

Тепловые структуры в среде с нелинейной теплопроводностью

С.П. Курдюмов, Е.С. Куркина

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в науке наблюдается большой интерес к сверхбыстрым процессам, протекающим в режимах с обострением, в которых исследуемая функция обращается в бесконечность за конечное время $t = t_f$ в отдельных точках или в целой области пространства [20] (см. рис. А). Момент обращения в бесконечность называется *моментом обострения*. Термоядерное горение плазмы [5], динамика свертывания крови [9], быстрое увеличение потребления земных ресурсов и т.д. [8, 18] хорошо ложатся на кривую, описываемую режимом с обострением. Одним из наиболее важных и интересных их приложений является социология [1, 6, 7]. Изучение закона роста народонаселения также показывает, что численность населения земного шара более 100 тыс. лет увеличивалась в режиме с обострением [6].

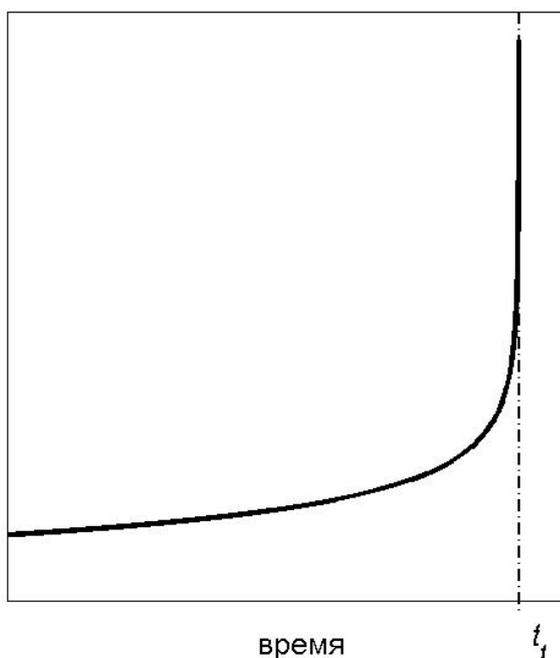


Рис. А Режим с обострением.

Понятно, что режимы с обострением являются идеализацией реальных процессов, и не учитывают факторы, которые ограничивают рост исследуемой функции вблизи момента обострения. Однако, модели, в которых решения могут расти в режиме с обострением, позволяют понять и изучить существенные, наиболее значимые черты исследуемой системы, которые проявляются длительное время, вплоть до момента обострения. Замечательной особенностью теории режимов с обострением является наличие парадоксальных свойств в простейших "классических уравнениях" математической физики. Одному из таких свойств и посвящена настоящая лекция.

Оглядываясь на тридцать с лишним лет назад, можно сказать, что развитие теории режимов с обострением связано с двумя проблемами. С момента основания Института в центре внимания исследователей были задачи физики плазмы. Их анализ средствами вычислительного эксперимента позволил в 70-х годах обнаружить различные неустойчивости в плазме, структуры разных типов. К таким структурам относятся и так называемые Т-слои, обнаруженные коллективом исследователей под руководством академиков А.Н. Тихонова и А.А. Самарского при исследовании уравнений магнитной гидродинамики. Открытие этого явления в вычислительном эксперименте было внесено в Государственный реестр открытий СССР. Только через несколько лет они были обнаружены физиками-экспериментаторами. Естественно возник вопрос, каковы же те простейшие нелинейные среды, в которых возможны устойчивые, самоподдерживающиеся нестационарные структуры.

Вторая проблема связана с идеей Гайзенберга, с классом нелинейных уравнений, допускающих конечный спектр различных локализованных решений. По мнению одного из создателей квантовой механики, именно на этом пути можно было найти решение задачи о спектре масс элементарных частиц – одной из фундаментальных и пока нерешенных проблем современной физики.

Сегодня теория режимов с обострением представляет собой обширную область, в которой выполнены тысячи работ, в которой есть выдающиеся достижения. Работы в этой области активно ведутся в России, Великобритании, Испании, США, Японии. Появился ряд интересных приложений.

Тем не менее, из этой огромной области мы решили рассказать только об одной задаче. В ней ответ на вопрос о спектре одной простейшей нелинейной среды, на вопрос, заданный более 25 лет назад, ответ удалось получить совсем недавно.

Рассмотрим процесс горения в среде с нелинейной теплопроводностью и объемным источником тепла, инициированный начальным возмущением температуры в некоторой области пространства. Исследования показали, что при определенных условиях, несмотря на наличие теплопроводности, область горения не увеличивается – в среде формируется *локализованная нестационарная диссипативная структура*, растущая в режиме с обострением (см. рис. Б). Размер области локализации (или как говорят, *фундаментальная длина*) определяется только параметрами среды и не зависит от начальных условий. От начальных условий зависит время обострения, которое определяется максимумом распределения температуры; чем выше максимум, тем меньше время жизни структуры.

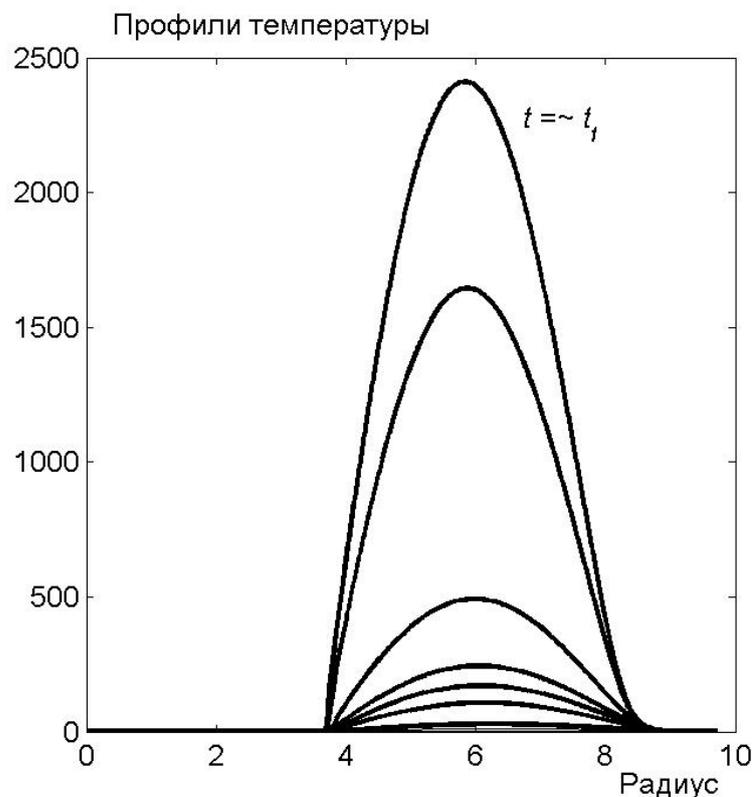


Рис. Б Локализованная диссипативная структура, развивающаяся в режиме с обострением.

С помощью вычислительных экспериментов было установлено, что горение на развитой стадии, вблизи момента обострения, всегда происходит в виде простой структуры с одним максимумом, или в виде нескольких независимых простых структур, имеющих свои моменты обострения, даже если в качестве начальных данных был взят произвольный профиль температуры, обладающий многими максимумами [4,

15, 21, 22] (см. рис. В). Простая структура обладает так называемой *структурной устойчивостью* и описывается автомодельной решением задачи рассматриваемого уравнения. Исследование *автомодельной задачи* (задачи, определяющей автомодельное решение) дало неожиданный результат. Выяснилось, что кроме простой структуры она имеет конечный спектр *собственных функций* (СФ), отвечающих одному моменту обострения и представляющих собой сложные распределения температуры с разным количеством максимумов [4]. При использовании их в качестве начальных данных (так называемое *резонансное возбуждение*), они долго сохраняют свою форму, следуя автомодельному закону, и только перед самым моментом обострения "разваливаются", вырождаясь в простые структуры. Таким образом, СФ обладают *метастабильной устойчивостью* в отличие от произвольных распределений температуры.

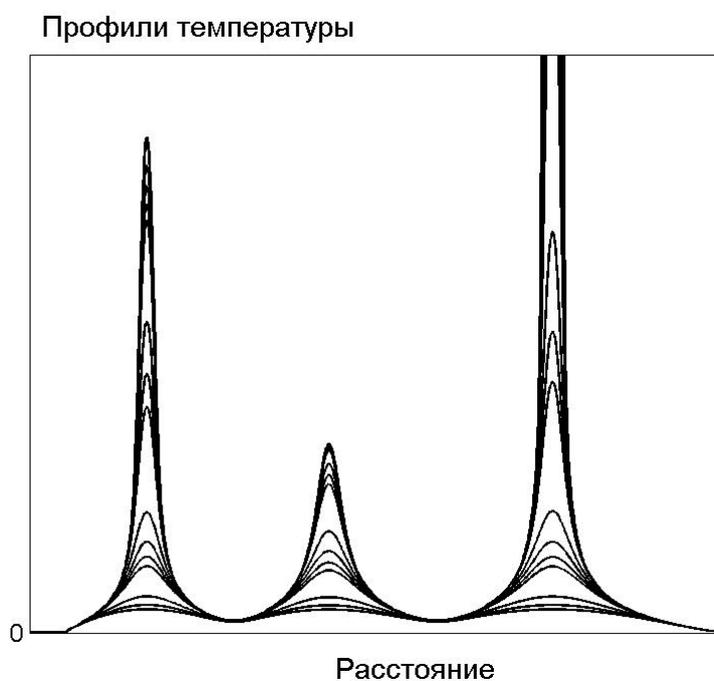


Рис. В Распадение сложной структуры на три независимые простые структуры.

Сначала была подробно исследована одномерная задача [4, 21], затем был изучен спектр цилиндрически-симметричных и сферически-симметричных СФ в среде с постоянной и распределенной плотностью [3, 11, 14, 17]. Недавние исследования, опирающиеся на методы продолжения по параметру и бифуркационный анализ, поставили наконец точку в определении числа радиально-симметричных СФ в зависимости от значения параметров [11, 17].

В этих работах было найдено еще одно структурно-устойчивое автомодельное решение – СФ с областью локализации в виде цилиндрического или сферического слоя, внутри которого температура равна нулю [3, 11, 17]. В работах [12, 13, 19] были впервые построены и исследованы двумерные автомодельные решения, описывающие горение среды в виде сложной структуры со многими максимумами, имеющие необычную форму области локализации (например в виде звезды). Недавно было установлено существование трехмерных тепловых структур, имеющих форму локализации в виде гантели, и др. [16]. Построены двумерные и трехмерные структуры, представляющие собой многосвязные области горения, то есть содержащие внутри себя области с нулевой температурой [16]. Все построенные многомерные СФ обладают определенной симметрией в расположении максимумов. Для описания архитектуры многомерной СФ указывают на порядок ее симметрии, количество слоев, в которых располагаются максимумы, и количество максимумов в каждом слое. В настоящее время вопрос о числе многомерных СФ и разбиении их на классы по архитектуре остается открытым.

Сложная собственная функция представляет собой объединение простых структур с разными максимумами. Существование такого связного состояния, демонстрирующего длительное согласованное горение особенно важно в приложениях к социологии и к проблемам коэволюции сложных систем [10, 25]. Оно показывает, к примеру, что государства, находящиеся на разных ступенях развития, в принципе могут согласованно развиваться, без угнетения более сильными соседями (здесь имеющими больший максимум, и, соответственно, меньший момент обострения). Другое важное приложение рассматриваемой задачи видится в ее связи с уравнением Шредингера. Показано, что в линейном приближении автомодельное уравнение сводится к уравнению Шредингера для стационарных состояний (в частности для атома водорода), а СФ играют роль функций распределения плотности вероятности. Квантовые свойства заложены в самой природе нелинейной диссипативной среды, что позволяет *непосредственно* описывать такие квантовые системы, как гармонический осциллятор или атом водорода, в отличие от теоретико-вероятностного подхода в квантовой механике.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается процесс горения в среде с объемным источником тепла и коэффициентом теплопроводности, зависящими от температуры по степенному закону. Распределение температуры $T(\mathbf{r}, t)$ в пространстве удовлетворяет уравнению:

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = \operatorname{div}(\chi_0 T^\sigma \operatorname{grad} T) + q_0 \rho T^\beta, \quad t > 0, \quad (1)$$

где $E = c_v T$, а $c_v, \chi_0, q_0 > 0$, $\sigma > 0$, $\beta > 1$ – заданные параметры. Плотность среды ρ распределена в пространстве по закону: $\rho = Ar^{-k}$, $r > 0$, $0 \leq k < 2$. Без ограничения общности константы $\chi = \chi_0 / Ac_v$, $q = q_0 / c_v$ положим равными единице.

Горение инициируется заданием некоторого начального распределения температуры $T(\mathbf{r}, 0) = T_0(\mathbf{r}) \leq M < \infty$.

Задача состоит в том, чтобы найти все типы тепловых структур, которые могут возникать в заданной нелинейной среде. С этой целью исследуются автомодельные решения уравнения (1) вида:

$$T(r, \theta, \varphi, t) = g(t) \Theta(\xi, \theta, \varphi), \quad \xi = \frac{r}{\psi(t)}, \quad \xi \geq 0 \quad (2)$$

$$g(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^m, \quad \psi(t) = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n, \quad m = -\frac{1}{\beta - 1}, \quad n = \frac{\beta - \sigma - 1}{(\beta - 1)(2 - k)}. \quad (3)$$

где $\tau > 0$ – произвольный параметр, имеющий смысл времени обострения; ξ – автомодельная переменная, а функция $\Theta(\xi, \theta, \varphi)$ – ограничена и удовлетворяет уравнению:

$$\frac{1}{\xi^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\xi^\nu \Theta^\sigma \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2 (\sigma + 1)} \Delta_{\theta, \varphi} (\Theta^{\sigma+1}) = -\frac{m}{\tau} \xi^{-k} \Theta + \frac{n}{\tau} \xi^{1-k} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - \xi^{-k} \Theta^\beta, \quad (4)$$

при $\nu = 2$, $\Delta_{\theta, \varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$; при $\nu = 1$, $\Delta_{\theta, \varphi} = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$,

и обычному условию на фронте – равенству нулю потока тепла и температуры. Если фронт находится на бесконечности, то граничные условия имеют вид:

$$\Theta^\sigma \operatorname{grad} \Theta \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0, \quad \Theta \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0.$$

Зависимости (3) и автомодельное уравнение (4) получаются при подстановке обобщенного разделения переменных (2) в уравнение (1). Краевая задача для уравнения (4) является задачей на собственные значения τ и собственные функции СФ $\Theta(\xi, \theta, \varphi, \tau)$. Из анализа формул (2), (3) следует, что СФ, отвечающие разным собственным значениям связаны преобразованием подобия. Это свойство позволяет зафиксировать произвольное значение $\tau > 0$ и найти соответствующий ему спектр СФ.

Изучение многомерных СФ автомодельной задачи начнем с исследования радиально-симметричных, являющихся частными решениями автомодельной задачи.

2. СПЕКТР РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

2.1. Три типа автомодельных решений

Считая что решение автомодельной задачи существует, и, анализируя его поведение у фронта, а также интегрируя уравнение (4) с учетом граничных условий, находим локально необходимые и глобально необходимые условия существования автомодельных решений [4, 11]. Из этого анализа следует, что может существовать три типа автомодельных режимов с обострением: HS, S и LS, что подтверждено многочисленными расчетами.

При $\beta < \sigma + 1$ реализуется **HS-режим**. Исследования показали, что автомодельная задача в этом случае имеет единственную собственную функцию, монотонно убывающую на отрезке $[0, \xi_f]$ с максимумом в центре симметрии. Автомодельное решение представляет собой тепловую волну, амплитуда и область локализации которой увеличиваются в режиме с обострением.

При $\beta = \sigma + 1$ имеет место **S-режим**. Автомодельное решение представляет собой нестационарную диссипативную структуру, локализованную на фундаментальной длине L_T . Внутри области локализации температура растет в режиме с обострением, а вне ее остается равной нулю. В одномерном случае ($\nu = 0$) при постоянной плотности в работе [3] было получено аналитическое решение автомодельной задачи:

$$T(r,t) = T_0 g(t) \Theta_s(r), \quad \Theta_s(r) = \left[\Theta_0 \cos^2 \left(\frac{\pi \cdot r}{L_T} \right) \right]^{\frac{1}{\sigma}}, \quad 0 \leq r \leq 0.5 \cdot L_T, \quad (5)$$

$$\Theta_0 = \frac{2(\sigma+1)}{(\sigma+2)}, \quad L_T = \frac{2\pi}{\sigma} \sqrt{\frac{\chi}{q}(\sigma+1)}.$$

Автомодельное уравнение в этом случае является автономным, поэтому решение (5) инвариантно относительно сдвига по оси r . В случае сферической и цилиндрической геометрии и распределенной плотности существует единственная СФ автомодельной задачи $\Theta_{sv}(r)$ с максимумом в начале координат, качественно имеющая такой же вид, как в плоском случае. В [11] получено приближенное решение вида (5) со своей амплитудой Θ_v и фундаментальной длиной L_{Tv} :

$$L_{Tv} = \frac{2\pi}{\sigma} \sqrt{\frac{\chi}{q}(\sigma+1+4\sigma\nu/(\pi^2-4))}, \quad \Theta_v = \left(\frac{2(\sigma+1+4\sigma\nu/(\pi^2-4))}{\sigma+2} \right)^{1/\sigma}. \quad (6)$$

На рис. 1 изображен вид СФ $\Theta_{sv}(r)$ в S -режиме при $\sigma = 2$ в плоской, цилиндрической и сферической геометрии (сплошная линия) и показаны приближенные решения (6) при $\nu = 1, 2$ (штриховая линия).

Автомодельное решение в **LS-режиме** ($\beta > \sigma + 1$) представляет собой нестационарную диссипативную структуру, все точки которой (соответствующие разным значениям ξ) движутся к центру симметрии, полуширина области горения сокращается, и температура при $t = \tau$ обращается в бесконечность только в одной точке – в центре симметрии. Автомодельные решения не имеют конечного фронта и могут существовать на полубесконечном интервале $[0, \infty)$ или $[\xi_f, \infty)$. Нетрудно показать, что существует асимптотическое разложение автомодельного решения при $\xi \rightarrow \infty$, и главный член асимптотики имеет вид:

$$\Theta(\xi) \approx C \xi^{-p}, \quad p = \frac{(2-k)}{\beta - \sigma - 1} > 0. \quad (7)$$

Поэтому при построении таких решений надо требовать не выполнения условий на фронте, а выхода на асимптотику (7) при $\xi \rightarrow \infty$.

Если подставить (7) в выражение для автомодельного решения (3), то получится, что главный член асимптотического разложения температуры не зависит от времени.

Это обстоятельство указывает на локализацию горения: температура увеличивается в режиме с обострением в сокращающейся области вблизи центра симметрии, в то время как вне этой области она стремится к предельному, постоянному по времени распределению температуры.

Хотя автомодельное решение в LS–режиме существует на бесконечном интервале, описываемый им режим, реализуется только в ограниченной области. С помощью теорем сравнения доказана строгая локализация процессов горения и «обрезание бесконечного хвоста» у автомодельного решения [2].

Отметим важный факт, что при:

$$\beta > \sigma + 1 + \frac{k + 2}{k + 1 + \nu}. \quad (8)$$

наряду с LS–режимом с обострением может существовать автомодельное решение, описывающее затухающий режим и существующее в целом при $0 \leq t \leq \infty$ [4] (обычный HS–режим)

2.2. Влияние распределения плотности

В автомодельном уравнении (4) с помощью преобразования (см. [11]):

$$z = (2/2 - k)\xi^{(2-k)/2}, \quad 0 \leq \xi < \infty, \quad 0 \leq z < \infty, \quad (9)$$

можно избавиться от распределенной плотности, тогда в радиально-симметричном случае оно примет вид:

$$\frac{1}{z^\mu} \frac{d}{dz} \left(z^\mu \Theta^\sigma \frac{d\Theta}{dz} \right) = -\frac{m}{\tau} \Theta + \frac{n}{\tau} z \frac{d\Theta}{dz} - \Theta^\beta, \quad (10)$$

где $\mu = 1$ при $\nu = 1$, $\mu = (4 - k)/(2 - k)$ при $\nu = 2$. В цилиндрической геометрии ($\nu = 1$) преобразование (9) не меняет вида уравнения, и решения автомодельной задачи $\Theta(\xi)$ при $k \neq 0$ получаются из решений $\Theta(z)$ при $k = 0$ преобразованием растяжения. В S–режиме ($\beta = \sigma + 1$), зная фундаментальную длину $L_{T_1}^0$ при $k = 0$ (6), находим значение фундаментальной длины $L_{T_1}^k$ при любом показателе плотности k :

$$L_{T_1}^k = 2 \left(0.25(2 - k)L_{T_1}^0 \right)^{2/(k-2)}, \quad k < 2.$$

При $\kappa \rightarrow 2$ фундаментальная длина стремится к нулю (так, при $\kappa = 1.9$, $\sigma = 2$, $L_{T_1}^k \approx 6 \cdot 10^{-17}$), и собственная функция прижимается к оси ординат.

В сферической геометрии увеличение показателя k эквивалентно увеличению размерности пространства μ , и при $\kappa \rightarrow 2$ величина $\mu \rightarrow \infty$. Исследования показали, что в S-режиме амплитуда СФ $\Theta(z)$ и ее фундаментальная длина растут с увеличением μ . Формула (6) дает хорошую оценку области локализации при небольших значениях μ ($\mu = \nu < 20$), и правильно отражает стремление фундаментальной длины L_{T_μ} и амплитуды СФ Θ_μ в бесконечность при $\mu \rightarrow \infty$. Тем не менее сжатие по закону (9) является преобладающим, и в исходной переменной ξ фундаментальная длина $L_{T_2}^k$ стремится к нулю при $\kappa \rightarrow 2$.

2.3. Спектр радиально-симметричных собственных функций в LS-режиме

Первые численные расчеты автомодельной задачи при $\beta > \sigma + 1$ были проведены более двадцати пяти лет назад в одномерном случае и постоянной плотности (см. [21]). Было установлено, что рассматриваемая задача может иметь несколько СФ $\Theta_i(\xi)$, $i=1,2,\dots,N$, в зависимости от значений параметров β и σ . Первая СФ $\Theta_1(\xi)$ имеет максимум в начале координат и монотонно убывает на интервале $(0, \infty)$. Следующие СФ являются немонотонными, с числом локальных экстремумов, равным их номеру.

В области своей немонотонности они совершают колебания около гомотермического (или пространственно-однородного) решения Θ_H уравнения (4): $\Theta_H = const = ((\beta - 1)\tau)^{-1/(\beta-1)}$. Нечетные СФ имеют максимум в начале координат, значение которого больше, чем Θ_H , а четные функции $\Theta_{2j}(\xi)$ имеют минимум при $\xi = 0$, причем $\Theta_{2j}(0) < \Theta_H$. Методами продолжения по параметру СФ и проведения бифуркационного анализа недавно было установлено [12, 13] что собственная функция Θ_j с номером $j = 2,3,4,\dots$ существует в интервале:

$$\sigma + 1 < \beta < \beta_j, \quad \text{где } \beta_j = \frac{j(\sigma + 1) - 1}{j - 1}. \quad (11)$$

Значения $\beta = \sigma + 1$ и $\beta = \beta_j$ являются точками бифуркации, в которых прекращает свое существование СФ Θ_j . Чем больше номер СФ, тем уже интервал по параметру β , в котором она существует. Первая СФ существует при любом значении $\beta > \sigma + 1$. При $\beta > \beta_2 = 2\sigma + 1$ автомодельная задача в LS режиме имеет только одну собственную функцию. Число собственных функций N , которое имеет автомодельная задача при данных β и σ в случае $\nu = 0$, $k = 0$ определяется формулой:

$$N = a - 1, \text{ если } a - \text{целое}; \quad N = [a], \text{ если } a - \text{нецелое, где } a = \frac{\beta - 1}{\beta - \sigma - 1}. \quad (12)$$

Из формулы (12) следует, что при $\beta \rightarrow \sigma + 1$ число СФ стремится к бесконечности.

Спектры СФ в сферически-симметричном и цилиндрически-симметричном случаях и распределенной плотности при многих значениях параметров устроены аналогичным образом, и их число определяется формулой (12). Однако, при β близких к $\sigma + 1$ и (или) при $\nu = 2$ и $k \leq 1$ происходят качественные изменения в спектре: 1) появляются СФ, имеющие нулевую область в центре, то есть существующие на интервале: $[\xi_f, \infty)$; 2) некоторые нечетные СФ, начиная с третьей, выпадают из спектра. Чем ближе β к $\sigma + 1$, или k ближе к 2, тем больше в спектре четных СФ с нулевой областью, и тем больше нечетных СФ отсутствует в спектре. На рис. 2 показаны первые 12 СФ из 40 имеющихся для $\beta = 3.05$, $\sigma = 2$, $k = 0$, $\nu = 1$. Вторая, четвертая и шестая – это СФ, имеющие нулевую область в центре, или структуры «с дыркой»; все остальные СФ обычные. Обратим внимание на третью СФ $\Theta_3(\xi)$. Ее минимум близок к нулю. При чуть меньшем значении β (при $\beta \approx 3.049$) она прекращает свое существование, расщепляясь на первую СФ и вторую СФ с дыркой [13].

2.4. Линейное приближение. Связь со стационарным уравнением

Шредингера для гармонического осциллятора

Обратим внимание на следующую особенность поведения СФ в LS – режиме. Исследования показали, что в области немонотонности автомодельные решения приближенно описываются функцией: $\Theta_j(\xi) \approx \Theta_H(1 + A_j u(\xi))$, где A_j некоторая постоянная (для нечетных СФ она положительная, для четных СФ – отрицательная), а

$u(\xi)$

($u(0) = 1$) – решение линеаризованного около Θ_H уравнения с условием $u'(0) = 0$:

$$\frac{1}{\xi^v} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^v \frac{du}{d\xi} \right) - \frac{\beta - \sigma - 1}{2 - k} \xi^{-k+1} \frac{du}{d\xi} + (\beta - 1) \xi^{-k} u = 0. \quad (13)$$

Каждая СФ описывается решением линейной задачи со своей амплитудой A_i , причем старшая СФ Θ_N в наибольшей области (по сравнению с областями для младших СФ) совпадает с решением линейного уравнения (см. на фиг. 2 штриховую линию). Остальные СФ «передают» только одно, два и т. д. колебаний решения линейного уравнения в соответствии с их номером. Вне области немонотонности СФ быстро уменьшаются, и, начиная с некоторого значения ξ_f (при $\xi > \xi_f(j)$) выходят на асимптотику (7) (тонкая линия на рис. 2).

Функция $u(\xi)$ представляет собой многочлен, имеющий на интервале $(0, \infty)$ $N + 1$ нулей (см. формулу (12)) [3, 4, 11, 14, 17]. При $k = 0$ уравнение (13) с помощью преобразования:

$$u(\xi) = \exp(\lambda \xi^2) U(\xi), \text{ где } \lambda = (\beta - \sigma - 1)/8. \quad (14)$$

приводится к виду уравнения Шредингера для гармонического осциллятора [23]:

$$\frac{1}{\xi^v} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^v \frac{dU}{d\xi} \right) + 2 \left[E - \frac{1}{2} \delta^2 \xi^2 \right] U = 0, \quad \delta = \frac{\beta - \sigma - 1}{4}, \quad E = \delta \left(\frac{1+v}{2} + 2a \right), \quad (15)$$

где коэффициент a (см. формулу (12)) определяет число СФ; параметр δ^2 играет роль "коэффициента упругости", характеризующего потенциальную силу притяжения к центру; величина $1 + v$ составляет размерность пространства.

Если a – целое число и $\mu = 0$ (одномерный случай), то уравнение (15) есть уравнение Шредингера для гармонического осциллятора, находящегося в состоянии с энергией $E_n = \delta(0.5 + n)$, $n = 2a$. В уравнении (15) число E есть константа, определяемая параметрами среды β и σ . Сопоставление с уравнением Шредингера показывает, что она характеризует энергию состояния, описываемого только последней СФ $\Theta_N(z)$.

Спектр СФ, обладающих разной энергией и аналогичный по своим свойствам спектру волновых функций $|\Psi_j|^2$, получается в нелинейной задаче из требования

выполнения граничного условия (5), подобно уравнению Шредингера, в котором квантование значений энергии E вытекает из требования нормировки

$$\int \Psi \Psi^* dr = 1.$$

Отличие заключается в том, что спектр СФ конечный, хотя может быть очень большим при $\beta \rightarrow \sigma + 1$.

В случае распределенной плотности (при $k > 0$) линеаризованное уравнение также сводится к виду уравнения Шредингера для гармонического осциллятора (15). Для этого сначала надо сделать преобразование растяжения (9), а затем замену (14).

3. ДВУМЕРНЫЕ И ТРЕХМЕРНЫЕ ТЕПЛОВЫЕ СТРУКТУРЫ

3.1 Численный метод построения многомерных СФ

Для расчета многомерных СФ выбиралась некоторая область и строилась сетка; автомодельное уравнение (4) и граничные условия (5), (6) аппроксимировались на сетке со вторым порядком точности. Учитывалась предполагаемая симметрия решения, и строилась не вся СФ, а только ее часть.

В зависимости от порядка симметрии СФ использовались декартова или сферическая (в двумерном случае полярная) системы координат. Например, для построения двумерной структуры в качестве области брался сектор достаточно большого радиуса с углом раствора $2\pi/m$, где m – порядок симметрии СФ, и строилась равномерная сетка по углу и по радиусу. (Если m было кратно четырем, то в качестве области брался прямоугольник, расположенный в первом квадранте, и использовалась декартова система координат.) На внутренних границах сектора $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi/m$ записывались условия симметрии. На внешней границе считалось, что решение с хорошей точностью описывается асимптотикой (7).

Полученная система нелинейных разностных уравнений решалась итерационным методом Ньютона. Для его реализации необходимо было задать хорошее начальное приближение, то есть фактически представить вид СФ. Начальные приближения строились из анализа линеаризованного уравнения и возможности его сшивания с асимптотикой решения (7). Именно методом сшивания впервые были получены хорошие начальные приближения, которые позволили построить много

типов двумерных структур и изучить их архитектуру [12, 13, 19]. В декартовой системе координат во многих случаях (если β не слишком близко к $\sigma+1$), как показали расчеты [16], хорошим приближением к многомерной СФ является произведение одномерных СФ:

$$\begin{aligned}\Theta_{j,l,m}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \Theta_j(\xi_1)\Theta_l(\xi_2)\Theta_m(\xi_3), & v = 2, \\ \Theta_{j,l}(\xi_1, \xi_2) &= \Theta_j(\xi_1)\Theta_l(\xi_2), & v = 1.\end{aligned}\tag{16}$$

3.2 Двумерные собственные функции

Численные расчеты проводились для различных параметров β , σ и $k=0$ в полярной и декартовой системах координат. Часть СФ была построена методом Ньютона с использованием начальных приближений, другая часть была получена методом продолжения по параметру. В последнем случае параметр β изменялся с некоторым достаточно малым шагом. СФ, построенная для предыдущего значения β , являлась начальным приближением для следующего значения β . Вблизи точек бифуркации, где решение сильно изменяется с изменением параметра, для улучшения начального приближения использовалась линейная экстраполяция, с помощью которой осуществлялся прогноз СФ для нового значения β . Алгоритм продолжения по параметру предусматривает возможность измельчение шага до некоторого минимального в случае плохой сходимости к СФ в методе Ньютона, и, наоборот, увеличение шага до заданного максимального при быстрой сходимости. Результаты исследований позволили выявить ряд закономерностей в зависимости спектра двумерных структур от значений параметров.

На рис. 3 представлены шесть СФ при $\beta = 3.5$, $\sigma = 2$, построенных в декартовой системе координат с использованием начальных приближений (16). Всего таких приближений для данных значений параметров существует десять. Только одна предполагаемая СФ $\Theta_{2,2}$ не была построена. Исследования показали, что она существует при меньших значениях β . При $\beta \approx 3.32$ СФ $\Theta_{2,2}$ вырождается в цилиндрически-симметричную функцию Θ_2 . На рис. 4 представлена эволюция структуры $\Theta_{2,2}$ при изменении значения β . Мы видим, что при уменьшении β вершины структуры растут, а провалы между ними уменьшаются. Примерно при $\beta \approx 3.08$ центральный минимум опускается до нуля, и в центре образуется нулевая

область ($\Theta < 10^{-8}$). При дальнейшем уменьшении β нулевая область увеличивается (см. рис. 4 д, е), и затем структура распадается на четыре независимые локализованные структуры с одной вершиной, соответствующие первой СФ при данном значении β . Аналогичную эволюцию имеет структура Θ_{n3m6} с порядком симметрии 6, (см. рис. 5), посчитанная в полярной системе координат. При увеличении параметра β , она вырождается в третью цилиндрически-симметричную СФ, а при уменьшении β – распадается.

Расчеты показали, что общая тенденция эволюции СФ с изменением параметра β такова. При $\beta \rightarrow \sigma + 1$ все СФ "разваливаются" при некотором значении β на простые структуры с одной вершиной, соответствующие первой цилиндрически-симметричной СФ.

У сложных структур это расщепление идет постепенно с уменьшением β . Сначала вблизи абсолютного минимума образуется область с нулевым значением функции (как у СФ $\Theta_{2,2}$ на рис. 4 д, е), затем нулевые области образуются и в окрестности других минимумов. На рис. 6 а представлена сложная архитектура СФ Θ_{n2m12} при $\beta = 3.05$, а на рис. 6 б изображены ее линии уровня. СФ Θ_{n2m12} можно рассматривать как состоящую из двух колец «гор». В центре внутреннего кольца, имеющего четыре вершины, находится нулевая область (на рис. 6 б серая область, обведенная белой линией). Внешнее кольцо гор состоит из 12 вершин, объединенных в четыре группы по три вершины. В каждом из углов квадрата между двух колец также находятся нулевые области (на рис. 6 б они светло-серого цвета, рядом с белыми областями). С уменьшением параметра β нулевые области сливаются, вершины локализуются, и структура распадается.

При увеличении параметра β амплитуда отклонений СФ от гомотермического решения в области немонотонности уменьшается. СФ при бифуркационном значении параметра либо вырождаются в цилиндрически-симметричные структуры, как $\Theta_{2,2}$, либо прекращают свое существование, сливаясь с гомотермическим решением в некоторой неограниченной области плоскости (см. эволюцию структуры $\Theta_{1,2}$ на рис. 7). Исследования показали, что в последнем случае точка бифуркации для СФ $\Theta_{i,j}$ ($j \geq i$), образованной произведением двух одномерных СФ, совпадает с бифуркационным значением параметра β_j (11) для одномерной СФ Θ_j . Поскольку рассматриваемые СФ

$\Theta_{i,j}$ очень близки к приближению (16), образованному произведением двух одномерных СФ, то можно предположить, что при $\beta \rightarrow \beta_j$ двумерная СФ превращается в структуру, состоящую из одного или более бесконечных хребтов, в зависимости от значения i (см. рис. 7). При $i = j$ СФ сливается с гомотермическим решением на всей плоскости (x, y) , как например СФ $\Theta_{4,4}$.

Результаты расчетов выявили следующие особенности спектра СФ при $\beta \rightarrow \sigma + 1$ 1) число сложных СФ состоящих из многих максимумов резко увеличивается (рис. 6 б); 2) некоторые СФ выпадают из спектра (они уже развалились к этому значению параметра); 3) появляются СФ, содержащие внутри себя одну или несколько областей с нулевым значением температуры, как СФ Θ_{n2m12} , описывающая многосвязную область локализации горения; 4) появляются структуры нового типа, в которых максимумы образуют группы, как СФ Θ_{n2m12} .

3.2 Трехмерные собственные функции.

В настоящее время построены трехмерные СФ, которые имеют четвертый порядок симметрии по углу $1 < \beta < \sigma + 1$ и четвертый порядок симметрии по углу θ . С учетом симметрии они строились только в одной восьмой части всей области, в первом октанте декартовой системы координат. Они рассчитывались в области, представляющей собой прямоугольный параллелепипед $G: \{0 \leq x \leq x_f, 0 \leq y \leq y_f, 0 \leq z \leq z_f\}$. Использовалась равномерная сетка с числом узлов $30 \times 30 \times 30$ и шагами h_x, h_y и h_z по каждой оси. Во внутренних точках уравнение (4) аппроксимировалось на семиточечном шаблоне разностной схемой второго порядка точности. В качестве начального приближения бралась функция (16):

На гранях $x = 0, y = 0, z = 0$ ставились условия симметрии, на параллельных им гранях аппроксимировалось условие выхода на асимптотику (7), которая удовлетворяет уравнению:

$$x\Theta_x + y\Theta_y + z\Theta_z + \frac{2(\sigma + 1)}{\beta - \sigma - 1}\Theta(x, y, z) = 0. \quad (17)$$

Полученная система разностных уравнений на сетке решалась методом Ньютона. В большинстве расчетов итерации быстро сходились к СФ, очень близкой к приближению (16). Для наглядного представления архитектуры СФ в трехмерном

изображении строилась поверхность уровня равного полуширине СФ, характеризующая форму области локализации. Также строились разрезы СФ по осям координат и главной диагонали прямоугольного параллелепипеда. На рис. 8 представлены области локализации и сечения некоторых трехмерных структур.

Исследование эволюции СФ при изменении параметра β показало, что она аналогична эволюции двумерных структур. Так при $\beta \rightarrow \sigma + 1$ СФ $\Theta_{i,j,k}$ ($i \leq j \leq k$) распадается на простые структуры. На рис. 9 представлена СФ $\Theta_{2,2,2}$ при двух значениях параметра β , $\sigma = 2$. Расчеты показали, что при уменьшении параметра β максимумы СФ увеличиваются, минимумы уменьшаются, и начиная с некоторого значения параметра появляется нулевая область внутри СФ (рис. 9 б). Наконец, при бифуркационном значении β СФ распадается на простые структуры, описываемые первой сферически-симметричной СФ с областью локализации в виде шара.

4. УСТОЙЧИВОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Для исследования устойчивости автомодельных решений численно решалась задача Коши для уравнения (1). В качестве начального распределения температуры бралась либо сама СФ – резонансное возбуждение, либо «возмущенная» СФ.

Известно, что автомодельные решения, развивающиеся в режиме с обострением, неустойчивы по отношению к малым возмущениям. Малые изменения начального профиля приводят к малому изменению времени обострения t_f , что, в свою очередь, приводит к сколь угодно большому различию между решениями, начиная с некоторого момента времени близкого к t_f . Однако, эти решения могут обладать структурной устойчивостью, в смысле выхода на автомодельный режим [4, 21]. Для исследования структурной устойчивости СФ проводилась так называемая *автомодельная обработка* решения задачи Коши $T(r, t)$ [12, 23]:

$$\bar{\Theta}(\xi, t) = g(t)^{-1} T(r \cdot \psi(t), t), \quad (18)$$

где функции $g(t)$ и $\psi(t)$ определены автомодельными зависимостями (3).

Понятно, что автомодельные решения и гомотермическое решение являются стационарами в представлении (18). *Структурно устойчивым решением* в рассматриваемой задаче называется устойчивый стационар автомодельной обработки

(18). Для определения структурной устойчивости в численных расчетах в каждый момент времени температура $T(r, t)$ в каждой точке отрезка $r(t)$ делилась на максимум распределения температуры T_{\max} , а значение $r(t)$ – на координату максимума $r_{\max}(t)$. (Если максимум находился в начале координат, то значение $r(t)$ делилось на координату полуширины $r_{1/2}(t)$ или любую другую выделенную точку.) Если автомодельное решение обладает структурной устойчивостью, то полученный таким образом нормированный профиль решения не изменяется со временем. Более того, если в начальный момент времени взять произвольный профиль, то в случае структурной устойчивости автомодельного режима будет наблюдаться сходимость нормированных решений к автомодельному профилю.

Понятие *метастабильной устойчивости* широко используется в физике, адекватно описывая наблюдаемые явления. Например, возбужденные состояния атомов или ядер являются метастабильно устойчивыми. К метастабильно устойчивым решениям отнесем все стационары автомодельного представления (18), которые не являются устойчивыми. В автомодельной системе координат (18) стационары являются особыми траекториями, к которым либо притягиваются другие траектории, либо отходят от них с нулевой скоростью, что является причиной метастабильной устойчивости решения не существующего в целом. Время метастабильной устойчивости определяется временем следования автомодельному закону с заданной точностью, которое мы будем оценивать численно по росту начального автомодельного профиля.

Проведенные исследования показали, что в любой геометрии и любом распределении плотности первая СФ, имеющая один максимум в центре симметрии, является структурно устойчивым автомодельным решением. В сферической и цилиндрической геометрии область ее притяжения ограничена некоторым радиусом R_c . Другим структурно устойчивым решением, найденным впервые в работе [17], является вторая СФ с нулевой областью в центре. Она обладает широкой областью притяжения. На рис. 10 показана сходимость нормированных профилей температуры ко второй СФ при нерезонансном возбуждении.

Старшие СФ, имеющие несколько максимумов, не являются структурно устойчивыми решениями, но они обладают метастабильной устойчивостью. Проведенные расчеты обнаружили, что устойчивость СФ зависит от параметров нелинейной среды, от ее номера и от четности номера [17]. Нечетные СФ могут

сохранять свою структуру при росте температуры в 10-20 раз, в то время как четные следуют автомодельному закону при росте температуры от нескольких раз при больших значениях β до нескольких сотен и даже тысяч раз при β близких к $\sigma + 1$. При $\beta \rightarrow \sigma + 1$ вырождение СФ вблизи момента обострения происходит в виде распада. Сложная четная СФ существует очень долго и поэтапно распадается на независимо горящие на своей фундаментальной длине со своим моментом обострения структуры, при этом в процессе эволюции наблюдаются четные СФ с меньшим номером, как промежуточные асимптотики. На рис. 11 представлены эволюции четвертой Θ_4 и шестой Θ_6 СФ, имеющих нулевую область в центре. Мы видим, что СФ Θ_4 сохраняет свою структуру при росте температуры примерно в 300 раз, а СФ Θ_6 – примерно в 100 раз. В своем развитии СФ Θ_6 вырождается сначала в четвертую, а затем во вторую СФ.

5. ОРГАНИЗАЦИЯ ГОРЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЫ, ОБРАЗОВАННАЯ СТРУКТУРАМИ РАЗНОЙ СЛОЖНОСТИ

5.1. Структура спектра СФ нелинейной среды

Проведенные исследования показали, что при β близких к $\sigma + 1$ спектр СФ автомодельной задачи описывает следующую организацию в нелинейной среде. Число СФ конечно, но может быть очень большим ($N \rightarrow \infty$ при $\beta \rightarrow \sigma + 1$). В центре находится первая СФ – простая структура с одним максимумом. Далее идут радиально-симметричные СФ. Четные СФ с небольшими номерами представляют собой структуры с нулевой областью в центре, описывающие процессы горения в выделенных сферических или цилиндрических слоях, крайне медленно смещающихся (по сравнению с ростом температуры) к центру (см. рис. 12). Чем больше номер СФ, тем больше слоев она имеет. Потом появляются в спектре нечетные СФ и обычные четные СФ, отличные от нуля в центре симметрии. Радиально-симметричные СФ можно рассматривать как вырожденные по углу структуры, а многомерные – как снимающие это вырождение.

Архитектура многомерных СФ заключается в следующем: максимумы распределения температуры располагаются концентрическими слоями. Число максимумов в слое определяется параметрами l и m , число слоев – номером

собственной функции j . Простейшая трехмерная структура имеет форму гантели. Структурно устойчивыми являются первая и вторая СФ. Остальные метастабильно устойчивы. С увеличением номера СФ время метастабильной устойчивости уменьшается. Старшие СФ при $t \rightarrow \tau$ распадаются; в процессе распада наблюдаются младшие СФ, как промежуточные асимптотики.

Такая организация горения нелинейной среды качественно напоминает структуру атома водорода, если интерпретировать СФ автомодельной задачи как состояния электрона в атоме (электронные оболочки), обладающие разной энергией. Первая СФ с нулевой областью $\Theta_2(\xi)$ соответствует основному уровню в атоме; как и в атоме водорода, она является устойчивой, и на нее «сваливаются» все старшие СФ в своем развитии. Старшие СФ можно рассматривать как возбужденные метастабильные состояния нелинейной среды.

5.2. Линеаризация. Сведение к уравнению Шредингера для атома водорода

Линеаризованное около Θ_H уравнение хорошо описывает и многомерные структуры. Именно благодаря этому удалось предсказать их существование и построить. При $k=1$ с помощью преобразования: $u(\xi, \theta, \varphi) = e^{\lambda \xi} U(\xi, \theta, \varphi)$, $\lambda = 0.5(\beta - \sigma - 1)$, оно приводится к виду уравнения Шредингера для водородоподобного атома [23]:

$$\Delta_{\xi, \theta, \varphi} U + 2 \left(E_a + \frac{Z}{\xi} \right) U = 0, \quad \text{где} \tag{19}$$

$$E_a = -\frac{E_0}{a^2} < 0, \quad E_0 = \frac{(\beta - 1)^2}{8}, \quad Z = \frac{\sigma}{2} + (\beta - 1 - \sigma) > 0.$$

Число a задает число СФ в спектре (см. формулу (12)). Если a – целое, то уравнение (19) является уравнением Шредингера, описывающим состояние электрона в атоме с зарядом Z и энергией $E = E_a$. При β близких к $\sigma + 1$ выполняются, с точностью до небольших поправок, те же соотношения между зарядом и энергией, что и в атоме: $Z \approx \sigma/2$, а $E_a \approx -Z^2/2a^2$, и число сферически-симметричных СФ – «главных квантовых уровней» велико (при $\beta \rightarrow \sigma + 1$ $N \rightarrow \infty$). (Атом водорода соответствует

$\sigma = 2$.) Спектр СФ отличается от спектра электронных плотностей $|\Psi_j|^2$ наличием центральной СФ Θ_1 , имеющей максимум в центре.

Уравнение Шредингера имеет решение при любых значениях E . Связанные состояния электрона в атоме отвечают отрицательным значениям энергии E . Кроме того на волновую функцию Ψ накладываются определенные условия гладкости и граничные условия. Именно, требование выполнения граничных условий приводит к тому, что не при всех, а только при определенных дискретных значениях энергии $E = E_n$:

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (20)$$

задача имеет решения, где E_0 – энергия основного состояния

В линеаризованном уравнении (19) в отличие от уравнения Шредингера константа E_a является фиксированной величиной, задаваемой параметрами среды β и σ . Ей соответствует единственное решение линейного уравнения (19) U и целый спектр автомодельных решений Θ_j нелинейной задачи. Также как в задаче Шредингера, требование выполнения граничных условий выделяет дискретный спектр СФ Θ_j автомодельной задачи с разными значениями энергий E_j . Подчеркнем, что эта энергия E_j характеризует энергию связанного состояния, описываемого СФ Θ_j , и определяет время жизни СФ Θ_j , то есть ее метастабильную устойчивость. При $\beta \rightarrow \sigma + 1$ $E_a \sim (\beta - \sigma - 1)^2 \rightarrow 0$; следовательно, S-режим соответствует энергии $E = 0$, что означает свободное состояние электрона. Действительно, в S-режиме существует единственная СФ Θ_1 , а при $\beta \rightarrow \sigma + 1$ происходит распад сложных структур на простые локализованные структуры. Таким образом, в LS-режиме сложные СФ представляют собой связанные состояния, являющиеся объединением простых структур в соответствии с принципом объединения простых структур в сложные выдвинутым в работе [10].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные исследования показали, что в рассматриваемой нелинейной диссипативной среде заложен квантовый спектр тепловых структур разной сложности, развивающихся в режиме с обострением и имеющих строго определенную архитектуру

и форму локализации. Согласованное действие нелинейной теплопроводности и объемного источника играет роль потенциального поля сил, в котором возникают особые распределения температуры (энергии) – СФ нелинейной среды, притягивающиеся к центру. Действие этих сил заставляет вступать в связанные состояния простые структуры и приводит к возникновению целого спектра сложных СФ, обладающей разной энергией связи и разной устойчивостью. Как мы видели, при некоторых значениях параметров возникшая организация горения нелинейной среды напоминает по своей структуре атом водорода или гармонический осциллятор, и в линейном приближении сводится к виду уравнения Шредингера. Это показывает принципиальную возможность *непосредственного* описания квантовых систем с помощью нелинейных параболических уравнений, в отличие от теоретико-вероятностного подхода в квантовой механике. Известно, что Эйнштейн и другие ученые не принимали теоретико-вероятностное представление квантовой механики, считая его временным явлением. Эйнштейн считал, что элементарные частицы, атомы, фотоны и т.п. – суть сингулярности поля, и должны описываться структурными, то есть дифференциальными уравнениями [24]. Можно ожидать, что теория режимов с обострением будет развиваться и в этом важном направлении.

Литература

1. Белавин В.А., Курдюмов С.П. Режимы с обострением в демографической системе: Сценарий усиления нелинейности //ЖВМиМФ. 2000. Т. 40. №2. С. 238-251.
2. Галактионов В. А. Доказательство локализации неограниченных решений нелинейного параболического уравнения $u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^\beta$ //Дифференц. Уравнения. 1985. Т.21. №1. С. 15-23.
3. Димова С. Н., Касичев М. С., Курдюмов С.П. Численный анализ собственных функций горения нелинейной среды в радиально-симметричном случае // ЖВМиМФ. 1989. Т. 29. № 11. С. 1683-1704.
4. Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А. Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде //ЖВМиМФ. 1983. Т. 23. № 2. С.380-390.
5. Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Локализация термоядерного горения в плазме с электронной теплопроводностью //Письма в ЖЭТФ. 1978. Т.26. Вып.9. С. 620-624.

6. *Капица С.П.* Феноменологическая теория роста населения Земли // Успехи физ. наук. 1996. Т. 166. №1. С. 63-80.
7. *Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г.* Синергетика и прогнозы будущего. М.: Эдиториал УРСС. 2001.
8. *Кириченко Н.А.* Локализованные нестационарные структуры в задачах лазерной термохимии // В книге Режимы с обострением. Эволюция идеи. – М.: Наука. 1998. С. 217-230.
9. *Князева Е.Н., Курдюмов С.П.* Основания синергетики // СПб.: Алетейя, 2002. – 414 .
10. *Курдюмов С. П.* Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации // Препринт ИПМатем. АН СССР, М., 1979, № 29.; // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука. 1982. С. 217-243.
11. *Курдюмов С.П., Куркина Е.С.* «Спектр собственных функций автомодельной задачи для нелинейного уравнения теплопроводности с источником» // ЖВМиМФ, 2004 г. Т. 44. № 9. С. 1619-1637.
12. *Курдюмов С. П., Куркина Е.С., Потапов А.Б., Самарский А.А.* Архитектура многомерных тепловых структур // ДАН. 1984. Т. 274. № 5. С. 1071–1075.
13. *Курдюмов С. П., Куркина Е.С., Потапов А.Б., Самарский А.А.* Сложные многомерные структуры горения нелинейной среды. // ЖВМиМФ. 1986. Т. 26. № 8. С. 1189-1205.
14. *Курдюмов С. П., Куркина Е.С., Малинецкий Г.Г. Самарский А. А.* Диссипативные структуры в неоднородной нелинейной горячей среде // ДАН. 1980. Т.251. №3. С.587-591.
15. *Курдюмов С. П., Малинецкий Г.Г., Повещенко и др.* Взаимодействие диссипативных тепловых структур в нелинейных средах // ДАН. 1980. Т. 251. № 4. С. 836-839.
16. *Куркина Е. С.* Двумерные и трехмерные тепловые структуры в среде с нелинейной теплопроводностью // Прик. матем. и информат. М.: Изд-во МГУ, 2004. № 17. С. 84-111.
17. *Куркина Е.С., Курдюмов С.П.* «Спектр диссипативных структур, развивающихся в режиме с обострением». // ДАН. 2004. Т. 395. № 6. С.1-6.
18. *Лобанов А.И, Старожилова Т.К.* Нестационарные структуры в модели свертывания крови // Новое в синергетике: Взгляд в третье тысячелетие. – М.: Наука. 2002. С. 346-367.

19. *Потапов А.Б.* Построение двумерных собственных функций нелинейной среды: Препринт № 8 М.: ИПМатем. АН СССР. 1986.
20. Режимы с обострением. Эволюция идеи. –М.: Наука.1998. – 255с.
21. *Самарский А.А., Еленин Г.Г., Змитренко Н.В., др.* Горение нелинейной среды в виде сложных структур // ДАН. 1977. Т. 237. №6. С. 1330-1333.
22. *Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемным источником тепла // ДАН. 1976. Т. 227. №2. С. 321-324.
23. *Фаддеев Л.Д., Якубовский О.Я.* Лекции по квантовой механике для студентов математиков – С-П.: Изд-во С-П. ун-та. 1980. – 200с.
24. *Эйнштейн А., Инфельд Л.* Эволюция физики. – М.: Наука.1965. – 328с.
25. *Kurduumov S. P.* Evolution and self-organization laws in complex systems //Int. J. Modern Phys. C1. 1990, 299-327.