, $N=1000$. Расчеты показали, что синхронизация в безмасштабных сетях происходит при более низких значениях J_c , чем в случайных сетях Эрдеша-Реньи, а сам фазовый переход в случайных сетях более резкий, чем в безмасштабных сетях.

Исследовались также процессы формирования областей синхронизации соседних осцилляторов для нескольких значений J в обоих типах сетей (Рисунок 14)

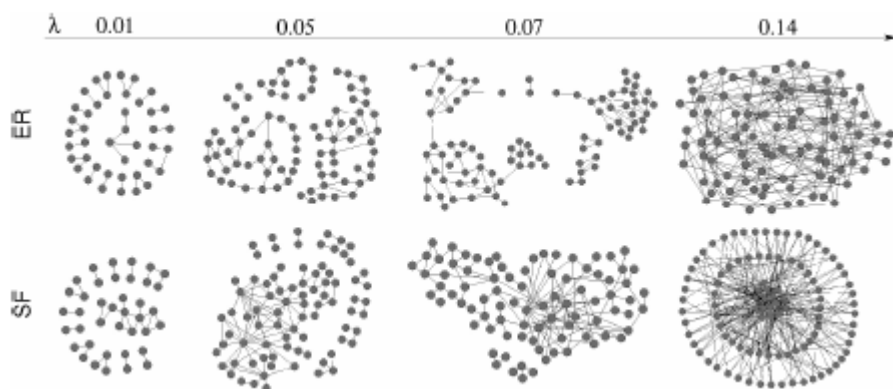


Рисунок 14. Паттерны синхронизации в сети Эрдеша-Реньи (ER) и в безмасштабной сети (SF) для нескольких значений силы связи между осцилляторами λ (в наших обозначениях – параметра J).

и было обнаружено качественное различие у этих двух типов сетевых структур.

В безмасштабных сетях основные ядра синхронизации формируются хабами, которые поглощают соседние малые кластеры. В сетях Эрдеша-Реньи многочисленные маленькие кластеры синхронизации до возникновения фазового перехода распределены довольно однородно по всему графу.

Есть данные, что некоторые расстройства психической деятельности являются следствием аномальной и иногда внезапной синхронизации большого числа популяций нейронов. Поэтому исследования влияния свойств сетевых структур на генерацию, поддержание и распространение режима синхронизации очень важны для современной науки о мозге.

Самоорганизованная критичность

При фазовых переходах критическое состояние системы достигается за счет определенной настройки управляющих параметров. Существует, однако, класс сложных систем с большим числом степеней свободы, которые выходят на критический режим по самой своей природе, в результате присущих этим системам внутренних тенденций эволюции параметров – например, при определенных соотношениях между температурой и давлением. Критические состояния таких систем не требуют точной настройки внешних управляющих параметров и по сути дела обладают свойством самоподдержки [29].

Физической моделью явления самоорганизованной критичности является куча песка. Если сверху на ровную горизонтальную поверхность тонкой струйкой будут сыпаться песчинки, то на горизонтальной поверхности постепенно будет расти песчаный холм. Песчинки, падающие сверху на склон холма, будут оставаться в том месте, куда они упали до определенного критического значения крутизны холма. Выше некоторого порогового (критического) значения угла склона холма песчинки будут скатываться вниз, увлекая за собой другие песчинки на своем пути и образуя сход песчаный лавин различных размеров.

Такой сценарий достижения критического состояния получил название самоорганизованной критичности. Как показывают исследования, такие системы имеют стандартный спектр флуктуаций. Например, размеры лавин в модели «куча песка» распределены по закону:

$$p(s) \propto s^{-\tau}$$

где $p(s)$ – вероятность формирования лавины размер которой s , а τ – критический индекс. Такие процессы самоорганизованной критичности могут генерировать сетевые структуры сложной архитектуры [29,30].

К.Нагель и М.Пажуцки (Nagel, K. and Paczuski, M) использовали модель самоорганизованной критичности при изучении функции распределения времени для автомобильных «пробок» на автодорогах и обнаружили, что это распределение, как и распределение лавин по продолжительности, хорошо описывается степенным законом с показателем равным $3/2$ [31].

Каскадные повреждения и распространение инфекций

В сложных природных и техногенных системах, а также в самом обществе могут возникать катастрофические нарастающие явления, инициируемые небольшой долей составляющих эти сложные системы элементов. Примерами таких лавинообразных процессов могут

служить неожиданные эпидемии заболеваний или каскадное отключение электричества, как это имело место, например, на западе США и Канады 14 августа 2003 года при повреждении на одной из электростанций в Огайо, когда миллионы людей около 15 часов оставались без света.

Из рисунка 15 видно, что вероятность возникновения таких отключений в зависимости от их размеров имеет приблизительно степенной закон, то есть каскадные процессы относятся к феноменологии критических явлений [32]. Аналогичные закономерности были получены при анализе статистических данных каскадных отключений в Швеции, Норвегии, Китае и Южной Зеландии.

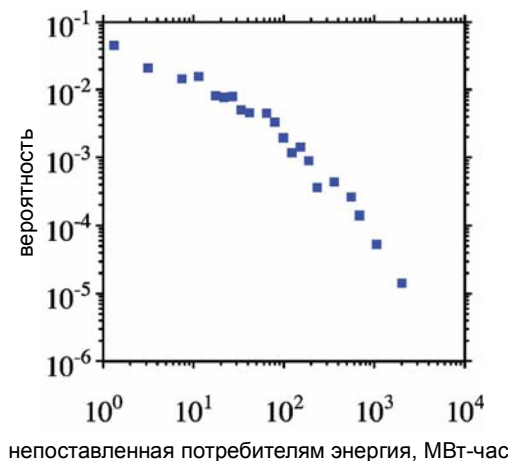


Рисунок 15. Функция распределения вероятности отключения электроэнергии при каскадном повреждении с сети электростанций северной части США за период с 1984 по 1998 года в зависимости от размера повреждений (энергии, непоставляемой потребителям). Обе координаты даны в логарифмическом масштабе [32].

Возникновение каскадных процессов не всегда имеет негативный смысл. Примерами могут служить информационные каскады, делающие в течение короткого промежутка времени популярными (хитами) книги, кинокартины, песни, актеров, певцов и их альбомы. Таким образом, понимание и предсказание распространение таких каскадных лавинных процессов в сложных системах представляет несомненный интерес.

Каскадные отключения в сети электростанций есть результат лавинообразного распространения перегрузки, возникшей в одном из узлов этой сети. Моттер и Лэй (Motter and Lai) предложили простую модель этого процесса [33]. Нагрузка узла сети в этой модели – это та нагрузка узла (betweenness centrality), определение которой было дано выше, (то есть число кратчайший путей между другими узлами, проходящих через данный узел). Для каждого узла i этой сети вводится предельная нагрузка – емкость узла:

$$c_i = (1 + \alpha)b_{oi}.$$

Где b_{oi} - нагрузка (betweenness centrality) этого узла в неповрежденной сети, а константа $\alpha \geq 0$ есть «параметр устойчивости», показывающий насколько первоначальная нагрузка может быть превышена. Каскадное отключение в этой модели выглядит следующим образом:

1. Удаляем узел. Это приводит к перераспределению нагрузок у других узлах: $b_{oi} \rightarrow b'_{oi}$.

2. удалить все перегруженные узлы, то есть узлы, для которых $b_{oi} > c_i$
3. повторить эту процедуру до тех пор, пока остаются перегруженные узлы.

При моделировании этого процесса в различных сетях Моттер и Лей вычисляли отношение $G = N_{after} / N$, где N и N_{after} - соответственно начальное число узлов и размер наибольшей связанной компоненты после каскадного отключения (имея в виду что начальное число узлов совпадает с гигантской связанной компонентой первоначальной сети). Результирующее значение $G(\alpha)$ зависит от архитектуры сети, параметра α и характеристик первого отключенного узла, в первую очередь от его степени, то есть числа связей. В случайном графе для любого значения $\alpha > 0$ $G=1$ и только если $\alpha=0$, сеть полностью выведена из строя, $G=0$.

С другой стороны, в сетях со степенным законом распределения узлов по числу связей величина G строго зависит от степени, а также от нагрузки первого удаленного узла. Моттер и Лэй исследовали свойства безмасштабной сети с $\lambda=3$. Значение $\alpha=0$ дает $G=0$ при любом начальном узле для любой сети, в то время как $\alpha \rightarrow \infty$ дает $G=1$. Вопрос заключается в том, как выглядит зависимость $G(\alpha)$ при промежуточных значениях α . Когда первый удаляемый узел выбирается случайно, каскад будет большим (G сильно отличается от единицы) только при малых значениях α , а $G(\alpha)$ быстро растет при изменении α от 0 до 1. Если же начальный узел выбран среди хабов, то G растет медленно с ростом α , а каскады могут быть очень большими даже при относительно больших значениях α .

Ли с сотрудниками (Lee *at al.*) численно исследовали статистику каскадов этой модели на безмасштабных сетях с $2 < \lambda \leq 3$ и обнаружили, что в этом случае имеется критическая точка $\alpha_c \approx 0.15$ [34]. При $\alpha < \alpha_c$ развиваются гигантские лавины, а при $\alpha > \alpha_c$ размеры лавин существенно меньше. В самой критической точке распределение лавин по размерам подчиняется степенному закону $P(s) \propto s^{-\tau}$, где $\tau \approx 2.1$ во всем диапазоне $2 < \lambda \leq 3$.

С. Булдырев с коллегами (S. Buldyrev *at al.*) исследовали поведение сложной системы состоящей из двух сетей А и В, причем определенная доля узлов сети А связана с узлами сети В, а некоторая доля узлов сети В связана с узлами сети А. [35]. Если узлы в одной из этих сетей выходят из строя, это может вызвать выход из строя узлов в другой сети, а это повлечет за собой итерационное каскадное повреждение узлов в обеих сетях. Достигнув определенного критического значения отношения вышедших из строя узлов к общему числу узлов, происходит перколяционный фазовый переход первого рода, когда возникает скачкообразный полный распад и выход из строя обеих сетей А и В, а, значит, и всей системы в целом. Численные и аналитические исследования показывают, что при уменьшении силы связи между узлами А и В, происходит переход от перколяционного фазового перехода первого рода к переходу второго рода.

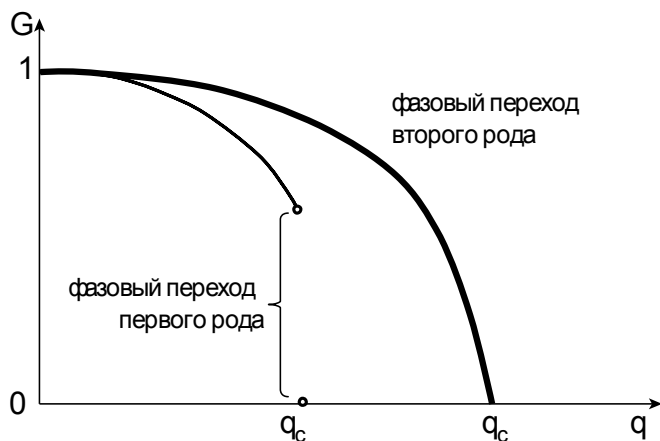


Рисунок 16. Перколяционные фазовые переходы первого и второго рода в каскадных процессах в сложных сетях. Величина G есть доля от общего числа соединенных узлов в сложной сети состоящей из двух сетей, часть узлов которых связаны между собой, q есть доля узлов удаленных из сети, а q_c есть критическое значение этой доли, при котором происходит распад всей сложной сети на фрагменты ($G=0$). При слабых связях между двумя сетями полная фрагментация происходит непрерывно (синяя кривая), а при сильных связях такой переход происходит скачком, аналогично тому, как происходит фазовый переход первого рода [33].

Как говорилось выше, безмасштабные сети очень устойчивы к случайным повреждениям. Однако, если сложная сеть состоит из двух и более тесно связанных между собой безмасштабных сетей, то в такой системе полная фрагментация наступает выше некоторой достаточно малой доли удаленных (отключенных) узлов и такой переход также происходит скачком, как в переходах первого рода.

В реальных сетях такого рода каскадные отключения произошли в Италии 28 сентября 2003 года, когда повреждения на электростанциях вызвало отключения некоторых узлов сети Интернет, что в свою очередь вызвало дальнейшие отключения электростанций [36]. В живых системах также возможны такого рода сценарии, поскольку любой организм представляет собой иерархию взаимодействующих между собой генетических, гормональных, нейронных сетевых структур [37].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В современной теории сложных сетей сформировалось несколько важных фундаментальных и прикладных направлений исследований. Ситуацию, сложившуюся в фундаментальных направлениях теории сложных сетей некоторые исследователи сравнивают с ситуацией в квантовой механике перед открытием уравнения Шредингера [25]. Ожидается, что в ближайшем будущем может быть преодолен разрыв между обнаруженными здесь универсальными эмпирическими закономерностями в сетевых структурах реальных объектов и пониманием самой природы сложных систем, способностью прогнозировать их поведение.

В прикладных исследованиях также можно ожидать прорыва в ряде направлений, например, в исследованиях по безопасности сложных технических объектов, в изучении

различных функциональных состояний мозга, а также существенного прогресса в тех гуманитарных науках (например, в изучении искусства и культуры), где до последнего времени отсутствовали адекватные количественные методы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Albert, R. and Barabasi, A.-L., 2002, Statistical mechanics of complex networks, *Rev. Mod. Phys.* 74, 47; cond-mat/0106096.
2. Dorogovtsev, S.N. and Mendes, J.F.F., 2003, *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW*, Oxford University Press, Oxford
3. Newman, M.E.J., 2003, The structure and function of complex networks, *SIAM Review* 45, 167; cond-mat/0303516
4. S.Boccatti, V.Latora, Y.Moreno, M.Chavez, D.-U.Hwang. Complex Networks: Structure and Dynamics. *Physics Reports*, 424(2006), 175-308
5. Dorogovtsev S. N. Lectures on Complex Networks, Oxford University Press, Oxford, 2010
6. Bollobas, B. and Riordan, O.M., 2002, Mathematical results on scale free random graphs, in *Handbook of Graphs and Networks: From the Genome to the Internet* (S. Bornholdt and H.G. Schuster, eds.), Wiley-VCH, Berlin,
7. Krzywicki, A., 2003, On the geometry of random networks, *Acta Phys. Polon. B* 34, 4965; cond-mat/0306482.
8. Milgram S. The small world problem // *Psychology Today*. 1967. № 2. P. 60–67.
9. Guare John. Six Degrees of Separation. Vintage Books, New York, 1990.
10. Kleinberg J.M. Navigation in a small world. *Nature*, 406, 845, (2000).
11. Duncan Watts. Six degrees. W. W. Norton & Company, New York, 2004.
12. Strogatz S. Sync. Hyperion books, New York, 2003.
13. Barabasi A-L. LINKED: the new science of networks. Perseus, Cambridge, MA, 2002
14. Chialvo, D. Emergent complexity: what uphill analysis or downhill invention cannot do; *New Ideas in Psychology* (2007), doi:[10.1016/j.newideapsych.2007.07.013](https://doi.org/10.1016/j.newideapsych.2007.07.013)
15. Sole R., Corominas-Murtra B., Valverde S., and Steels L. Language Networks: Their Structure, Function, and Evolution. *Complexity*, 2010, DOI [10.1002/cplx](https://doi.org/10.1002/cplx)

16. Yeon-Mu Choi, Hyun-Joo Kim. A directed network of Greek and Roman mythology. *Physica A* 382 (2007) 665–671
17. Xiao Fan Liu, Chi K. Tse, Michael Small. Complex network structure of musical compositions: Algorithmic generation of appealing music. *Physica A* 389 (2010) 126-132
18. Farkas, I., Derenyi, I., Palla, G., and Vicsek, T., 2004, Equilibrium statistical mechanics of network structures, in *Networks: structure, dynamics, and function* (E. Ben-Naim, H. Frauenfelder, and Z. Toroczkai, eds.), Springer, Berlin; cond-mat/0401640.
19. Newman, M.E.J. and Girvan, M. 2004, Finding and evaluating community structure in networks, *Phys. Rev. E* 69, 026113; cond-mat/0308217.
20. Fortunato S. Community detection in graphs. *Physical Reports*. V.486, issues 3-5, February 2010, pp. 75-174. arXiv:0906.0612v2
21. Newman, M.E.J. Mixing patterns in networks; cond-mat/0209450
22. Gore, J., Youk H. and Oudenaarden A. Snowdrift game dynamics and facultative cheating in yeast. *NATURE*, V. 459, 2009, pp.253-256
23. Pacheco J., Pinheiro F., F. Santos F. Population Structure Induces a Symmetry Breaking Favoring the Emergence of Cooperation. *PLoS Computational Biology*. 2009, V. 5, Issue 12, e1000596
24. Dorogovtsev, S. N. Goltsev, A. V. and Mendes, J. F. F.. Critical phenomena in complex networks. *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1275 (2008). arXiv: 0705.001 v.6 [cond-mat. stat-mech] 16 Nov. 2007
25. Neuman M.E.J. The Physics of Networks. *Physical Today* (2008), November,
26. Wang,P., Gonzalez,M.C. Hidalgo, C.A. , and Barabasi, A.-L. Understanding the spreading patterns of mobile phone viruses, *Science*, 324, 1071-1076 (2009).
27. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. Москва, Техносфера, 2003
28. Gomez-Gardennes, J., Y. Moreno, and A. Arenas, 2007, Synchronizability determined by coupling strengths and topology on complex networks. *Phys. Rev. E*, **75**, 066106.
29. Bak Per. How Nature Works. Copernicus,New York 1996.
30. Lee, D.-S., Goh, K.-I., Kahng, B., and Kim, D., 2004, Sandpile avalanche dynamics on scale-free networks, cond-mat/0401531
31. Nagel, K. and Paczuski, M. Emergent Traffic Jams. *Physical Review E*. 51 (1995) 2909-2918.

32. Dobson, I. Carreras, B. Newman, D. Complex systems analysis of series of blackouts: Cascading failure, critical points, and self-organization. *Chaos*, 17, 026103, (2007)
33. Motter, A. E. and Y.-C. Lai, 2002. Cascade-based attacks on complex networks. *Phys. Rev. E*, **66**, 065102
34. Lee, E. J., K.-I. Goh, B. Kahng, and D. Kim, 2005, Robustness of the avalanche dynamics in data packet transport on scale-free networks. *Phys. Rev. E* **71**, 056108
35. Buldyrev, S. R. Parshani, G. Paul, H. Stanley, and Sh. Havlin. Catastrophic cascade of failures in interdependent networks. *Nature*, Vol. 464|15 April 2010, pp.1025-1028
36. Vespignani, A. The fragility of interdependency. *Nature*, Vol 464|15 April 2010, pp.984-985
37. А. Т. Терехин, Е. В. Будилова, М. П. Карпенко, Л. М. Качалова,, Е. В. Чмыхова. Функция Ляпунова как инструмент исследования когнитивных и регуляторных процессов организма. КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ **2009** Т. **1** № **4** С. **449–456**