УДК: 519.1+538.911

МОСКОВСКИЙ МЕТРОПОЛИТЕН КАК БЕЗМАСШТАБНАЯ СЕТЬ

И.А.Евин, А.А. Соловьев, Д.А.Чернобровкин

Введение

С конца 1990 годов для изучения систем,содержащих большое число элементов и связей между ними (сложные системы),развивается новый эффективный инструмент исследования – теория сложных сетей.Узлы в сложных сетях являются элементами исследуемых систем, а связи между узламипредставляют взаимодействия между элементами[1,4]. Сложные сети выделяют, по существу, системообразующие структуры или, образно говоря, каркасысоответствующих сложных систем.Исследование свойств таких сетей дает содержательную информацию о свойствах сложных систем в целом.

Сетевой подход в изучении окружающего нас мира берет свое начало от Леонарда Эйлера, который в 1735 году, находясь в России на императорской службе, решил знаменитую задачу о семи мостах в Кенигсбергеи, тем самым, заложил основы новой математической дисциплины – теории графов.Современная тория сложных сетей развивается на основе эмпирических данных о существующих реальных сетях, таких как Интернет, Всемирная паутина, биологические и социальные сети, сети друзей и знакомых и многие другие. Методы теоретической физики, прежде всего теории критических явлений, хорошо подходят для изучения проблем в области сетевых структур.

В 1999 году физики Л. Барабаши (LaszloBarabasi) и Р. Альберт (RekaAlbert) исследовали законы распределения узлов по числу связей для некоторых реальных сложныхсистем. Было установлено, что для многих сетевых структур, например, таких как метаболические сети и белковые взаимодействия в клетках, информационная система авиационных сообщений в США, Интернет и его виртуальный двойник WorldWideWeb и т.п., вероятностное распределение узлов по числу связей подчиняется свойственному всем критическим состояниям физических систем степенному закону

$$P(q) \propto q^{-\gamma},$$

где $P(q)$ – вероятность того, что случайным образом выбранный узел сети имеет q связей, γ – постоянная величина.

Таким образом, во многих реальных сетях небольшое число узлов содержит очень большое число связей, а большое число узлов содержит незначительное число связей. Такие сложныесети получили название безмасштабных сетей (scalefreenetworks) [1,4].

В последние годы понятия и методы теории безмасштабных сетей используются при изучении проблем общественного транспорта, в частности при изучении разнообразных аспектов функционирования метрополитена в крупных городах мира[5,7].В данной работе на примере московского метрополитена впервые рассматривается математическая модель развития сети метро крупного мегаполиса в исторической перспективе – с момента открытия и до настоящего времени.

Некоторые основные понятия теории сложных сетей

DegreeCentrality узла

В современной теории сетей число связей узла (в теории графов – связи и узлы – это, соответственно, ребра и вершины графа) называется степенью (degree)узла. Понятие степениузла в теории сложных сетей является простейшей оценкой значимости узла и обозначается как degreecentrality.Узлы с большим числом связей называютсяхабами. Для московского метро узлами с наибольшим числом связей или хабамиявляются станция Боровицкая и станция Киевская.

BetweennessCentrality узла

Понятие betweennesscentrality$i$-того узла, $B(i)$, характеризует загруженностьi-тогоузла в сети и определяется кратчайшими путями междуузлами сети,которые проходят черезi– узел:

$$B(i) = \sum_{(s,t)} \sigma_{st}(i) / \sigma_{st}$$

Здесь $\sigma_{st}(i)$ – число кратчайших путей из s -узла в t –узел, проходящих через i-узел, а σ_{st} – общее число кратчайших путей между парамиузлов с номерами s и t, которые также имеют соединение через i– узел. Суммирова

ние идет по всем парам узлов, которые имеют соединение через i– узел.

Величина betweennesscentralityузлаособо важна в изучении транспортных потоков и обычно называется нагрузкой (загруженностью) узла.Узлыс высоким значением оценки B являются наиболее загруженными. В отличие от степени узла, являющейся локальной характеристикой сети, понятие betweennesscentrality узла(нагрузка узла)характеризует топологические свойства связности сети в узлах сети.

В табл.1 приведен список 10 станций московского метро с наибольшими значениями величины betweennesscentrality.

Таблица 1.

№	Станция	Betweennes-scentrality
1	Киевская	3068,15
2	Октябрьская	2948,08
3	Курская/Чкаловская	2903,42
4	Таганская/Марксистская	2668,96
5	Баррикадная/Краснопресненская	2510,02
6	Парк Культуры	2359,48
7	Павелецкая	2127,92
8	Третьяковская/Новокузнецкая	2120,51
9	Менделеевская/Новослободская	1782,23
10	Автозаводская	1774,61

Ассортативность сети

Ассортативностьсети r- параметр, оценивающий тенденции узлов сети оказаться соединенными с другими узлами с одним и тем же числом связей.

Ассортативностьсети rопределяется коэффициентом Пирсона:

$$r = \frac{L\sum_{i=1}^{L} j_i k_i - \left[\sum_{i=1}^{L} j_i\right]^2}{L\sum_{i=1}^{L} j_i^2 - \left[\sum_{i=1}^{L} j_i\right]^2}.$$

Здесь L – число связей в сети, а j_i и k_i – степени узлов на обоих концахi-тойсвязи.Если узлы с большим числом связей (хабы) связаны друг с другом, то$r \approx 1$. Если узлы с большим числом связей связаны с узлами, обладающими небольшим числом связей, то $r \approx -1$ ([1,2]).

Для биологических и технологических сетей показатель ассортативности принимает отрицательные значения, тогда как для социальных сетей этот показатель является положительным[1,2,10].Термин «ассортативное смешивание» (assortativemixing) возник в социологии, в частности, при изучении закономерностей формирования супружеских пар [10].

Кластеризация сети

ПоказательKкластеризации сети ([1], [3])определяется соотношением

$$K = 3\frac{M_\Delta}{M_\vee},$$

где M_Δ – число треугольников (циклов длины три) в сети, а $M_\vee$ – число «вилок», («вилка» – узел и две его связи (ребра)).

Коэффициент кластеризации K сети представляетв множестве всех вилок сети долю тех «вилок», у которых есть три ребра, образующие треугольник или цикл длины три.

Социальные сети в отличие от биологических и технологических сетей характеризуются высокой степенью кластеризации, например, коэффициент кластеризации для сети содружества математиков имеет значение, равное 0,53[4].

Применение методов теории сложных сетей кизучениюсети метро

В работах [5,7] сравнивались сети метро33 городов мира. При этом сетевая модель метро была выбрана так, что конечные станции и станции с переходами и только они являются узлам сети.То есть узлов в данной модели сети метро значительно меньшечисла станций.

В работе [8],на примере метро Шанхая, поочередно удалялись узлы из его сети:

- узлы с наибольшим числом связей;
- узлы с наибольшим значением betweennesscentrality;
- случайные узлы.

При этом анализировалось изменение среднего кратчайшего расстояния в сети.

В данной работедля оценки сети метро при удалении узлов введен новый параметр– «эффективность». Эффективность E определяется средней величиной от обратных значений длин кратчайших путей между узлами сети,

$$E = \frac{2}{N(N-1)}\sum\frac{1}{d_{ij}}$$

Здесь N– число узлов, d_{ij} – кратчайшее расстояние между узлами с номерами i и j.

Величина E более информативна, чем среднее кратчайшее расстояниев сети, потому что среднее кратчайшее расстояние при пошаговом удалении узлов довольно быстро уходит в бесконечность (при формировании в процессе удаления изолированного узла или кластера).

Рассмотрена зависимость эффективности E от количества удаленных узлов. Результаты исследования показывают, что при удалении узлов с наибольшими значениями показателя betweennesscentrality, скорость спада эффективности E заметно выше,чем при удалении узлов случайным образом.

Модель эволюции московского метро

В нашем исследованииэволюции московского метро сетевая структура метро такая, что каждый узел сети соответствует некоторой станции метро, связь между узлами –перегону меду станциями и, наоборот, каждой станции метро соответствует узел,а каждому перегону между станциями – связь.Так как между соседними станциями – станция Александровский сад/Арбатская/Библиотекаим.Ленина/Боровицкая и станция Охотный ряд/Площадь Революции/Театральная – существует два перегона, то для того, чтобы исключить в сетевой модели образование множественных ребер, станция Александровский сад/Арбатская/Библиотека им. Ленина/Боровицкая была разбита на два узла Александровский сад/Арбатская и Библиотека им. Ленина/Боровицкая.

Для данной модели было построено 25 графов, соответствующих схемам метро в разные годы[12,13].

При построении распределений узлов по числу связей учитывались только узлы с чётной степенью.В силу специфики сетей метро, число узлов с нечётными степенями значительно меньше числа узлов с чётными степенями. Узлы с нечётной степенью являются конечными станциями веток метро.

Из проведенного нами исследования следует, что Московский метрополитен стал безмасштабной сетью около 1990 года, после ввода в строй около 100 станций (узлов сети). При этом, несмотря на непрекращающийся рост числа станций, характер распределения узлов по числу связей с течением времени с этого момента не изменяется.Установившееся распределение узлов по числу связей можно описать в виде степенной зависимости с показателем степени γ равной примерно 2,8. Из рис. 1 видно, что сеть, соответствующая схеме метро 1984 года, ещё не являетсябезмасштабной сетью, но с 1992 года точки на графике распределения, где обе оси имеют логарифмический масштаб,практически идеально ложатся на общую прямую – этоозначает, что с этого момента сеть становится безмасштабной. Заметим, что многие реальные сетевые структуры являются безмасштабными сетями с параметром γ, принимающим значения из интервала $2 < \gamma < 3$.

Для московского метро, как и для всех безмасштабных сетей, характерно небольшое количество узлов с большим количеством связей – хабов, и большое число узлов с небольшим количество связей.

Исследования для метрополитенов других городов мира также указывают на наличие степенной зависимости в распределениях станций по числу сходящихся в них связей [7].

Изменение степени узлов московского метро во времени

Рассмотрим изменение степени узла в реальной сетиМосковского метро и в моделиэволюции безмасштабной сети Барабаши-Альберт(модель BA) [4].

В модели эволюции безмасштабной сети Барабаши-Альбертвеличина $k_i(t)$ – степень узла с номером i в момент времени t представлена формулой

$$k_i(t) = m\left(\frac{t}{t_i}\right)^{0.5}.$$

В модели BA считается, что за единицу времени сеть увеличивается наодин узел. Поэтому мы в качестве временной шкалы при исследовании московского метро

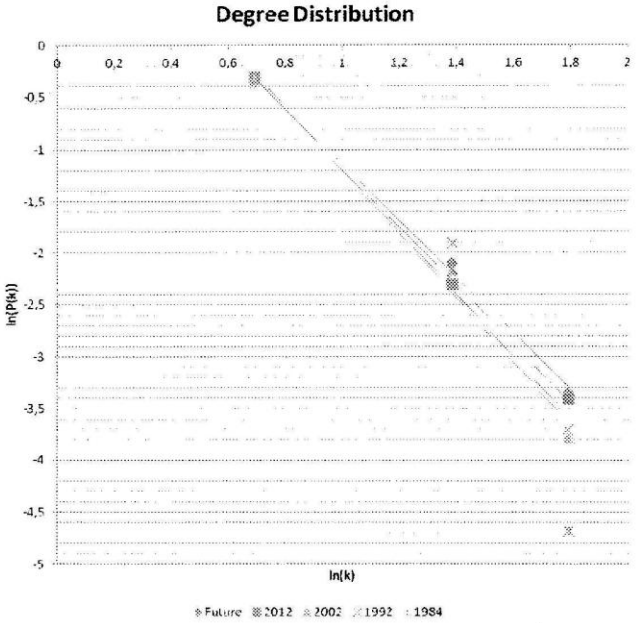

Рис. 1. Распределение узлов по числу связей сети московского метро в разные годы

Рис.2. Изменение числа связей трех различныхстанций московского метро во времени

также как и в модели эволюции Барабаши-Альберт рассматриваем не годы, а количество добавленных узлов с момента открытия метрополитена.

На примере нескольких узлов сети московского метро проследим изменение степени этих узлов в функции количества добавленных узлов. При этом рассматриваютсяузлы, которые на данный момент имеют большую степень. Например, два узла с наибольшей степенью 7 – ст. Киевская и ст. Библиотека им. Ленина, и один из узлов со степенью 6 – ст. Таганская.

В результате выполненных расчетов (рис. 2) получено хорошее соответствие модели BA эволюции безмасштабной сети дляреальной сетимосковского метрос показателем степенипорядка величины 0,5.

Кластеризация,ассортативностьи топологическая нагрузка (betweennesscentrality) для сети московского метро

Изучимдлясетевойструктурымосковскогометроизменение коэффициента кластеризациисетиK,коэффициента ассортативностисети r и параметрabetweennesscentrality узлов сети с течением времени, или точнее, с увеличением размера сети.

В безмасштабных сетях, в отличие от случайных графов, коэффициент кластеризации не зависит от размера сети. Выполненные расчеты показывают, что как только сеть московского стала безмасштабной, коэффициент кластеризации сети стал постоянным. Значение коэффициента кластеризации сети московского метро, равное приблизительно 0,08, почти на порядок больше коэффициента кластеризации в случайной сети с таким же числом узлов и связей.

Аналогичное поведение наблюдается и для коэффициентаассортативностисети r.Коэффициент ассортативности сети Московского метро положителен, (приблизительно равен 0,5), что является свойством социальных сетей. При этом отметим, что уровень кластеризации сети метро значительно ниже, чем у социальных сетей [2].

Таблица 2.

Относительнаяbetweennesscentrality в текущей схеме и в плане строительства новых станций:

№	Станция	2012	План
1	Киевская	0,274555	0,230715
2	Октябрьская	0,26381	0,206546
3	Курская/Чкаловская	0,259814	0,241037
4	Таганская/Марксистская	0,238833	0,243993
5	Баррикадная/Краснопресненская	0,22461	0,127546
6	Парк Культуры	0,211139	0,218652
7	Павелецкая	0,190418	0,180568
8	Третьяковская/Новокузнецкая	0,189755	0,208756
9	Менделеевская/Новослободская	0,159484	0,102857
10	Автозаводская	0,158802	0,153188

Загруженность некоторых станций в часы пик является серьёзной проблемой московского метрополитена. Параметром, служащим показателем загруженности станции является betweennesscentrality.Рассмотрим влияние строительства новых станций на загруженность текущих. Чтобы иметь возможность сравнения, нормализуем параметр betweennesscentrality, то есть поделим этот параметр на $(N-1)(N-2)/2$, гдеN– числоузлов сети. Для сравнения возьмём 10 наиболее загруженных станций на текущий момент из таблицы 1, вычислим нормализованнуюдля действующей сети метро и для сети метро, обозначенной в плане строительства новых станций. В результате

(табл. 2) получим, что загруженность отдельных станций в целом заметно снизилась.

Например, для наиболее загруженных на данный момент станций Киевская и Октябрьская нормализованная betweennesscentrality уменьшилась на 16% и 22% соответственно.

Заключение

В последние годы процессы самоорганизации городов (прежде всего, их экономические и инфраструктурные аспекты) стали объектами интенсивного изучения и здесь были обнаружены универсальные количественные закономерности [11]. Исследованиесистем общественного транспорта и проблем их развития с использованием современных методов теории сложных сетей можно также отнести к этому направлению. При этом, несмотря на то, что каждая транспортная система вносит свою специфику в эти исследования формируются и некоторые общие, универсальные подходы в изучении транспортных структур. Недавно появились первая публикация по надежности сети пассажирских авиаперевозок в США [6], где были проанализирована не только безопасность и надежность аэропортов (узлов сети), но и безопасность и надежностьмаршрутов полетов (связей сети). Несомненно, некоторые подходы этого исследования, можно распространить и на другие сетевыетранспортные структуры мегаполиса.

Ожидается, что в ближайшее время будет преодолен разрыв между обнаруженнымиуниверсальными эмпирическими закономерностями в сетевых структурах реальных объектов и пониманием самой природы сложных систем, втом числе техногенной природы. Это позволит более надежно прогнозировать их развитие и оценивать их надежность и эффективность.

Список литературы:

1. **Евин И.А.** Введение с теорию сложных сетей // Компьютерныеисследования и моделирование. – 2010. – Том 2, N2. – С. 121-141.
2. **Евин И.А., Хабибуллин Т.Ф.** Социальные сети // Компьютерные исследования и моделирование. – 2012. – Том 3, N2. –С.76-81.
3. **Евин И.А., Соловьев А.А., Хабибуллин Т.Ф.** Модели общественного транспорта Москвы на основе теории сложных сетей // Информатизация и связь. –В печати.
4. **Albert R., Barabasi A.-L.** Statistical mechanics of complex networks.//Rev.Mod. Phys. – 2002. – 74.– P.47.
5. **Derrible S., Kennedy C.** The complexity and robustness of metro net-works.//Physica A.– 2010. – 389. – 678-3691.
6. **D.Wuellner, Roy S., R.. D'Souza R.**Resilience and rewiring of the passengerairline networks in the United States.// Phys. Rev. E. – 2010. – 82. – 056101.
7. **Derrible S.**Theproperties and effects of metro network designs.// Ph.D. Thesis. Toronto. – 2010.
8. **Jianhua Zhang, Xiaoming Xu, Liu Hong, Shuliang Wang, Qi Fei** Networked analysis of the Shanghai subway network in China. //Physica A.– 2011.–390. – P.562–457.
9. **A.-L. Barabási, R., Hawoong Jeong** Error and attack tolerance of complex networks.// Nature. – 2000. – 406. – P.378-382.
10. **Newman M.** Mixing patterns in networks. // Phys. Rev. E. – 2010.– 67.–026126. © 2003by the American Physical Society.
11. **Bettencourt L., LoboJ., Helbing D., Kunhert Ch., and West G.** Growth, innovation,scaling, and the pace of life in cities. //Proceedings of the National Academy of Sciences (USA), 104:7301–7306, 2007. doi: 1073/pnas.0610172104.
12. http://www.metro.ru/map/.
13. http://wikipedia.org/wiki/Московский метрополитен.